1.1 ARITHMÉTIQUE

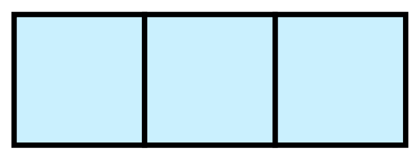
cours 1

Addition

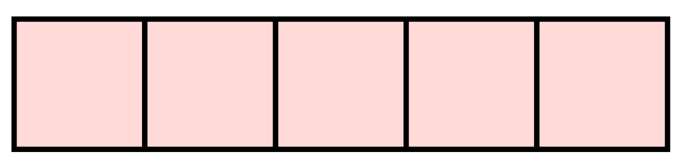
Tous les nombres entiers positifs peuvent être vu comme une suite de

$$+1$$

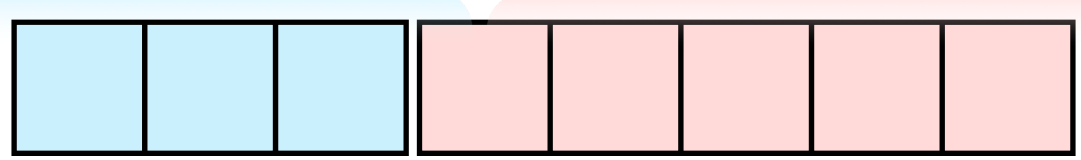
par exemple $3 = +1 + 1 + 1$



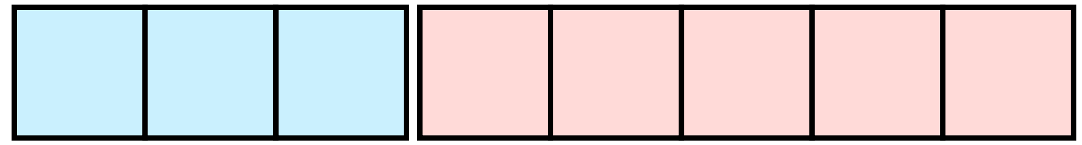
et $5 = +1 + 1 + 1 + 1 + 1$



d'où $3 + 5 = +1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$

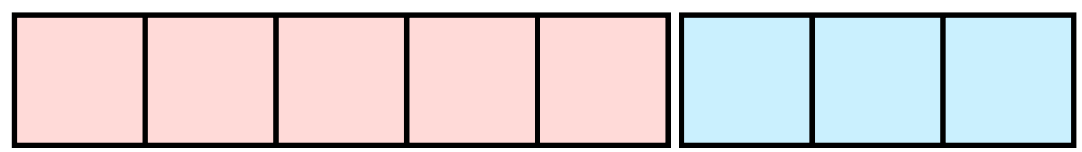


$$3 + 5 = +1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$$



Avec cette représentation, on voit aisément que

$$3 + 5 = 5 + 3$$



Cette propriété de la somme se nomme la commutativité.

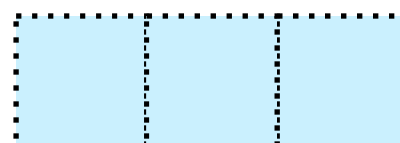
$$a + b = b + a$$

Soustraction

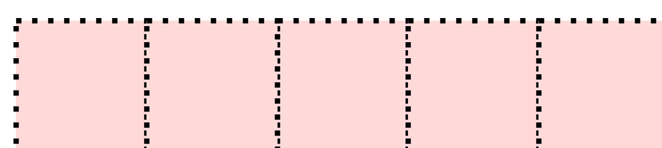
De la même manière, on peut voir les nombres négatif comme une suite de

$$-1$$

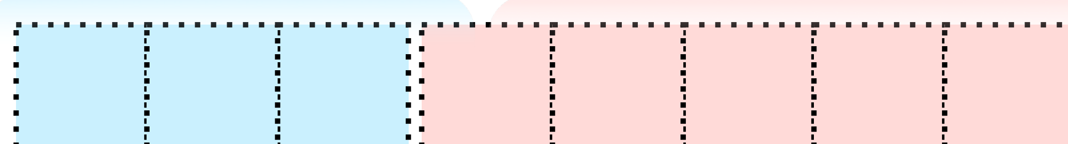
par exemple $-3 = -1 - 1 - 1$



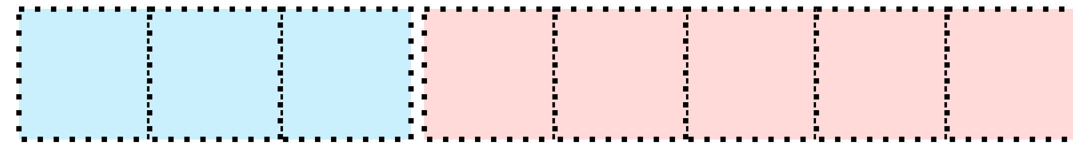
et $-5 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1$



d'où $-3 - 5 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -8$

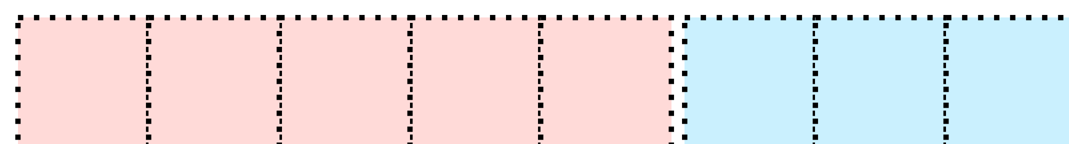


$$-3 - 5 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1$$



Avec cette représentation, on voit aisément que

$$-3 - 5 = -5 - 3$$



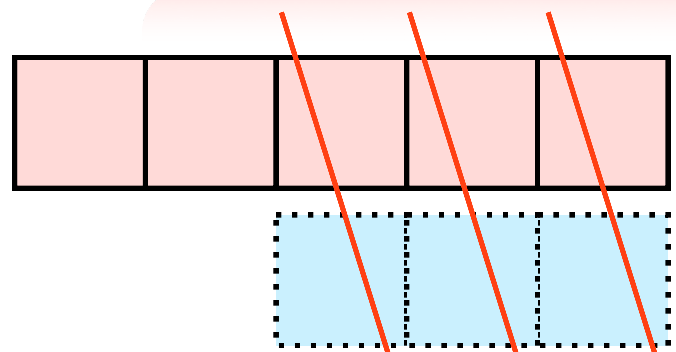
donc la soustraction est aussi commutative

$$-a - b = -b - a$$

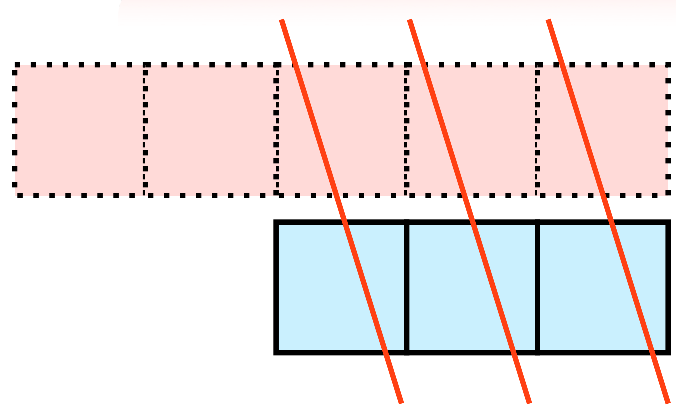
La soustraction est l'opération inverse de l'addition.

C'est-à-dire que -1 annule $+1$

Par exemple $5 - 3 = +1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 2$



Ou bien $-5 + 3 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = -2$



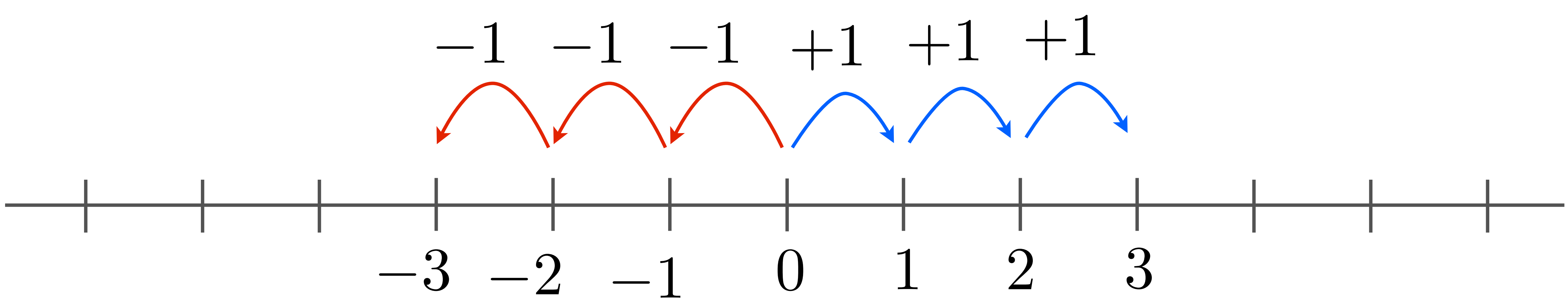
On peut aussi voir cela comme un déplacement sur une droite.

