2.8 ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

cours 20

Une équation trigonométrique est une équation qui fait intervenir des rapports trigonométriques.

Exemple

$$3\sin\theta = \cos\theta$$

$$4\cos^2\theta - \cos\theta = 7$$

$$4\tan\theta + 2 = \tan\theta - 5$$

Sont des équations trigonométriques

De la même manière que lors des résolutions des équations qu'on a déjà vues, notre objectif est d'isoler la variable.

Or pour ce faire on devait effectuer les opérations inverses

$$x + 2 = 5 \Longleftrightarrow x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$2x = 5 \Longleftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x^2 = 4 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$

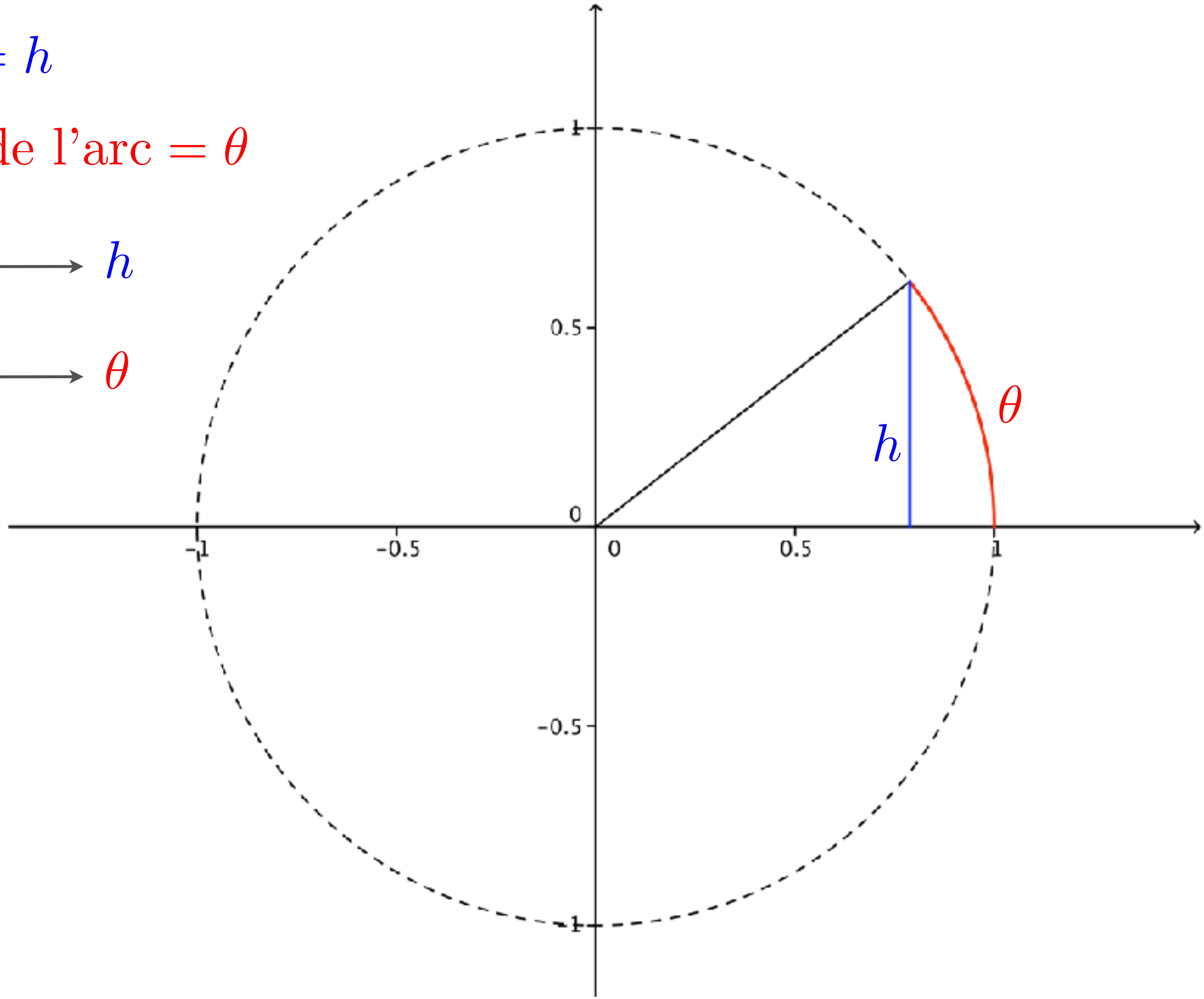
On doit donc essayer de comprendre comment inverser le processus nous permettant de trouver les rapports trigonométriques.

