2.7 ÉQUATION RATIONELLE

cours 19

Une équation rationnelle est une équation ou de chaque côté de l'équation on a une somme de quotients de polynômes.

Exemple

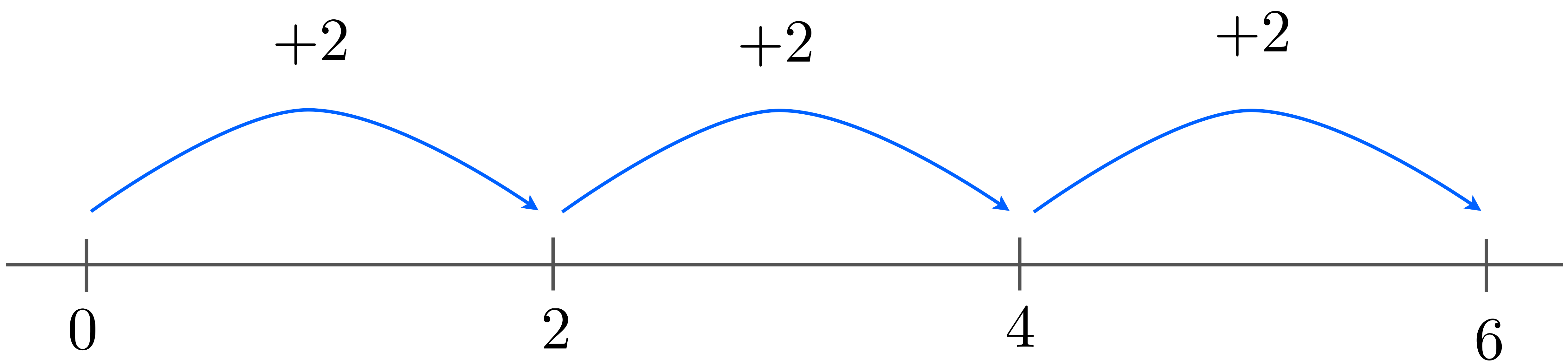
$$\frac{x^2+3x-1}{x+7}+\frac{3}{x^2}=\frac{x+1}{x-3}$$

est une équation rationnelle.

On a vu en début de session qu'on peut interpréter la division comme suit:

Si on compte en bond de +2, 6 vaut combien?

$6 \div 2 = 3$



On a donc un problème si on cherche $6 \div 0$

Car des bonds de +0 donne toujours 0.

Donc diviser par zéro n'existe pas!

Une autre façon de voir ceci serait d'essayer de résoudre

$$0 \times x = 6$$

Puisque 0 fois n'importe quoi donne toujours 0, il est impossible que le résultat soit 6.

Donc $\dfrac{6}{0}$ n'existe pas!

La première chose à faire lorsqu'on résout une équation rationnelle est d'éliminer les valeurs des variables qui ne peuvent avoir lieu.

Exemple

$$\frac{x^2+3x-1}{x+7}+\frac{3}{x^2}=\frac{x+1}{x-3}$$

Ici, on doit exclure de nos solutions les valeurs telles que

$x+7=0$ $\quad$ $x^2=0$ $\quad$ $x-3=0$

c'est à dire

$x=-7$ $\quad$ $x=0$ $\quad$ $x=3$

Donc avant même de commencer à résoudre cette équation, on doit préciser que

$x\neq -7$ $\quad$ $x\neq 0$ $\quad$ $x\neq 3$

La deuxième chose à faire lors de la résolution d'une équation rationnelle est de mettre sur le même dénominateur.

Exemple

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x-5}=\frac{2x-6}{x+4}+\frac{4x-6}{x-2}$$

$$\frac{3(x-5)}{(x+1)(x-5)}+\frac{x(x+1)}{(x-5)(x+1)}=\frac{(2x-6)(x-2)}{(x+4)(x-2)}+\frac{(4x-6)(x+4)}{(x-2)(x+4)}$$

$$\frac{3(x-5)+x(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\frac{(2x-6)(x-2)+(4x-6)(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

La troisième chose à faire est de développer le numérateur.

Exemple

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x-5}=\frac{2x-6}{x+4}+\frac{4x-6}{x-2}$$

$$\frac{3(x-5)}{(x+1)(x-5)}+\frac{x(x+1)}{(x-5)(x+1)}=\frac{(2x-6)(x-2)}{(x+4)(x-2)}+\frac{(4x-6)(x+4)}{(x-2)(x+4)}$$

$$\frac{3(x-5)+x(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\frac{(2x-6)(x-2)+(4x-6)(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

La troisième chose à faire est de développer le numérateur.

Exemple

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x-5}=\frac{2x-6}{x+4}+\frac{4x-6}{x-2}$$

$$\frac{3(x-5)+x(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\frac{(2x-6)(x-2)+(4x-6)(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

$$\frac{3x-15+x^2+x}{(x+1)(x-5)}=\frac{2x^2-10x+12+4x^2+10x-24}{(x+4)(x-2)}$$

$$\frac{(x^2+4x-15)}{(x+1)(x-5)}=\frac{(6x^2-12)}{(x+4)(x-2)}$$

La quatrième chose à faire est de multiplier de chaque côté de l'équation par les dénominateurs.

Exemple

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x-5}=\frac{2x-6}{x+4}+\frac{4x-6}{x-2}$$

$$\frac{(x^2+4x-15)}{(x+1)(x-5)}=\frac{(6x^2-12)}{(x+4)(x-2)}$$

$$(x^2+4x-15)(x+4)(x-2)=(6x^2-12)(x+1)(x-5)$$

On aboutit donc à une équation polynomiale à résoudre.

Dans cet exemple, on ne peut pas résoudre, car c'est une équation du quatrième degré.