On fixe un point de départ,

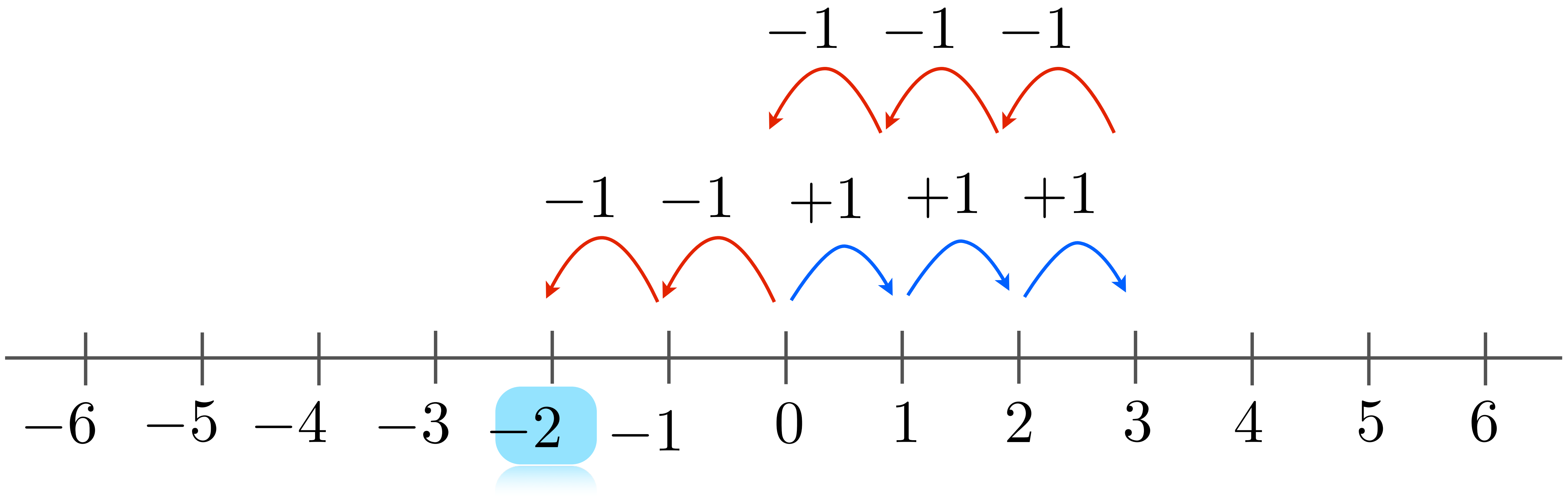
et une distance qu'on nomme l'unité

$+1$ corresponds à un déplacement d'une unité vers la droite

-1 corresponds à un déplacement d'une unité vers la gauche



$$3 - 5 = -2$$



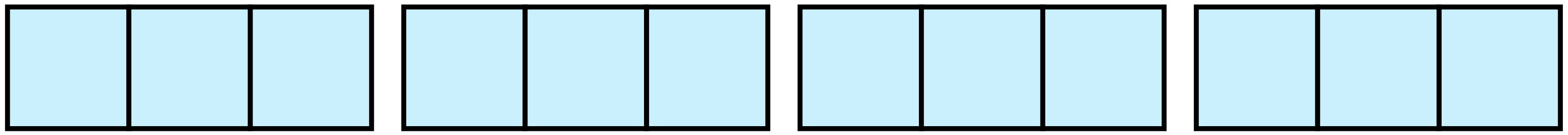
Multiplication

Faire une multiplication revient à faire des

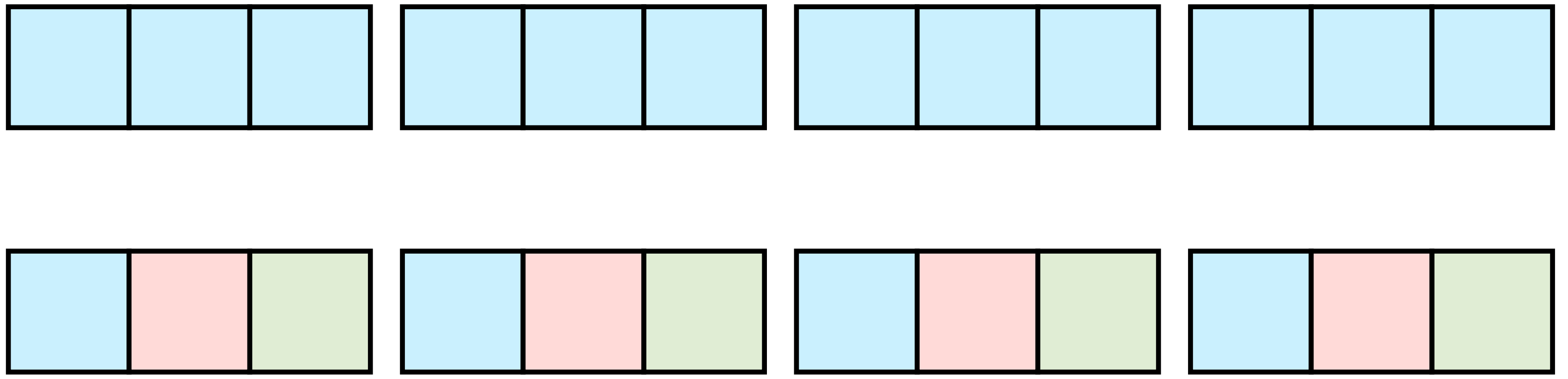
$+n$ au lieu de faire des $+1$

Par exemple

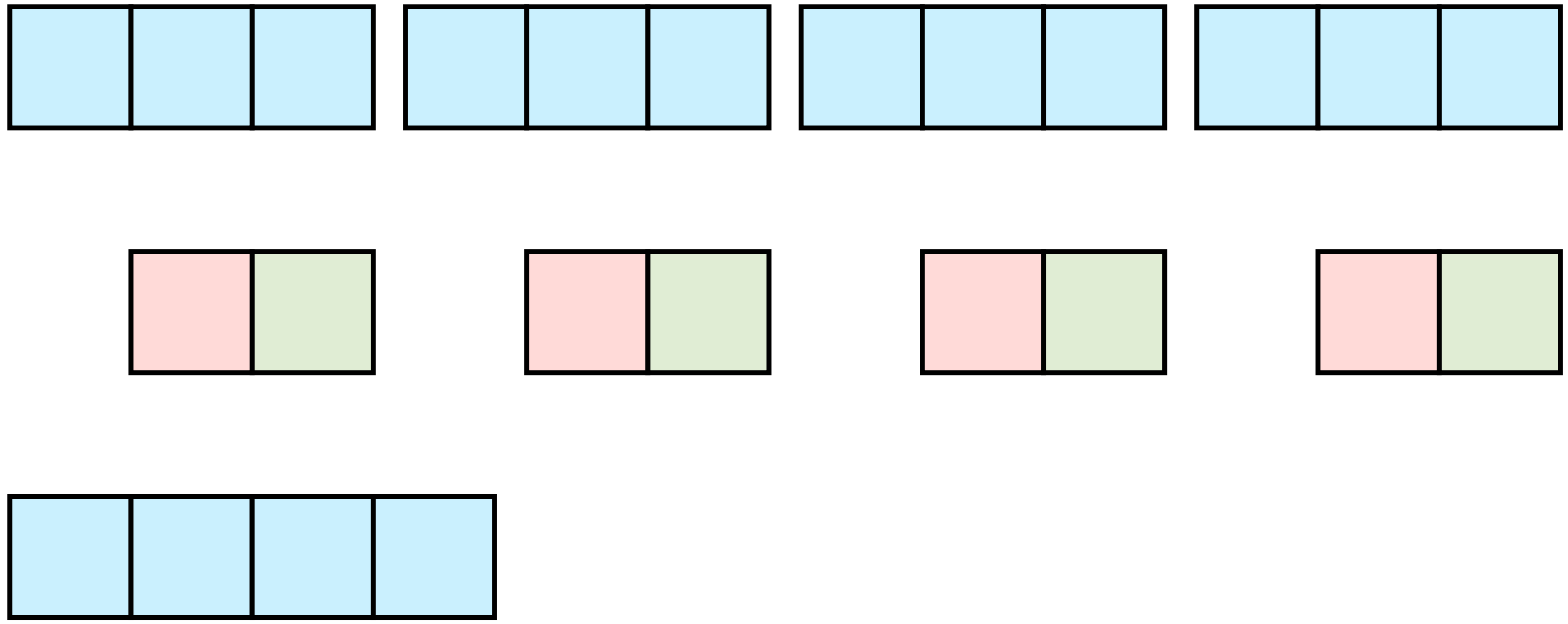
$$4 \times 3 \;\; = +3 + 3 + 3 + 3$$



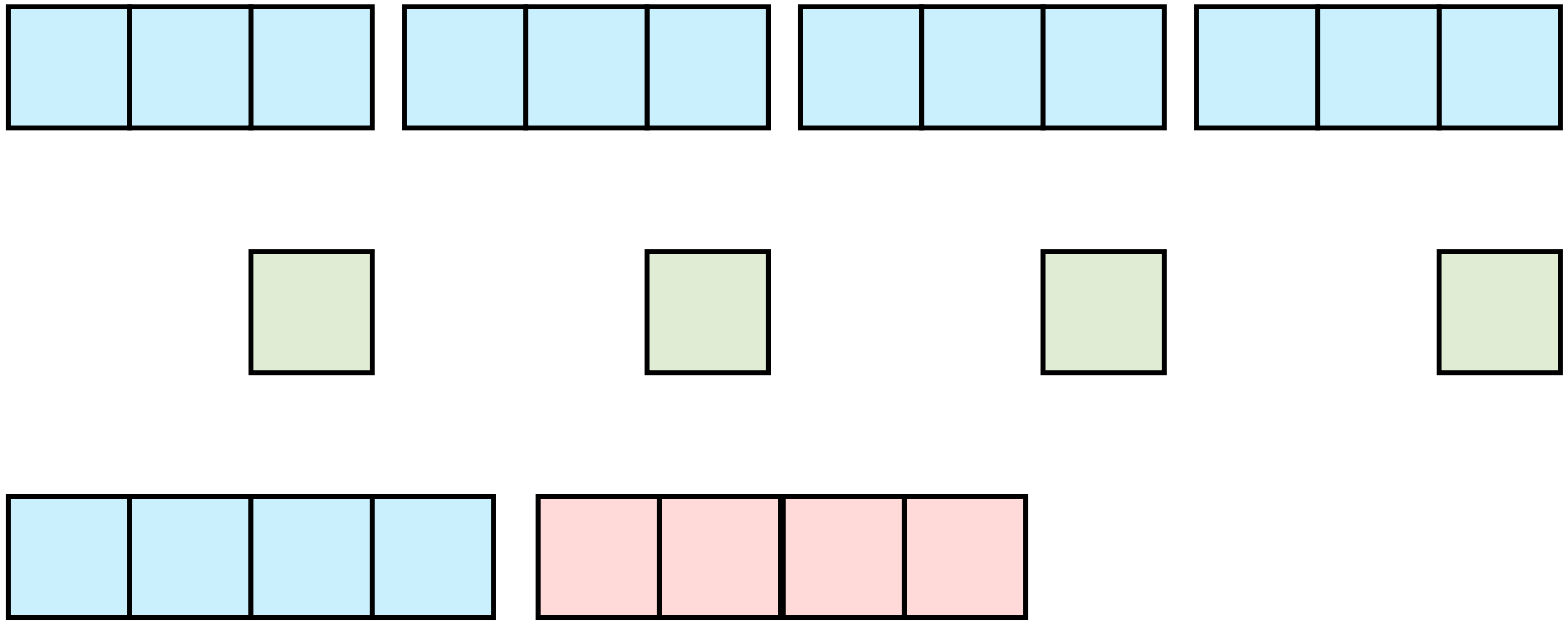
$$4 \times 3 \quad = +3 + 3 + 3 + 3$$



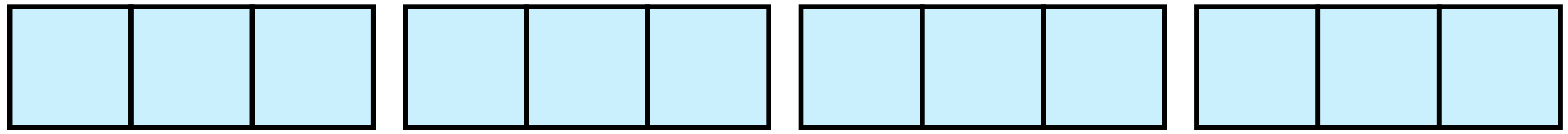
$$4 \times 3 \quad = +3 + 3 + 3 + 3$$



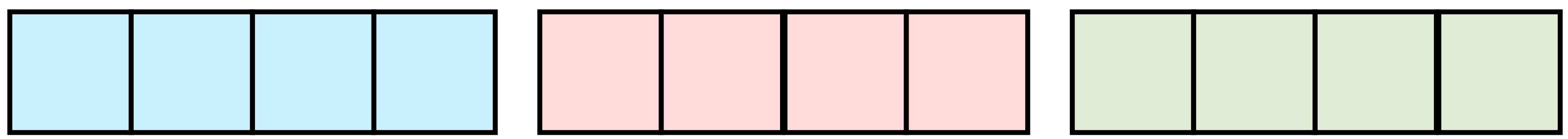
$$4 \times 3 \quad = +3 + 3 + 3 + 3$$