$\text{hauteur} = h$

$\text{longueur de l'arc} = \theta$

$\theta \xrightarrow{\sin} h$

$h \xrightarrow{\arcsin} \theta$



On note

Mais on utilise surtout ceux-là

$$\arcsin x = \theta \iff \sin\theta = x$$

$$\arccos x = \theta \iff \cos\theta = x$$

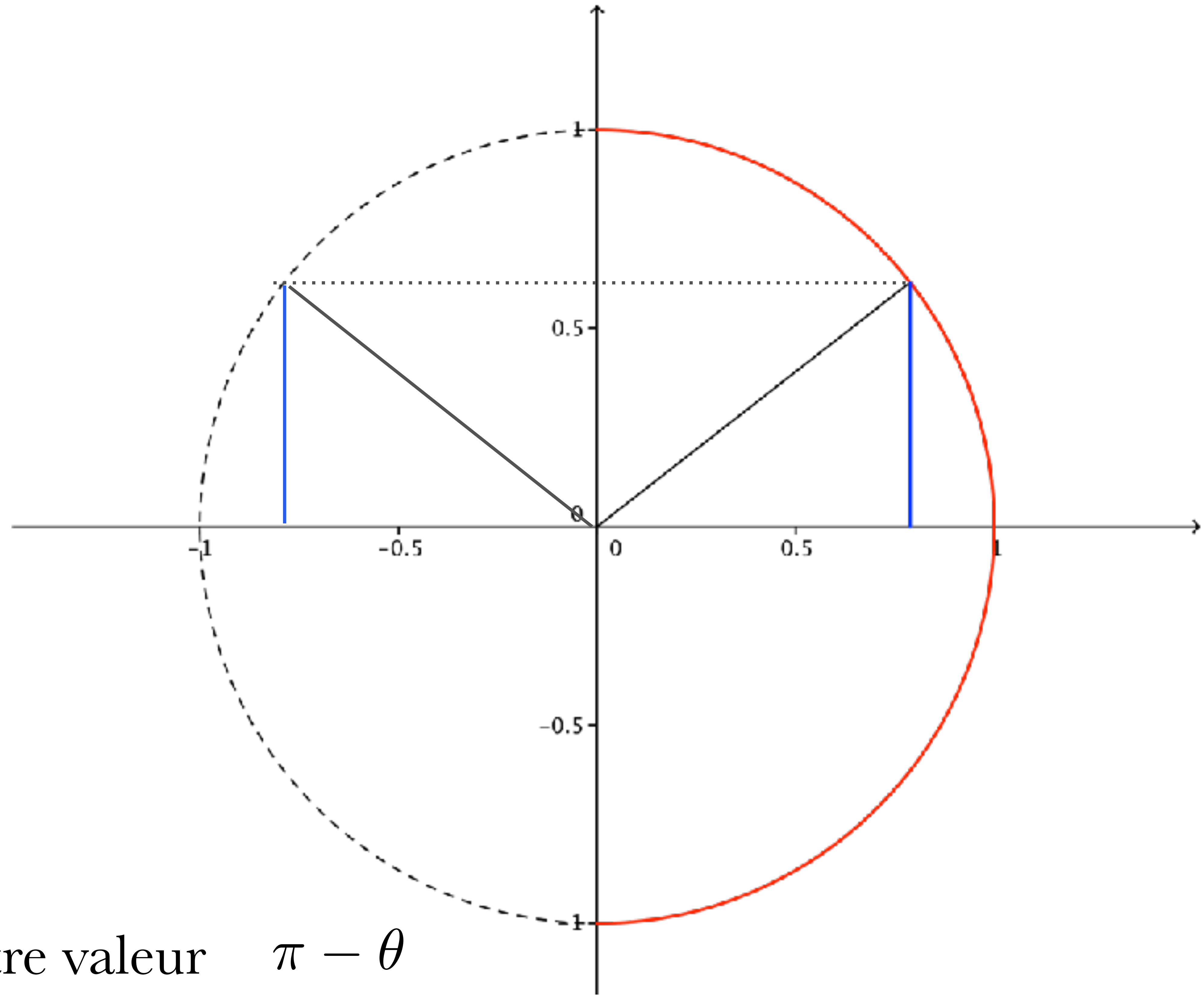
$$\arctan x = \theta \iff \tan\theta = x$$

