2.2 ÉQUATIONS QUADRATIQUES

cours 17

Définition

Une équation est dite quadratique si l'un des côtés de l'équation est un polynôme de degré 2 et l'autre est de degré 2 ou moins.

Exemple

$$2x^2 + 3x - 5 = x$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$7x^2 - 3x + 17 = -14x^2 + 3x - 1$$

$$5x^2 - 3xy + 8y^2 = 4$$

sont des équations quadratiques.

Avant d'essayer de résoudre une équation quadratique quelconque, regardons de plus près l'opération inverse de mettre au carré, c'est-à-dire prendre la racine carrée.

$$2^2 = 4 \qquad\qquad (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

Donc si on se pose la question:

Quel nombre mis au carré donne 4?

et bien il y a deux réponses

$$2 \quad \text{et} \quad -2$$

Mais la racine carrée est la valeur positive.

$$\sqrt{4} = 2$$

Pour isoler x dans cette équation, on doit effectuer la même opération de chaque côté de l'équation.

$$x^2 = a$$

Et cette opération est la racine carré.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{x^2} \stackrel{?}{=} x \qquad \text{non!}$$

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{a} = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Si $\quad x \geq 0 \qquad x = \sqrt{a}$

si $\quad x < 0 \qquad -x = \sqrt{a} \iff x = -\sqrt{a}$

Donc

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Exemple

$$3x^2 = 7 \iff x^2 = \frac{7}{3}$$

$$\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\iff x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Exemple

$$x^2 + 5 = 3x^2 + 13$$

$$\iff 5 - 13 = 3x^2 - x^2$$

$$\iff -8 = 2x^2$$

$$\iff x^2 = -4 \quad \text{impossible}$$

Faites les exercices suivants

p. 119 Ex.4.7

Étant donné une équation quadratique à une variable

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

on peut toujours obtenir une équation équivalente de la forme:

$$a_1x^2 - a_2x^2 + b_1x - b_2x + c_1 - c_2 = 0$$

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donc savoir résoudre cette forme d'équation nous permet de résoudre n'importe quelle équation quadratique.

Commençons par essayer de résoudre

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et en isolant x.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\implies ax^2 = -bx - c$$