$$4 \times 3 \quad = +3 + 3 + 3 + 3$$



$$4 \times 3 = 3 \times 4$$

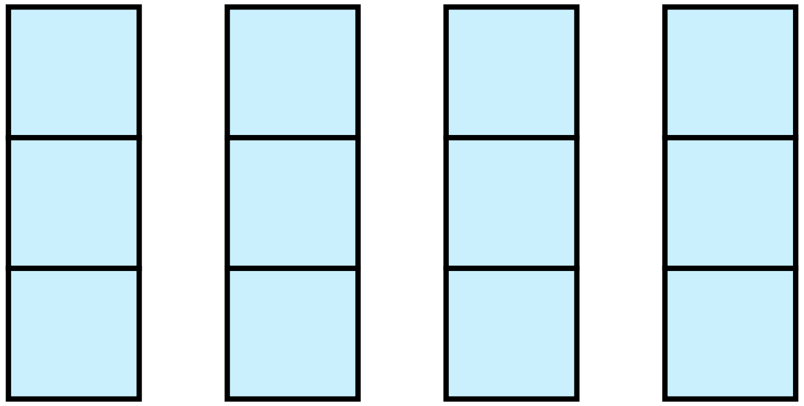


On a que la multiplication est commutative.

$$a \times b = b \times a$$

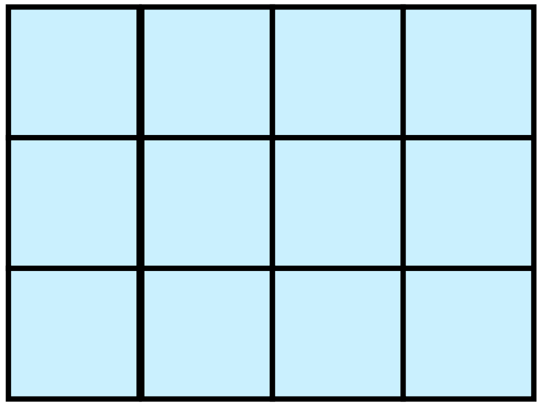
C'est parfois plus simple si on place plutôt les carrés comme suit

$$4 \times 3 \quad = +3 + 3 + 3 + 3$$



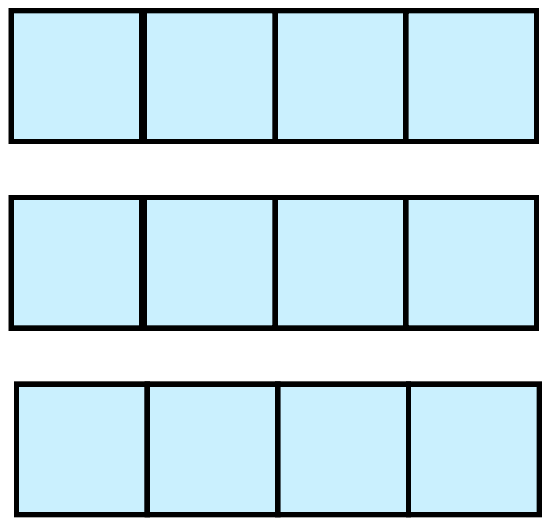
C'est parfois plus simple si on place plutôt les carrés comme suit

$$4 \times 3 \quad = +3 + 3 + 3 + 3$$



C'est parfois plus simple si on place plutôt les carrés comme suit

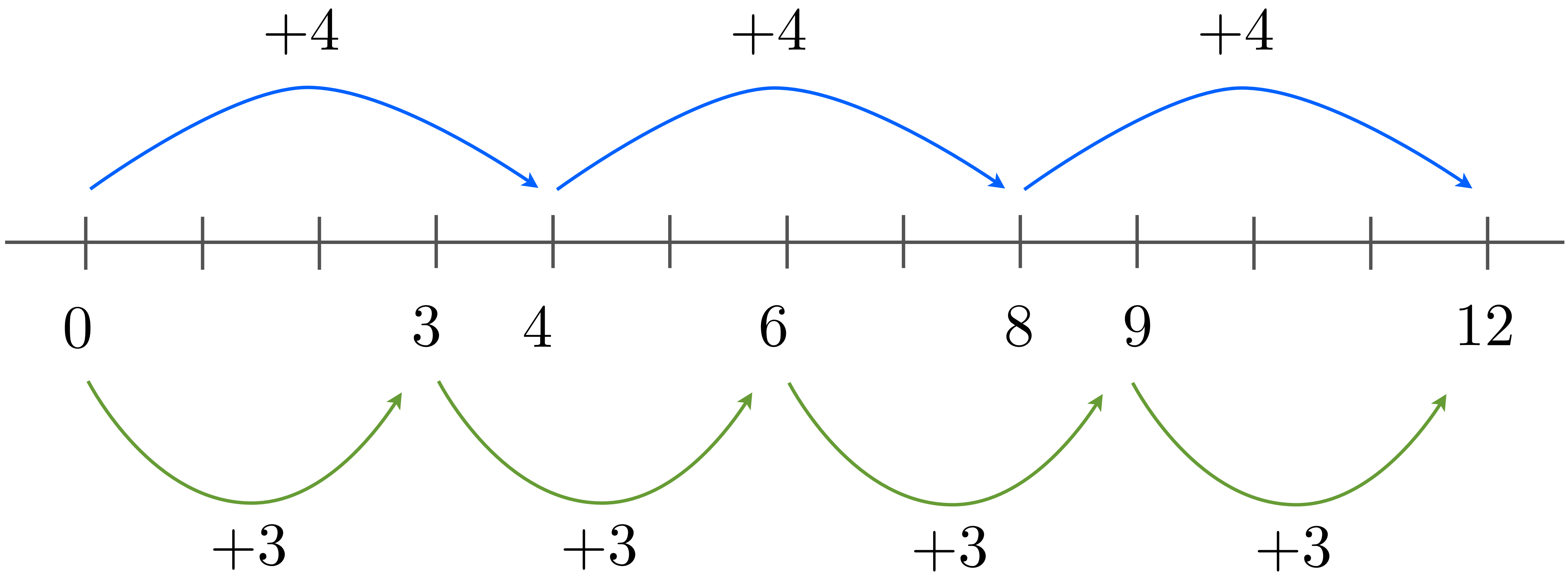
$$4 \times 3 \quad = +3 + 3 + 3 + 3$$



$$= 3 \times 4 \;\; = +4 + 4 + 4$$

On peut aussi voir la multiplication en terme de bond

3×4



4×3

Comment gérer plus d'une multiplication?