$$\mathrm{arcsec} x = \theta \iff \sec\theta = x$$

$$\mathrm{arccsc} x = \theta \iff \csc\theta = x$$

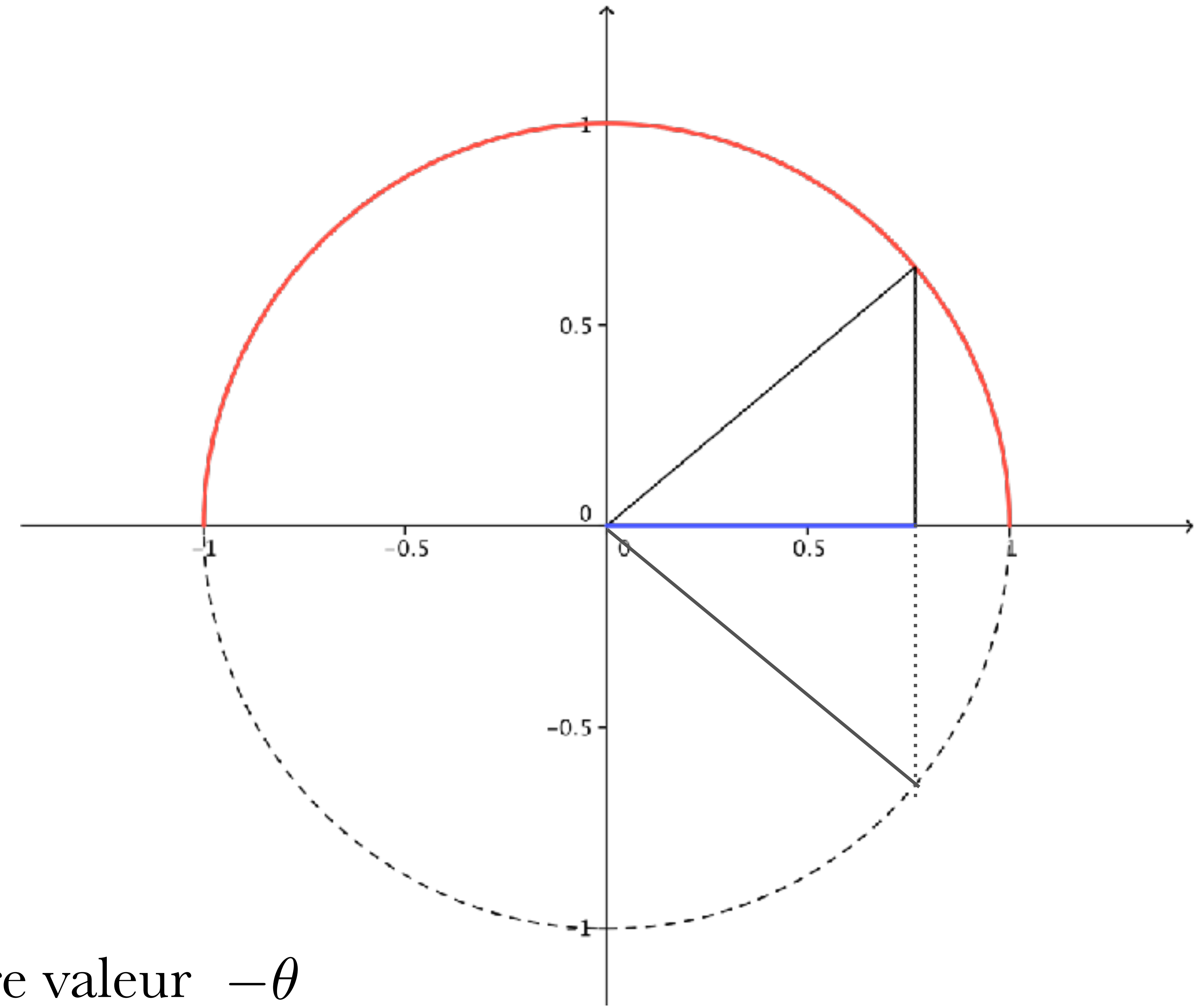
$$\mathrm{arccot} x = \theta \iff \cot\theta = x$$

