

# 2.2 DIVISION POLYNOMIALE

cours 14

Avant de regarder la division polynomiale, regardons la division de deux monômes.

Exemple

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

Exemple

$$\frac{13x^3}{4x^2} = \frac{13}{4}x^{3-2} = \frac{13}{4}x$$

Exemple

$$\frac{17x^3}{11x^7} = \frac{17}{11}x^{3-7} = \frac{17}{11}x^{-4} = \frac{17}{11x^4}$$

Remarque:

Pour que le résultat soit un polynôme, il faut que le degré du dénominateur soit plus petit ou égal à celui du numérateur.

De même, on peut diviser un polynôme par un monôme.

Exemple

$$\frac{4x^5 + 6x^3 - 5x^2 + x - 7}{2x^2}$$

$$= \frac{4x^5}{2x^2} + \frac{6x^3}{2x^2} - \frac{5x^2}{2x^2} + \frac{x}{2x^2} - \frac{7}{2x^2}$$

$$= 2x^3 + 3x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{7}{2x^2}$$

$$= 2x^3 + 3x - \frac{5}{2} + \frac{x - 7}{2x^2}$$

On nomme la partie qui n'a pas pu être divisée, le reste de la division

Example

$$\frac{4x^5 + 6x^3 - 5x^2 + x - 7}{2x^2} = 2x^3 + 3x - \frac{5}{2} + \frac{x - 7}{2x^2}$$

$$\left( \frac{4x^2 + 6x^3 - 5x^2 + x - 7}{2x^2} \right) \cancel{2x^2} = \left( 2x^3 + 3x - \frac{5}{2} + \frac{x - 7}{2x^2} \right) 2x^2$$

$$4x^2 + 6x^3 - 5x^2 + x - 7 = \left( 2x^3 + 3x - \frac{5}{2} \right) 2x^2 + \left( \frac{x - 7}{\cancel{2x^2}} \right) 2x^2$$

$$4x^2 + 6x^3 - 5x^2 + x - 7 = \left( 2x^3 + 3x - \frac{5}{2} \right) 2x^2 + (x - 7)$$

Cette écriture est semblable à ce qu'on a fait avec les nombres.

$$\frac{34}{5} = 6 + \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad 34 = 6 \times 5 + 4$$

Ici le reste était un nombre plus petit que ce par quoi on divisait.

Similairement, le reste d'une division polynomiale est un polynôme de degré inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.

Faites les exercices suivants

p.51 # 2.7

# Division polynomiale

La division polynomiale est très similaire à la division avec reste des entiers. Par contre on doit tenir compte que contrairement aux nombres, les polynômes ont souvent plus d'un terme.

Exemple

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = x + 4$$

$$\frac{x^2}{x} = x$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 4 \\ - x^2 + x \\ \hline 4x + 4 \\ - 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ \hline x + 4 \end{array}$$

$$x(x + 1) = x^2 + x$$

$$\frac{4x}{x} = 4$$

$$4(x + 1) = 4x + 4$$

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

# Exemple

$0x^2$

$$\begin{array}{r}
 5x^3 + 2x - 1 \\
 - \quad 5x^3 + 15x^2 \\
 \hline
 -15x^2 + 2x - 1 \\
 - \quad -15x^2 - 45x \\
 \hline
 \quad \quad 47x - 1 \\
 \quad \quad - \quad 47x + 141 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -142
 \end{array}$$

$$\frac{5x^3}{x} = 5x^2$$

$$\frac{-15x^2}{x} = -15x$$

$$\frac{47x}{x} = 47$$

$$5x^3 + 2x - 1 = (5x^2 - 15x + 47)(x + 3) - 142$$

Example

$$5x^3 + 2x - 1 = (5x^2 - 15x + 47)(x + 3) - 142$$

$$(5x^2 - 15x + 47)(x + 3) - 142$$

$$= x(5x^2 - 15x + 47) + 3(5x^2 - 15x + 47) - 142$$

$$= (5x^3 - 15x^2 + 47x) + (15x^2 - 45x + 141) - 142$$

$$= 5x^3 - 15x^2 + 15x^2 + 47x - 45x + 141 - 142$$

$$= 5x^3 + 2x - 1$$

# Exemple

$$\begin{array}{r} 7x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 9x + 3 \\ - 7x^5 + 7x^3 \\ \hline -11x^3 + 2x^2 - 9x + 3 \\ - -11x^3 - 11x \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} x^3 + x \\ \hline 7x^2 - 11 \end{array}$$

$$\deg(2x^2 + 2x + 3) < \deg(x^3 + x)$$

$$7x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 9x + 3 = (x^3 + x)(7x^2 - 11) + (2x^2 + 2x + 3)$$

Faites les exercices suivants

p.55 # 2.4

# Example

$$\begin{array}{r}
 2x^5 + 4x^3 - x + 6 \\
 - 2x^5 - \frac{2}{3}x^4 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{3x^2 - x} \\
 \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{38}{27}x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{2}{3}x^4 + 4x^3 - x + 6 \\
 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{9}x^3 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{38}{9}x^3 - x + 6 \\
 - \frac{38}{9}x^3 - \frac{38}{27}x^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{38}{9}x^3 - x + 6 \\
 - \frac{38}{9}x^3 - \frac{38}{27}x^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{38}{9}x^3 - x + 6 \\
 - \frac{38}{9}x^3 - \frac{38}{27}x^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\frac{38}{27}x^2 - x + 6$$

$$\frac{2x^5}{3x^2} = \frac{2}{3}x^3$$

$$\frac{\frac{2}{3}x^4}{3x^2} = \frac{2}{9}x^2$$

$$\frac{\frac{38}{9}x^3}{3x^2} = \frac{38}{27}x$$

$$\frac{\frac{38}{27}x^2}{3x^2} = \frac{38}{81}$$

# Example

$$2x^5 + 4x^3 - x + 6$$

$$\begin{array}{r} \overline{3x^2 - x} \\ \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{38}{27}x + \frac{38}{81} \end{array}$$

$$\frac{38}{27}x^2 - x + 6$$

$$- \frac{38}{27}x^2 - \frac{38}{81}x$$

---

$$-\frac{43}{81}x + 6$$

$$\frac{\frac{38}{27}x^2}{3x^2} = \frac{38}{81}$$

Devoir:

p.58 # 15