$$2 \times 3 \times 4$$

Est-ce que ça veut dire 2 paquets de 3 paquets de 4

$$2 \times (3 \times 4)$$

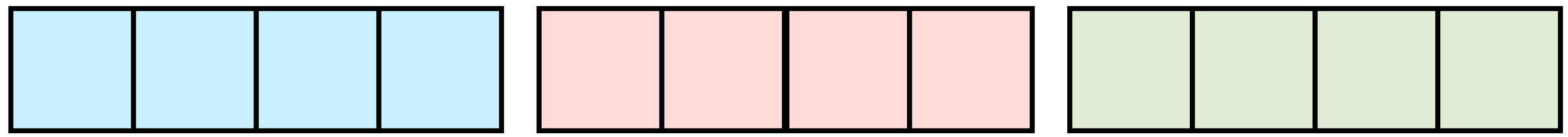
ou bien 2 paquets de 3 de paquets de 4

$$(2 \times 3) \times 4$$

Dans un cas comme dans l'autre, on doit faire une multiplication à la fois

$$2 \times (3 \times 4)$$

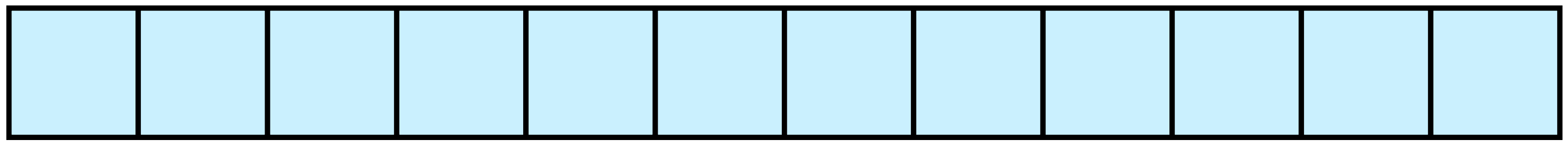
$$3 \times 4 = 12$$



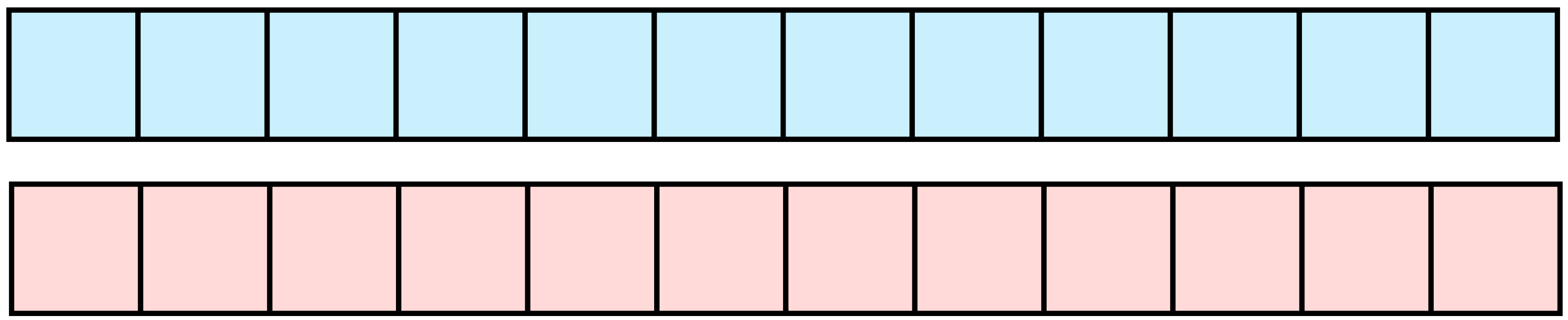
$$(2 \times 3) \times 4$$

$2 \times (3 \times 4)$

$3 \times 4 = 12$

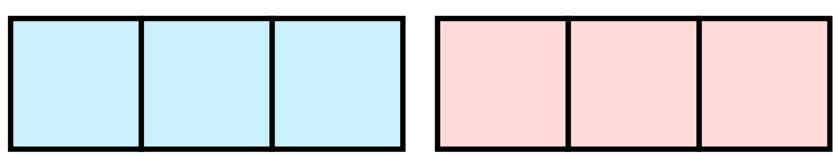


$2 \times 12 = 24$



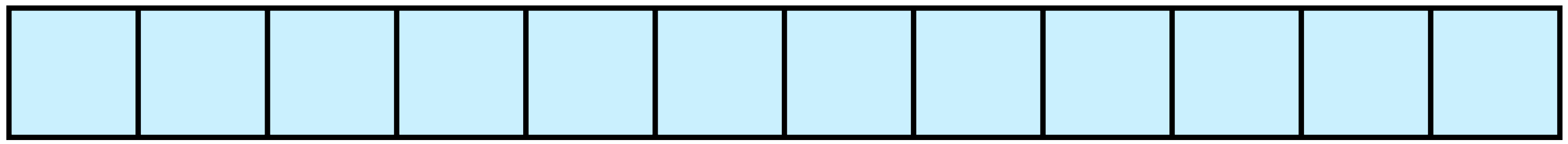
$(2 \times 3) \times 4$

$2 \times 3 = 6$

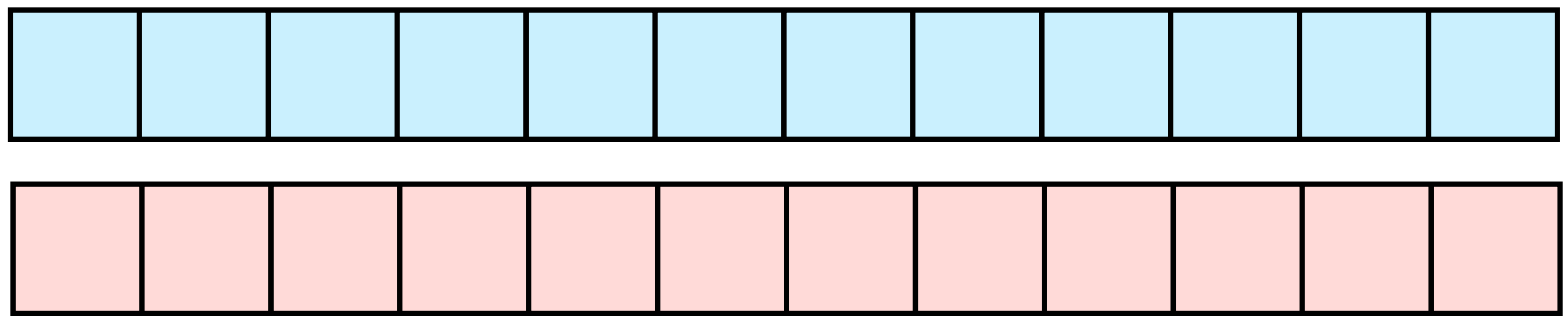


$2 \times (3 \times 4)$

$3 \times 4 = 12$

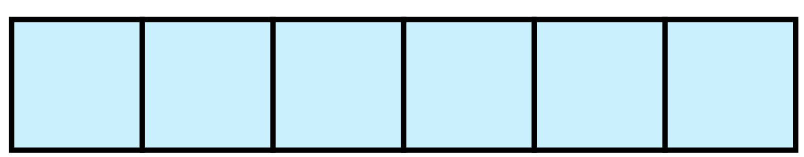


$2 \times 12 = 24$

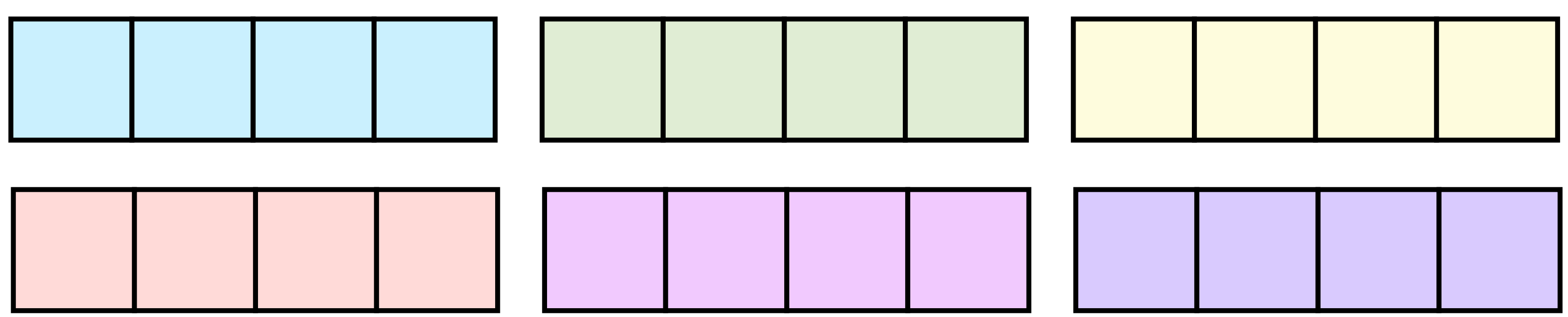


$(2 \times 3) \times 4$

$2 \times 3 = 6$



$6 \times 4 = 24$



La multiplication est associative

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

C'est pour cette raison qu'on n'a pas besoin de mettre les ( )

$$a \times b \times c \quad = abc$$

Lorsqu'on mélange l'addition et la multiplication

$$(5+3)\times 2 \quad = 8\times 2 \; = 16$$

$$5+(3\times 2) \;\; = 5+6 \;\; = 11$$

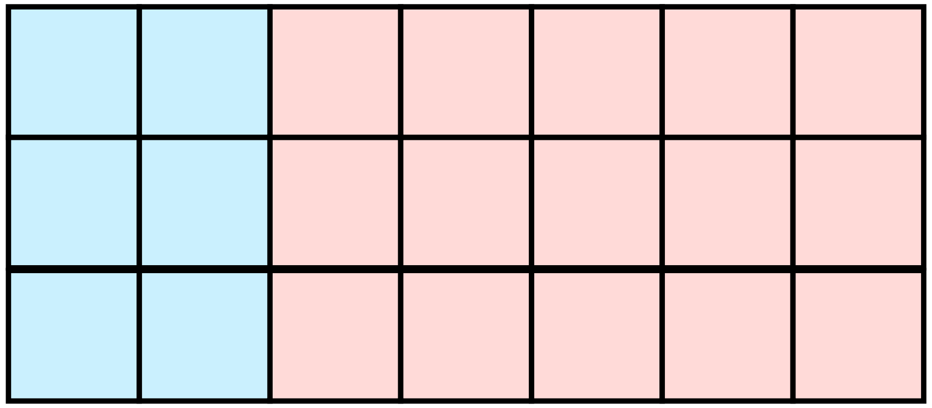
Ici l'ordre dans laquelle on fait les opérations a une importance

Les parenthèses seraient donc nécessaires.

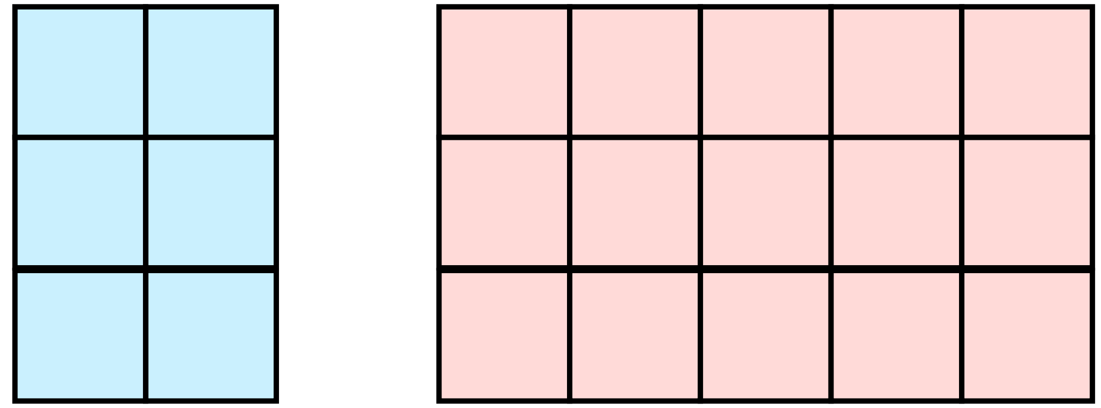
Or, pour alléger l'écriture, on a fixé la convention qu'on fait les multiplications avant les additions.

$$5+3\times 2 \; = 5+(3\times 2)$$

$$(2 + 5) \times 3$$



$(2+5)\times 3$



$$= 2\times 3 + 5\times 3$$

Cette propriété se nomme la distributivité.

$$(a+b)c = ac + bc$$

$$a(b+c) = ab + ac$$

En fait c'est peut-être sans le savoir que vous utilisez la distributivité lorsque vous multipliez.

$$\begin{array}{r} \overset{2}{5}3 \\ \times\quad 7 \\ \hline 371 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 7 \times 53 &= 7 \times (50 + 3) \\ &= 7 \times 50 + 7 \times 3 \\ &= 7 \times 5 \times 10 + 7 \times 3 \\ &= 35 \times 10 + 21 \\ &= 35 \times 10 + 2 \times 10 + 1 \\ &= (35 + 2) \times 10 + 1 \\ &= 37 \times 10 + 1 \end{aligned}$$

En fait c'est peut-être sans le savoir que vous utilisez la distributivité lorsque vous multipliez.

$$31 \times 23 = (30 + 1) \times 23$$

$$= 3 \times 23 \times 10 + 1 \times 23$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times \quad 31 \\ \hline 23 \\ + \, {}^{1}690 \\ \hline 713 \end{array}$$

On n'a donc qu'à connaître les multiplications des nombres plus petits que 10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

On n'a donc qu'à connaître les multiplications des nombres plus petits que 10.