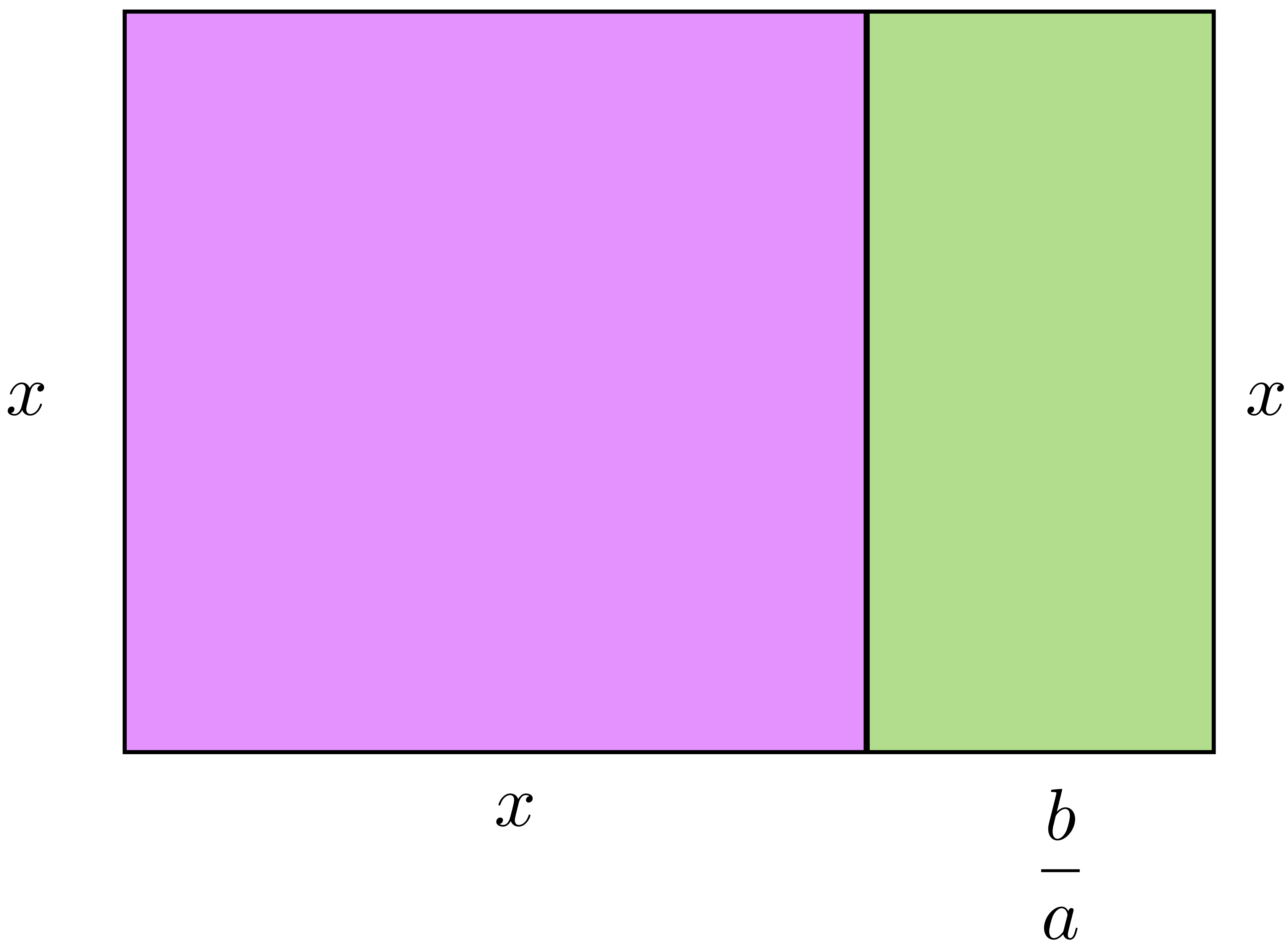
$$\implies x^2 = \frac{-bx - c}{a}$$

$$\implies x = \pm\sqrt{\frac{-bx - c}{a}}$$

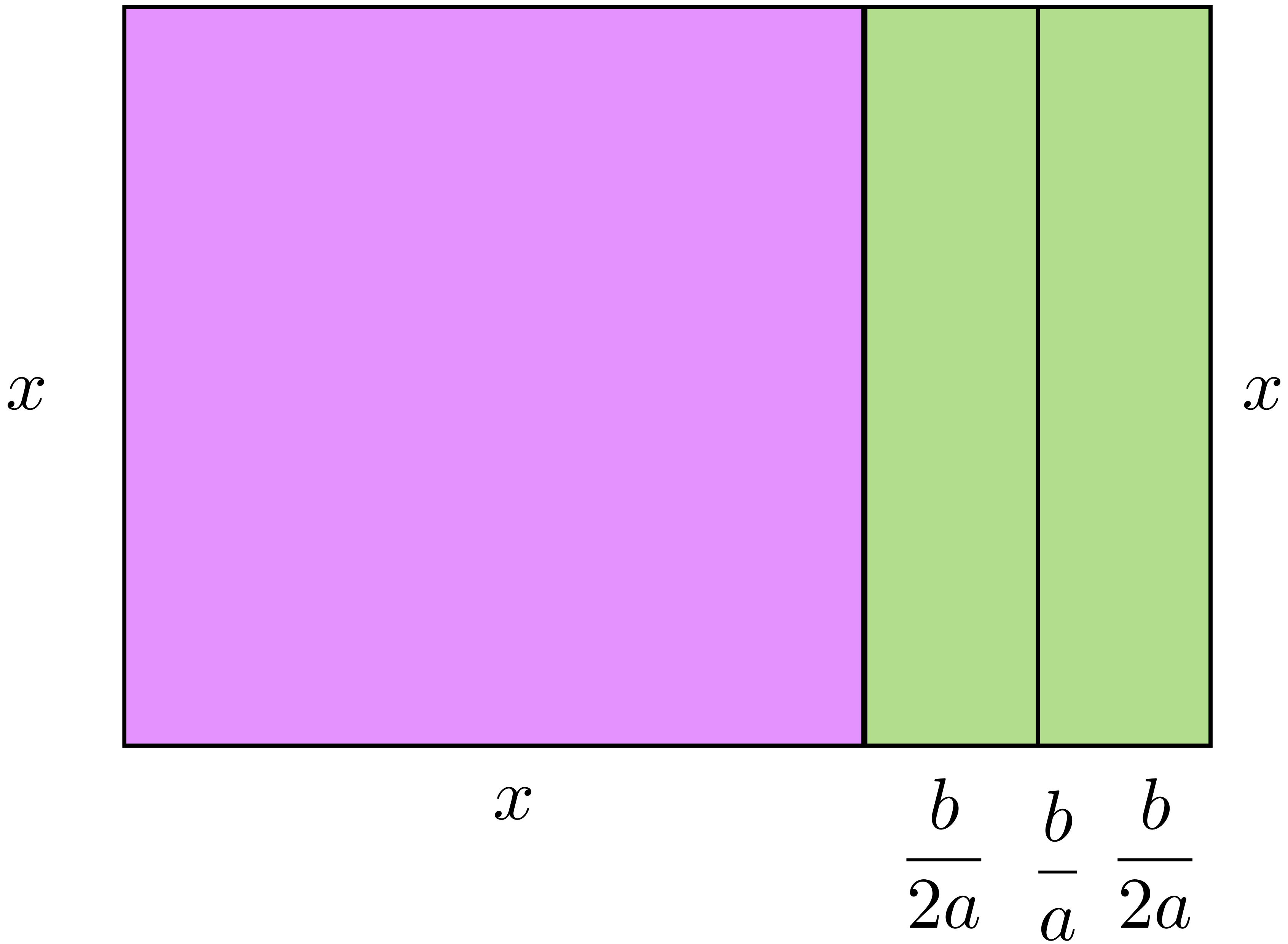
Ce terme nous empêche d'isoler x

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

On aimerait bien trouver une manière d'englober le terme bx dans un carré



$$\boxed{ax^2 + bx} + c = a\left(\boxed{x^2} + \boxed{\frac{b}{a}x}\right) + c$$

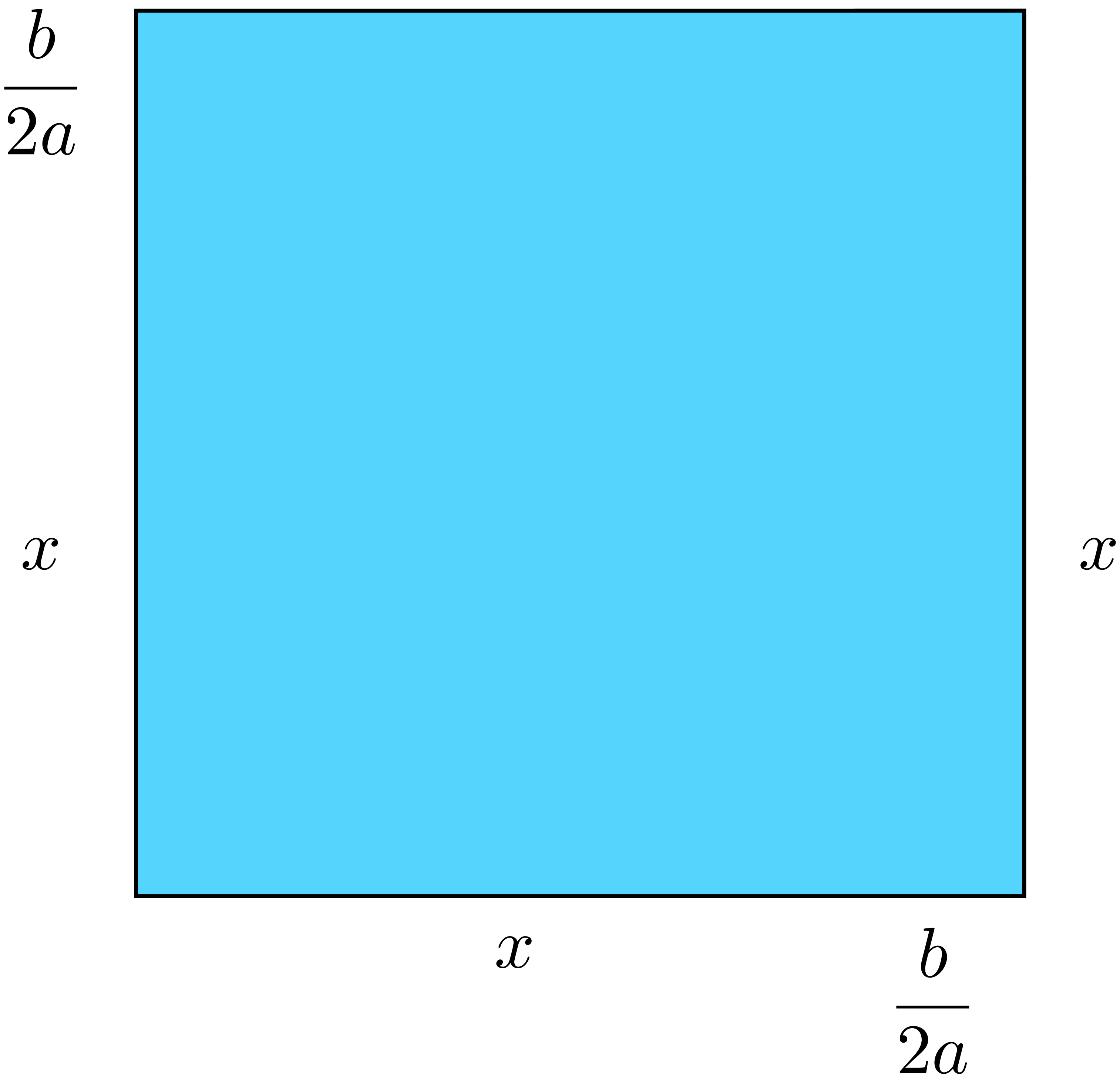


$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$



$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\Longrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple

$$2x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 2(-7)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 14}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 56}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{72}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{36 \times 2}}{4} = -1 \pm \frac{6\sqrt{2}}{4}$$

$$= -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Exemple $$8x^2 + 3x - 5 = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\iff 8x^2 - 3x^2 + 3x + 4x - 5 - 1 = 0$$