Mais lorsque l'équation sera linéaire ou quadratique, nous serons en mesure de la résoudre.

Le schéma de résolution d’une équation rationnelle est le suivant:

1. Trouver les divisions par 0 et les exclurent.
2. Mettre sur les mêmes dénominateurs.
3. Simplifier les numérateurs.
4. Multiplier de chaque côté de l’équation par les dénominateurs.
5. Résoudre l’équation polynomiale obtenue (si possible).

Exemple

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$$

$x \neq -1$

$x \neq 2$

$$\iff \frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = \frac{3(x+1)}{(x-2)} \iff 2 = \frac{3(x+1)}{(x-2)}$$

$$\iff 2(x-2) = \frac{3(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} \iff 2(x-2) = 3(x+1)$$

$$\iff 2x - 4 = 3x + 3 \iff 2x - 3x = 3 + 4$$

$$\iff -x = 7 \iff x = -7$$

Exemple

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$$

$x \neq -1$

$x \neq 2$

$$\iff x = -7$$

Ici, on peut vérifier notre solution

$$\frac{2}{-7+1} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{-7-2} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

Exemple

$$\frac{5}{2x-7}+\frac{2}{3x+1}=-\frac{1}{x+3}$$

$x \neq \frac{7}{2}$ $\quad$ $x \neq -\frac{1}{3}$

$x \neq -3$

$$2x-7=0 \iff 2x=7 \iff x=\frac{7}{2}$$

$$3x+1=0 \iff 3x=-1 \iff x=-\frac{1}{3}$$

$$x+3=0 \iff x=-3$$

Exemple

$$\frac{5}{2x-7}+\frac{2}{3x+1}=-\frac{1}{x+3} \qquad x\neq\frac{7}{2} \qquad x\neq-\frac{1}{3}$$

$$x\neq-3$$

$$\Longleftrightarrow \frac{5(3x+1)}{(2x-7)(3x+1)}+\frac{2(2x-7)}{(3x+1)(2x-7)}=-\frac{1}{x+3}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{5(3x+1)+2(2x-7)}{(2x-7)(3x+1)}=-\frac{1}{x+3}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{15x+5+4x-14}{(2x-7)(3x+1)}=-\frac{1}{x+3}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{19x-9}{(2x-7)(3x+1)}=-\frac{1}{x+3}$$

Exemple

$$\frac{5}{2x-7}+\frac{2}{3x+1}=-\frac{1}{x+3} \qquad x \neq \frac{7}{2} \qquad x \neq -\frac{1}{3}$$

$$x \neq -3$$

$$\iff \frac{19x-9}{(2x-7)(3x+1)}=-\frac{1}{x+3}$$

$$\iff \frac{(19x-9)(x+3)}{(2x-7)(3x+1)}=-\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x+3}}$$

$$\iff \frac{(19x-9)(x+3)}{(2x-7)(3x+1)}=-1$$

$$\iff (19x-9)(x+3)=-(2x-7)(3x+1)$$

$$\iff 19x^2-9x+57x-27=-(6x^2-21x+2x-7)$$

Exemple

$$\frac{5}{2x-7}+\frac{2}{3x+1}=-\frac{1}{x+3}$$

$x \neq \frac{7}{2}$ $\quad x \neq -\frac{1}{3}$

$x \neq -3$

$$\iff 19x^2-9x+57x-27=-(6x^2-21x+2x-7)$$

$$\iff 19x^2+48x-27=-6x^2+23x-7$$

$$\iff 25x^2+25x-20=0$$

$$\iff 5(5x^2+5x-4)=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\times 5\times(-4)}}{10}=\frac{-5\pm\sqrt{105}}{10}$$

Exemple

$\boxed{x \neq 4}$

$$\frac{-2x^2+7x+12}{x-4} = x+1$$

$$\iff -2x^2+7x+12 = (x+1)(x-4)$$

$$\iff -2x^2+7x+12 = x^2-3x-4$$

$$\iff 0 = 3x^2-10x-8$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-4\times 3\times(-8)}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$\cancel{x = \frac{24}{6} = 4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Lorsqu'on met sur le même dénominateur une somme de fraction on multiplie chacune des fractions par un 1 déguisé.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Pour choisir le 1 déguisé, on prend habituellement l'autre dénominateur.

Or l'expression est plus simple si on choisit de telle sorte que le dénominateur soit le plus petit commun multiple.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Il en va de même pour les fractions polynomiales.

Exemple

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{5}{x+3}=\frac{1}{x+1}$$

$x \neq 3 \qquad x \neq -3$

$x \neq -1$

$$\iff \frac{x}{(x-3)(x+3)}+\frac{5}{x+3}=\frac{1}{x+1}$$

$$\iff \frac{x}{(x-3)(x+3)}+\frac{5(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x+1}$$

$$\iff \frac{x+5(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+1}$$

$$\iff \frac{6x-15}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+1}$$

Exemple

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{5}{x+3}=\frac{1}{x+1}$$

$x \neq 3$ $\quad x \neq -3$

$x \neq -1$

$$\iff \frac{6x-15}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+1}$$

$$\iff (6x-15)=\frac{(x-3)(x+3)}{x+1}$$

$$\iff (6x-15)(x+1)=(x-3)(x+3)$$

$$\iff 6x^2-9x-15=x^2-9$$

$$\iff 5x^2-9x-6=0$$

Exemple

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{5}{x+3}=\frac{1}{x+1}$$

$x \neq 3$ $\quad x \neq -3$

$x \neq -1$

$$\iff 5x^2-9x-6=0$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-4\times5\times(-6)}}{10}=\frac{9\pm\sqrt{81+120}}{10}$$

$$=\frac{9\pm\sqrt{201}}{10}$$

Faites les exercices suivants

p.123 Ex.4.8

Devoir: p.140 #44