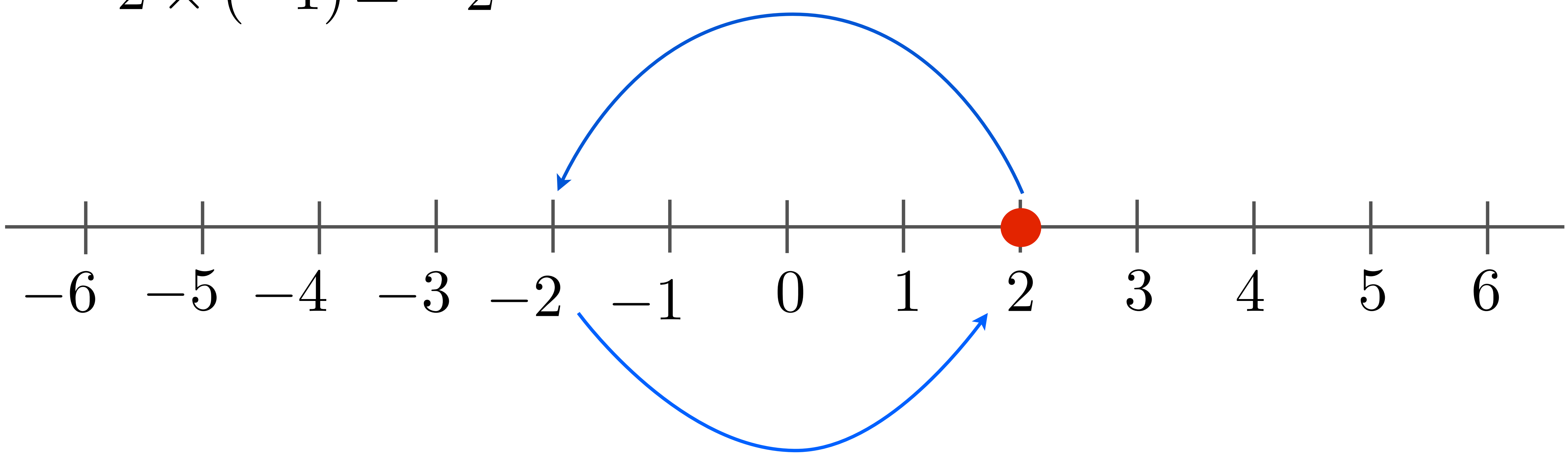
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		4	6	8	10	12	14	16	18
3			9	12	15	18	21	24	27
4				16	20	24	28	32	36
5					25	30	35	40	45
6						36	42	48	54
7							49	56	63
8								64	72
9									81

Multiplication par un négatif

La multiplication par -1

a pour effet de faire une rotation de $180°$

$2 \times (-1) = -2$



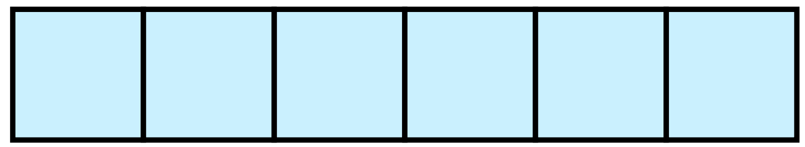
$2 \times (-1) \times (-1) = 2$

$(-1) \times (-1) = (-1)^2 = 1$

faire une rotation de $360°$

Division

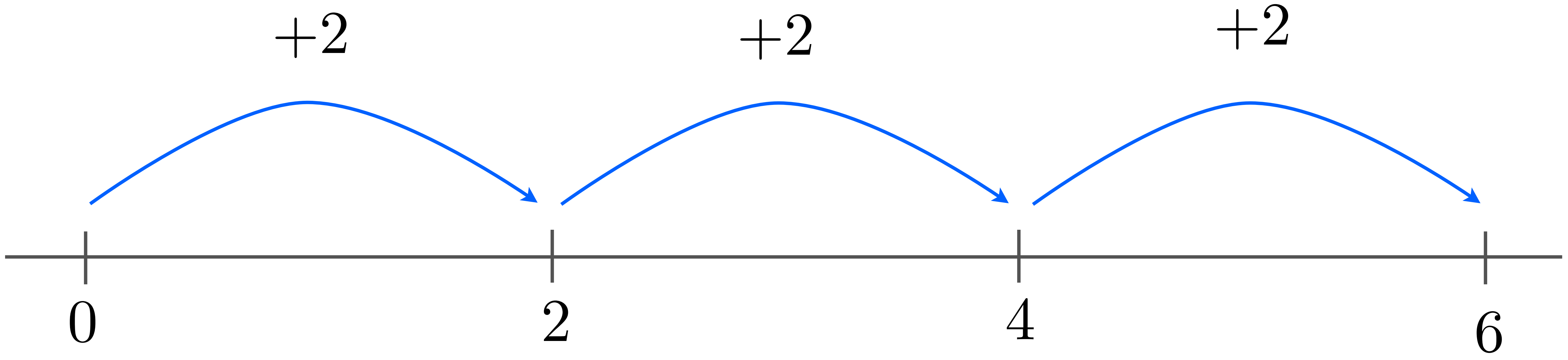
$6 \div 2$



Division

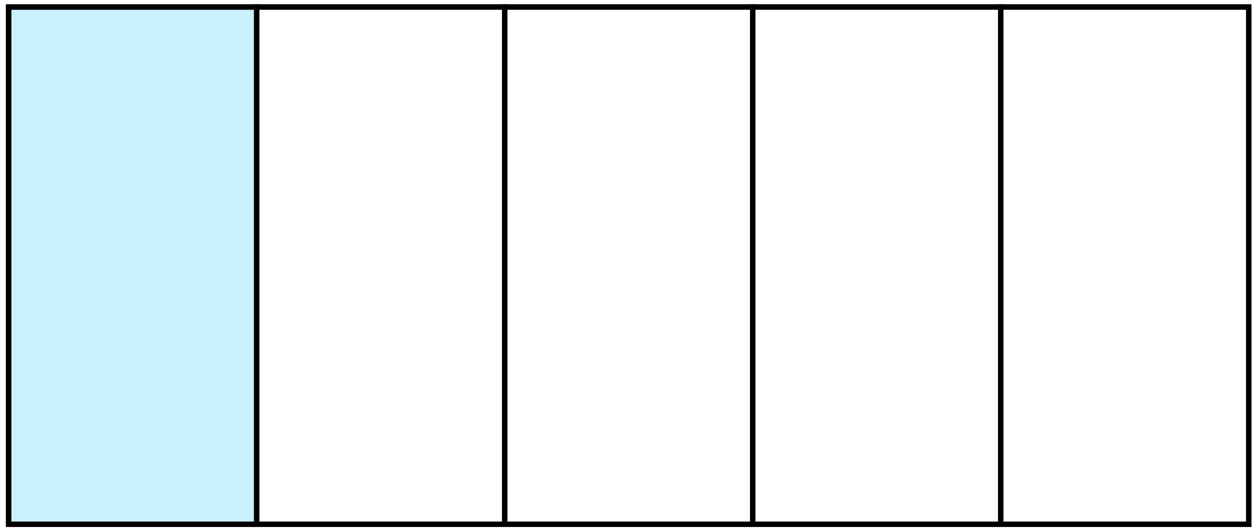
$6 \div 2 = 3$

$6 \div 2 = 3$



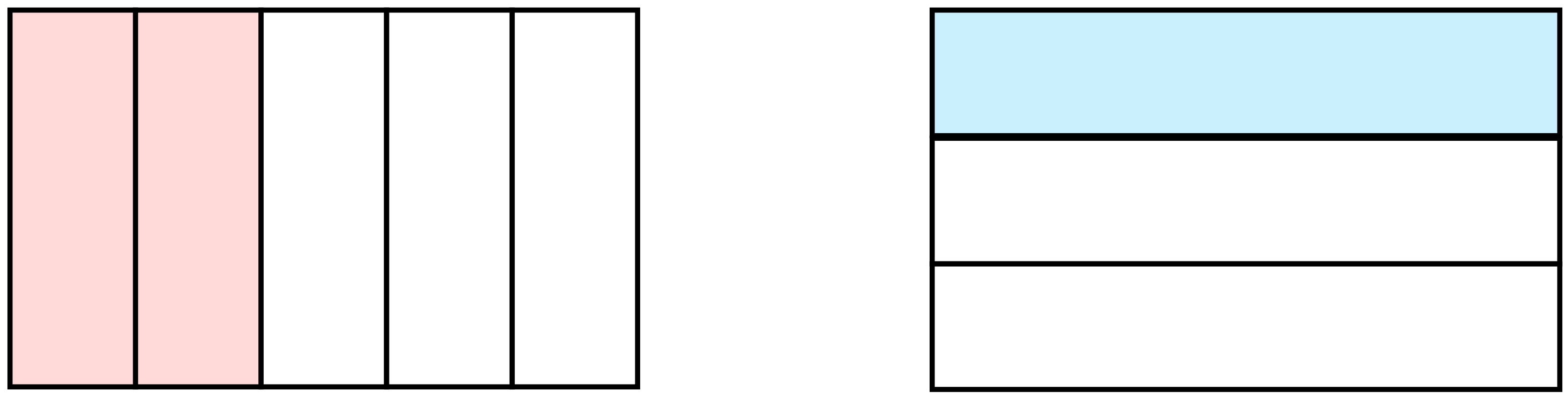
Parler de division nous amène à parler de fraction