$$\iff 5x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 5 \times (-6)}}{10} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{10}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{10} = \frac{-7 \pm 13}{10}$$

$$x = \frac{-7 + 13}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad x = \frac{-7 - 13}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

Remarque:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lors de la résolution d'une quadratique, il y a trois possibilités selon la valeur de

$$b^2 - 4ac$$

qu'on nomme le discriminant.

$$b^2 - 4ac < 0 \qquad b^2 - 4ac = 0 \qquad b^2 - 4ac > 0$$

Remarque:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $\quad b^2 - 4ac < 0 \qquad \sqrt{b^2 - 4ac}$ n'existe pas

donc il n'y a pas de solution

si $\quad b^2 - 4ac = 0 \qquad \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm 0}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$

donc il n'y a qu'une seule solution

si $\quad b^2 - 4ac > 0 \qquad$ Il y a deux solutions.

Exemple

$$2x^2 + 20x + 50 = 0$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 2(50)}}{2 \times 2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 400}}{4}$$

$$= \frac{-20}{4} = -5$$

Exemple

$$3x^2 + x + 7 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 3 \times 7 = -83 < 0$$

Donc pas de solutions

Faites les exercices suivants

p. 115 Ex.4.5

Si on a un polynôme du deuxième degré qu'on a factorisé

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

Alors, chercher à résoudre

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est équivalent à résoudre

$$a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = 0$$

$$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=0$$

Or le produit de plusieurs nombres donne zéro si au moins un de ces nombres est zéro.

Mais $a \neq 0$ car sinon ce serait une équation linéaire.

Donc soit $x-\alpha_1=0$ ou $x-\alpha_2=0$

c'est-à-dire $x=\alpha_1$ ou $x=\alpha_2$

Exemple On veut résoudre

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = -2 \qquad x = -3$$

Exemple Inversement, on peut factoriser une quadratique avec cette idée.

$$3x^2 - 11x - 4 = 3(x-4)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \times 3(-4)}}{2 \times 3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6}$$

$$x = \frac{24}{6} = 4$$

et

$$x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Faites les exercices suivants

p.71 # 3.3

Devoir: p. 139 # 28, 30 à 38