$$\frac{1}{5} = 1 \div 5$$

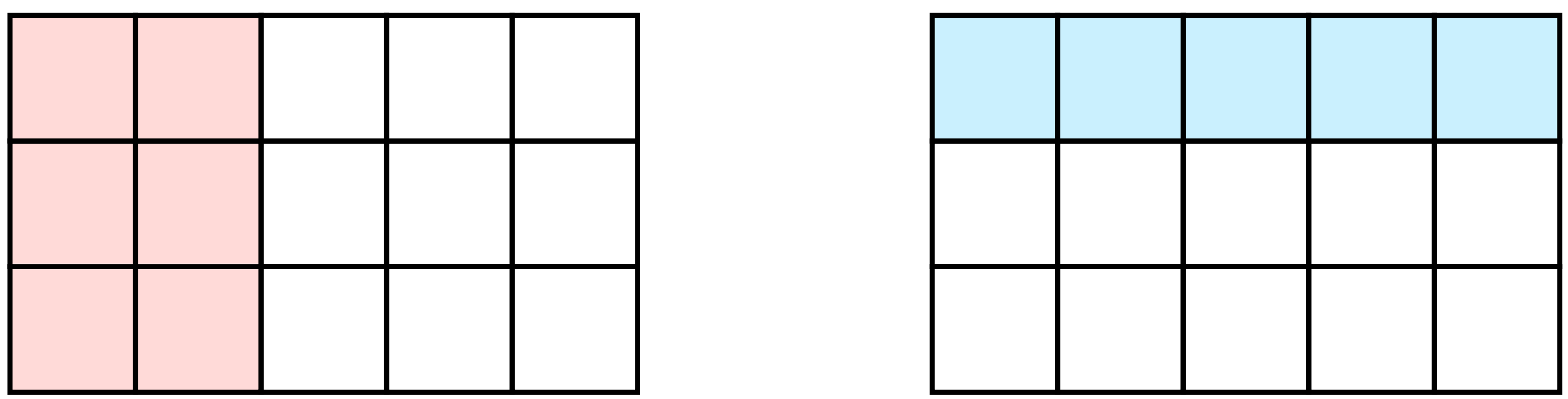


Addition de fractions

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$$

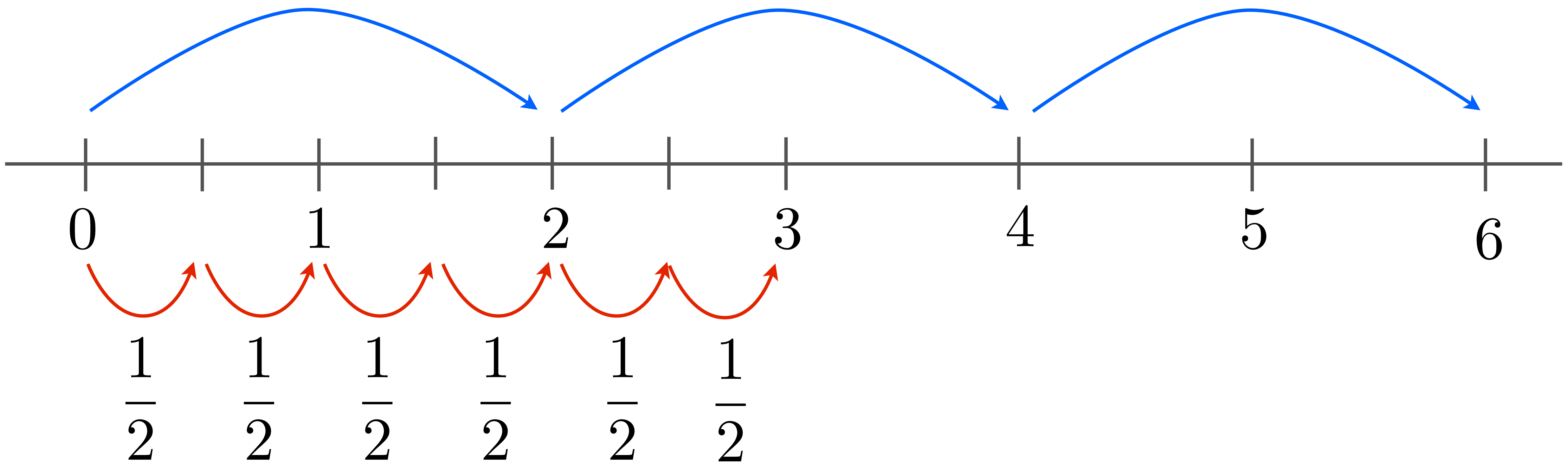


$$= \frac{6}{15} + \frac{5}{15}$$



$$= \frac{11}{15}$$

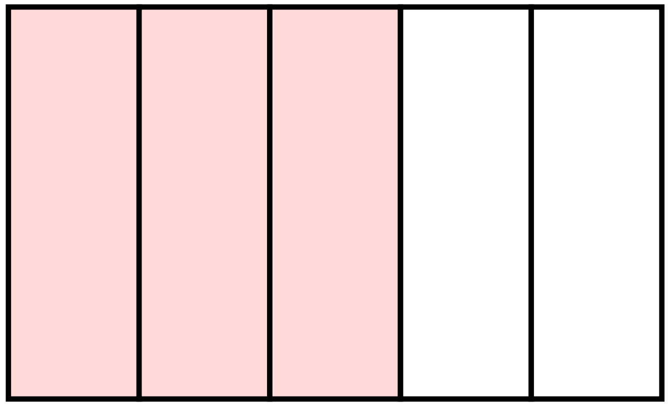
$$6 \div 2 = 3$$

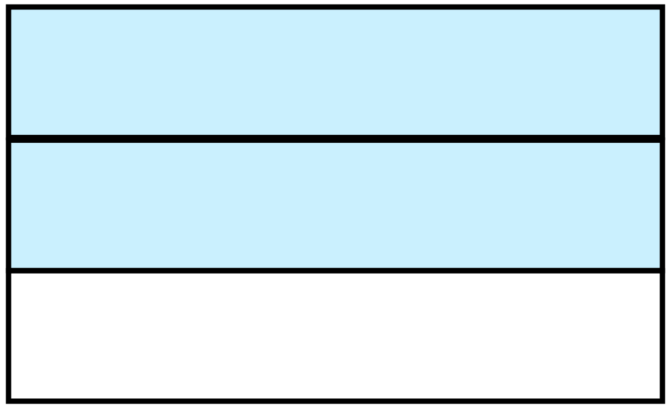


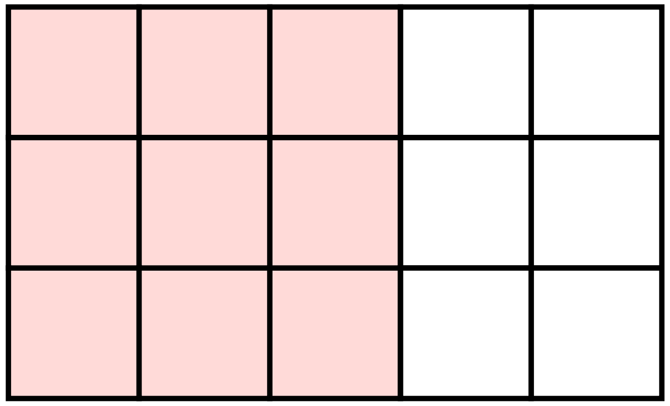
$$6 \times \frac{1}{2} = 3$$

Multiplication de fractions

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$$

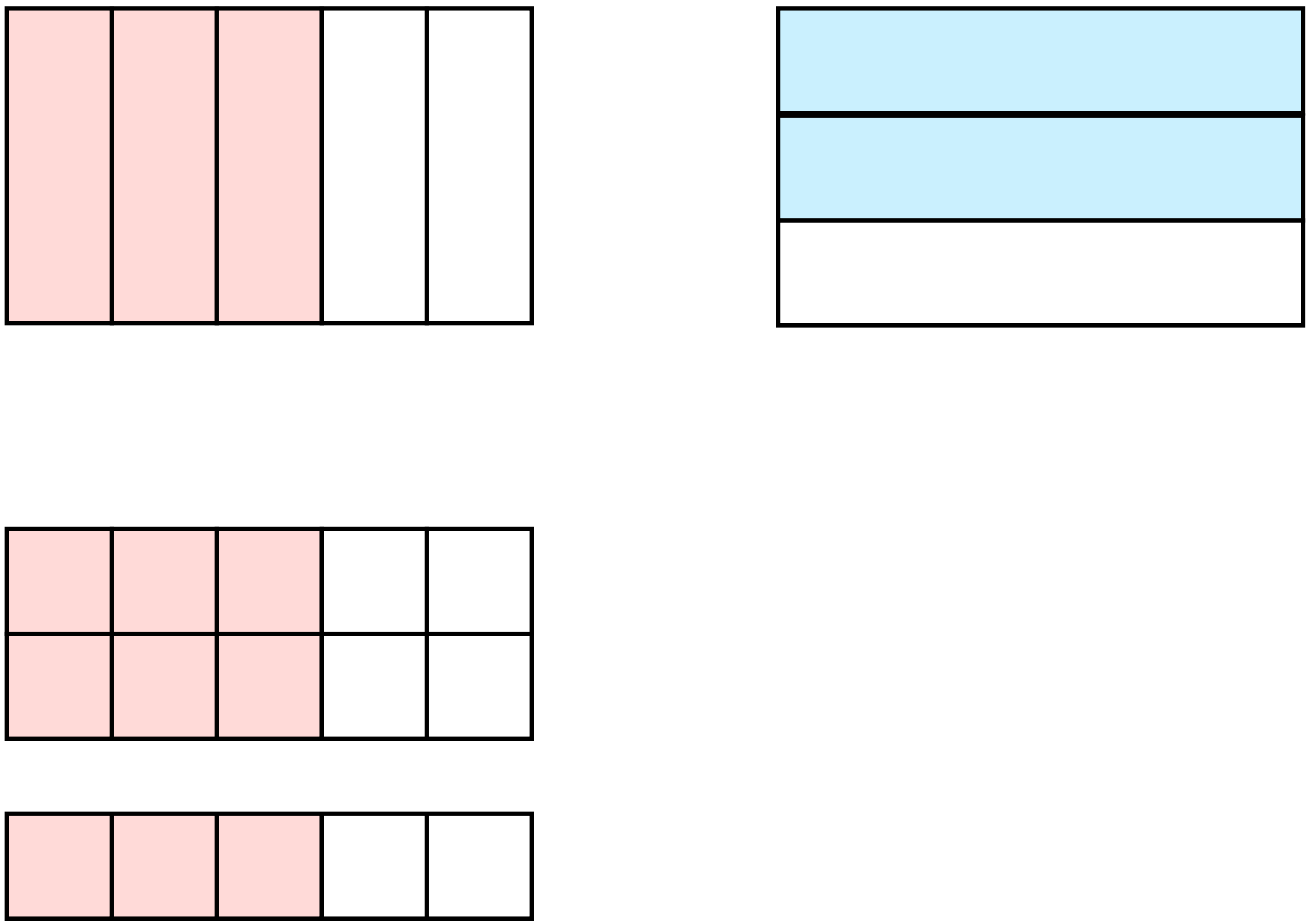






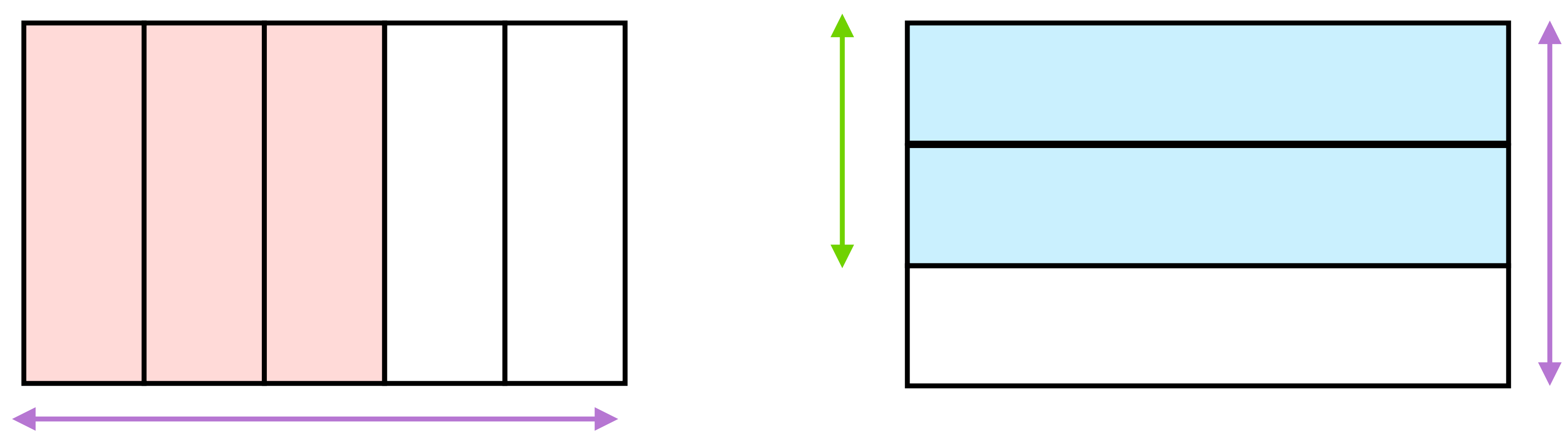
Multiplication de fractions

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$$

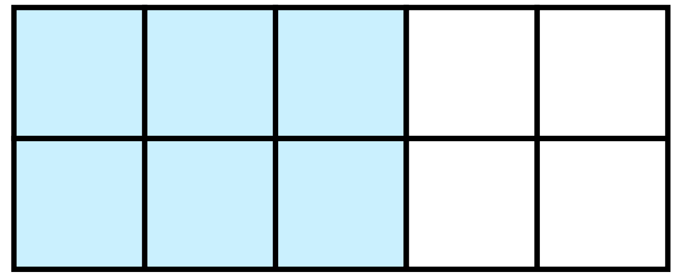


Multiplication de fractions

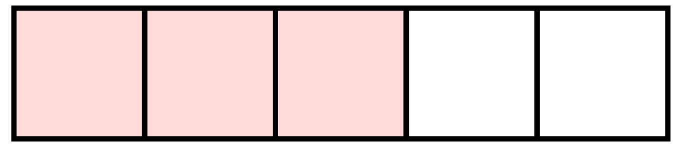
$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$$



$$= \frac{6}{15}$$

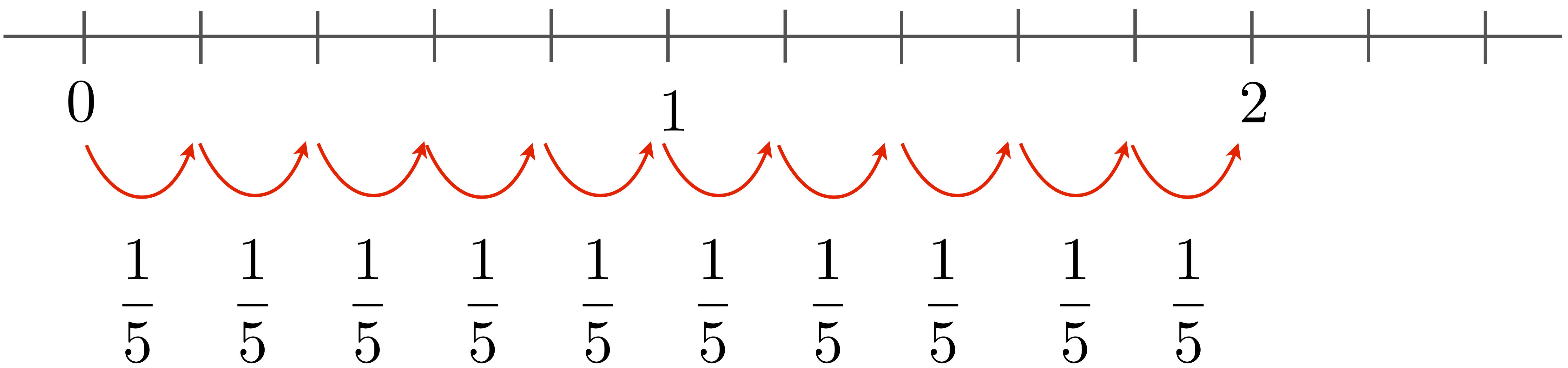


$$= \frac{3 \times 2}{5 \times 3}$$

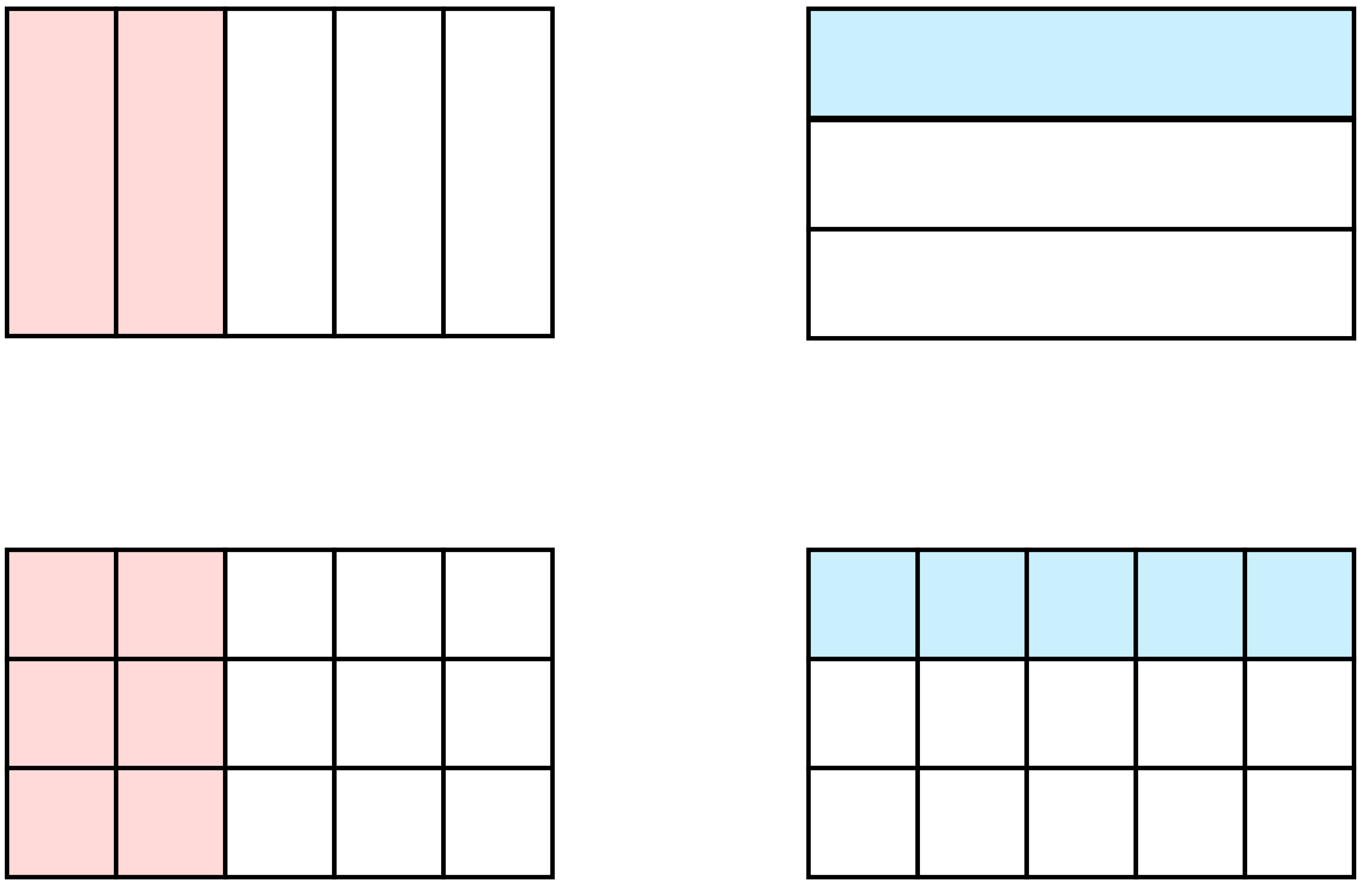


Division de fractions

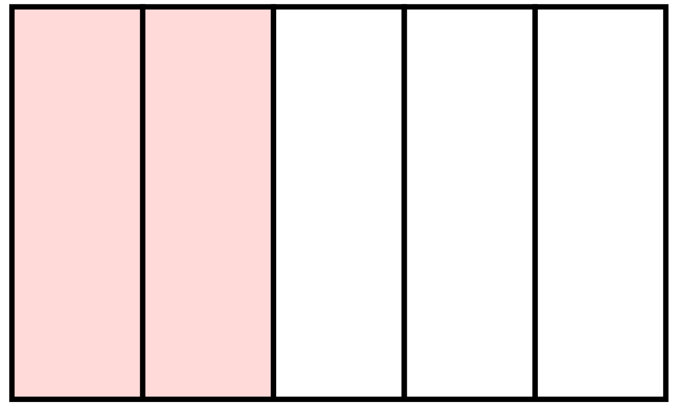
$$2 \div \frac{1}{5} = 10 = 2 \times \frac{5}{1}$$

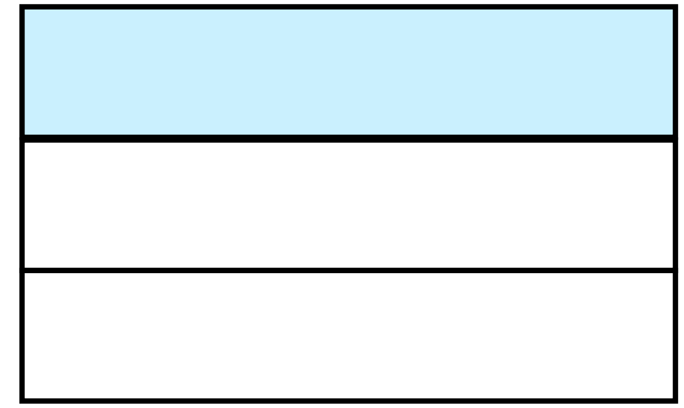


$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$$

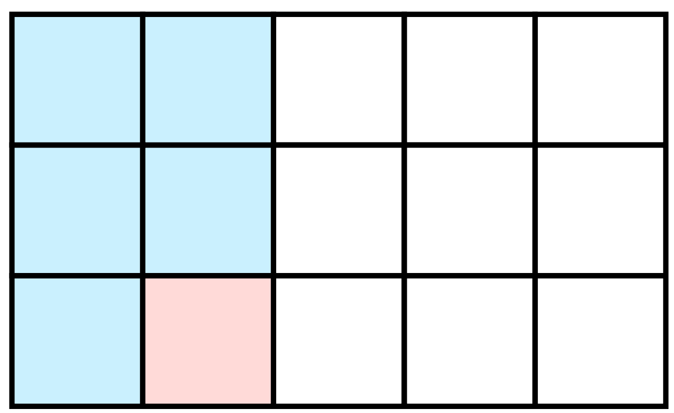


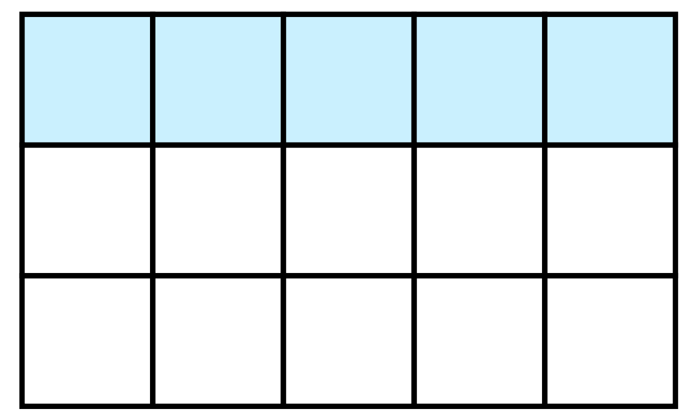
$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$$





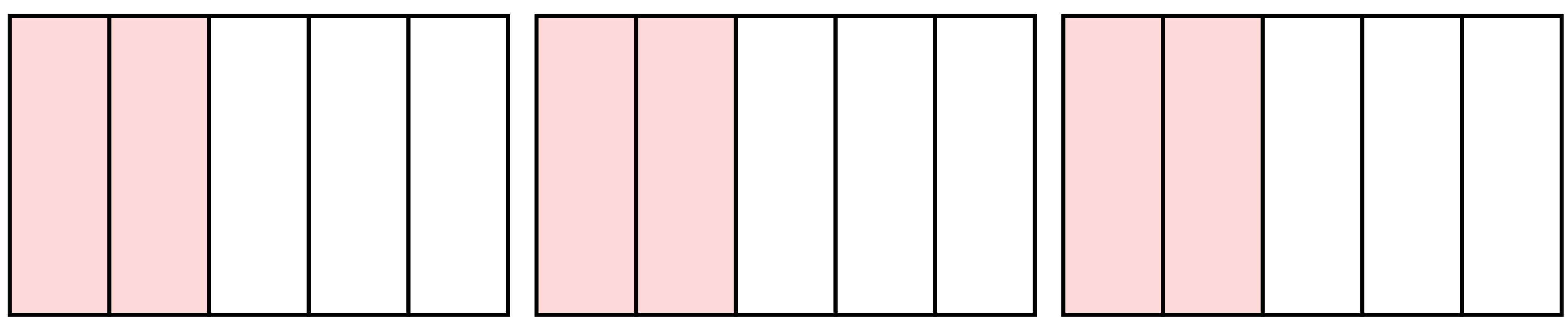
$$= 1\frac{1}{5}$$



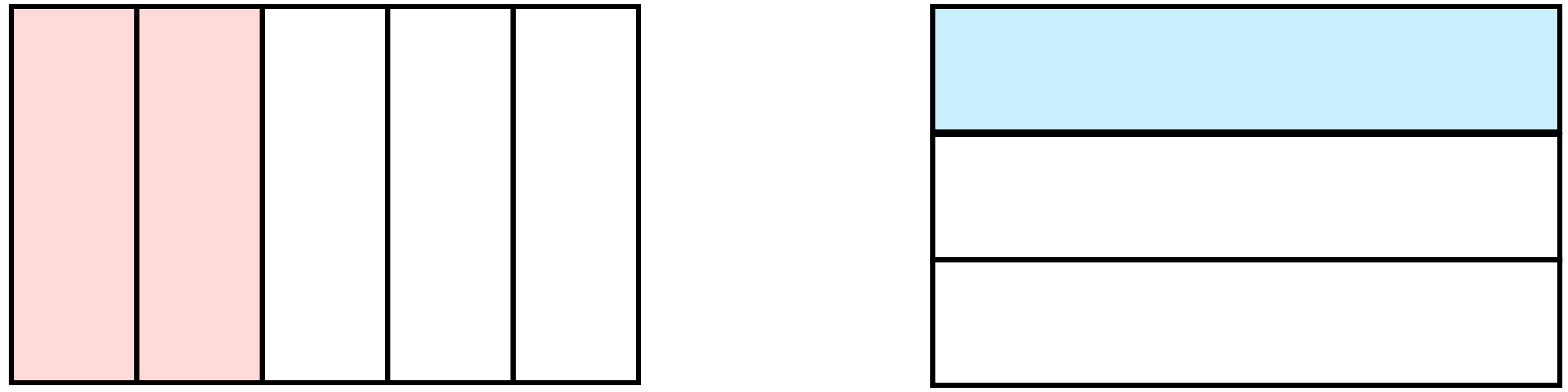


$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{1} \quad = \frac{2}{5} \times 3$$

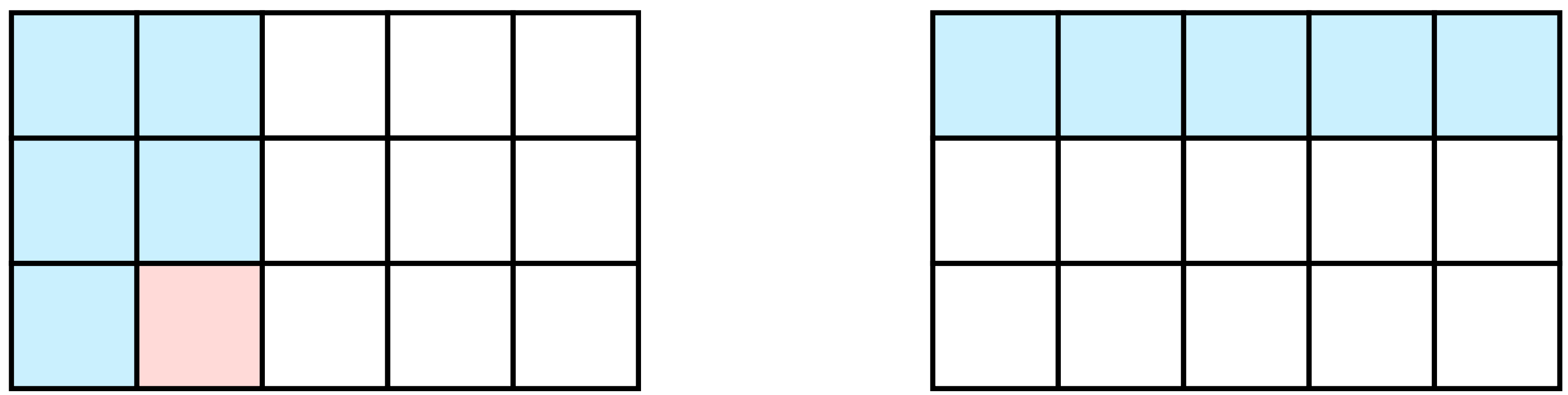
$$= \frac{6}{5}$$



$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$$

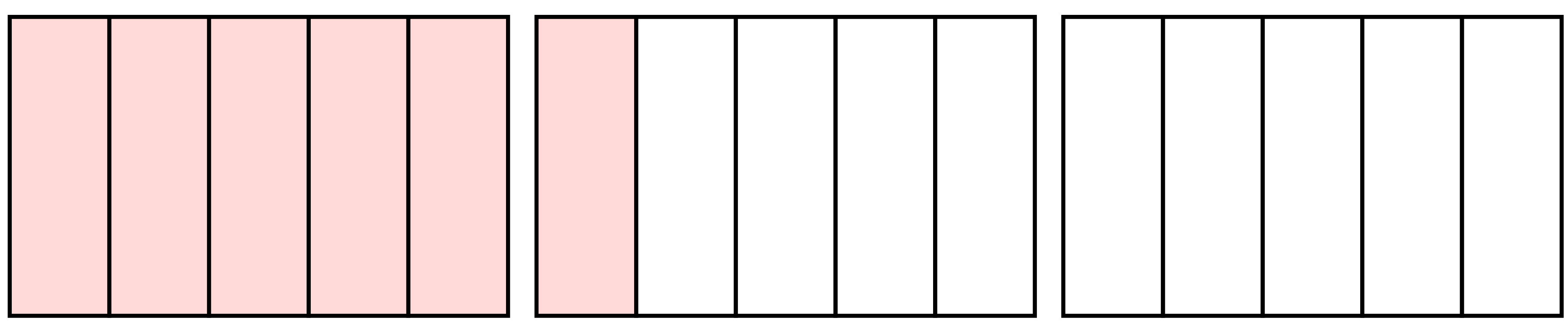


$$= 1\frac{1}{5}$$



$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{1} \quad = \frac{2}{5} \times 3$$

$$= \frac{6}{5}$$



Lorsqu'on a des fractions, les barres de division font office de parenthèses.

$$\frac{4}{3+2\times 5} = 4 \div (3+2\times 5) = 4 \div (3+10) = 4 \div 13$$

$$= \frac{4}{3+10} = \frac{4}{13}$$

Attention!

Danger!

La division n'est pas distributive sur la somme

$$4 \div (3 + 10) \neq 4 \div 3 + 4 \div 10$$

$$\frac{4}{13} = \frac{4}{3+10} \neq \frac{4}{3} + \frac{4}{10} = \frac{40}{30} + \frac{12}{30} = \frac{52}{30}$$

De manière générale, si vous doutez d'une règle, testez-la avec des nombres simples.

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1} = 4$$

Donc NON!

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Opération sur les fractions

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 + \frac{c}{d} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Propriétés des opérations

Commutativité

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Associativité

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivité

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Devoir: # 1 à 5