Les valeurs de $\arcsin x$ sont comprises entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$



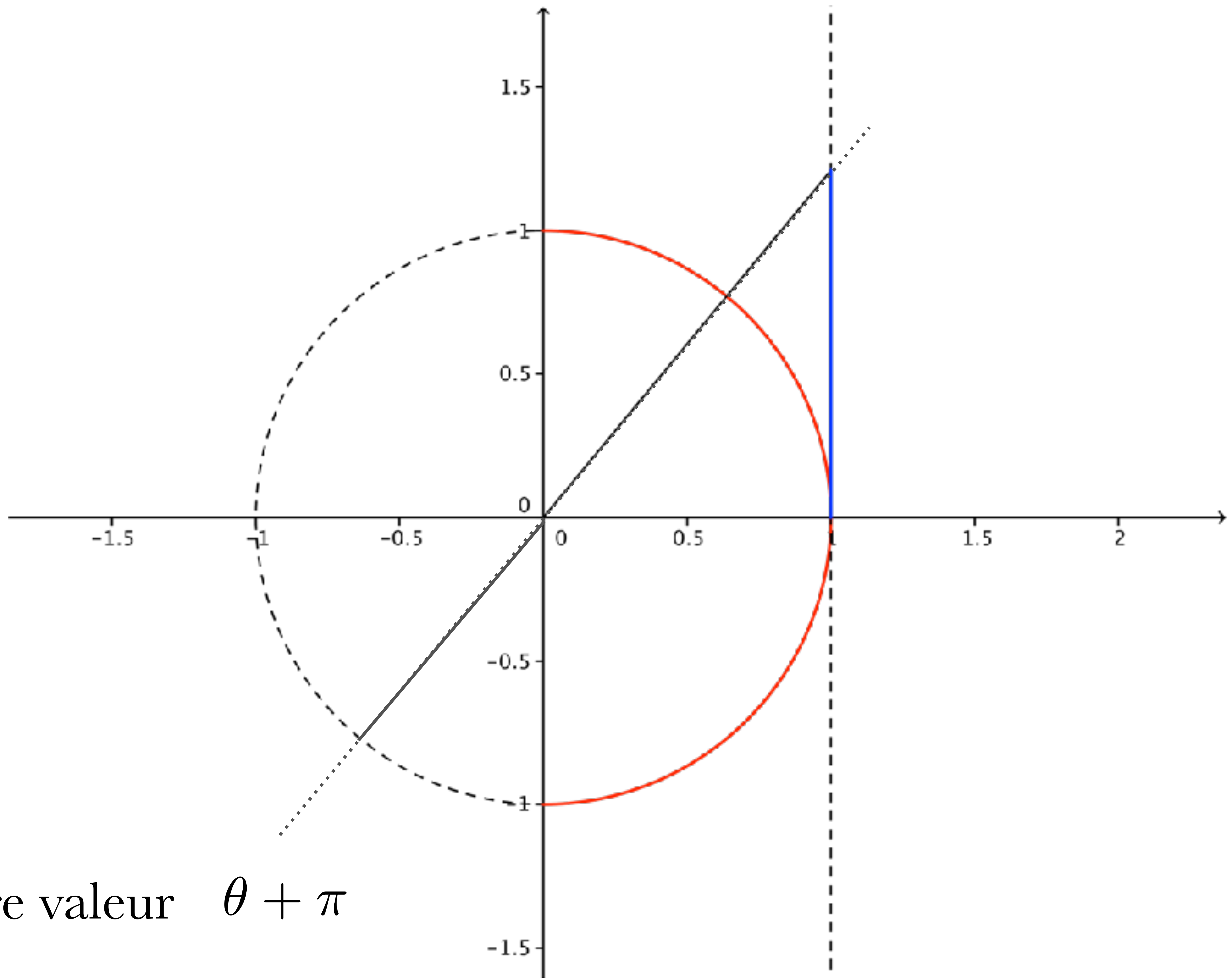
L'autre valeur $\pi - \theta$

Les valeurs de $\arccos x$ sont comprises entre 0 et π



L'autre valeur $-\theta$

Les valeurs de $\arctan x$ sont comprises entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$



L'autre valeur $\theta + \pi$

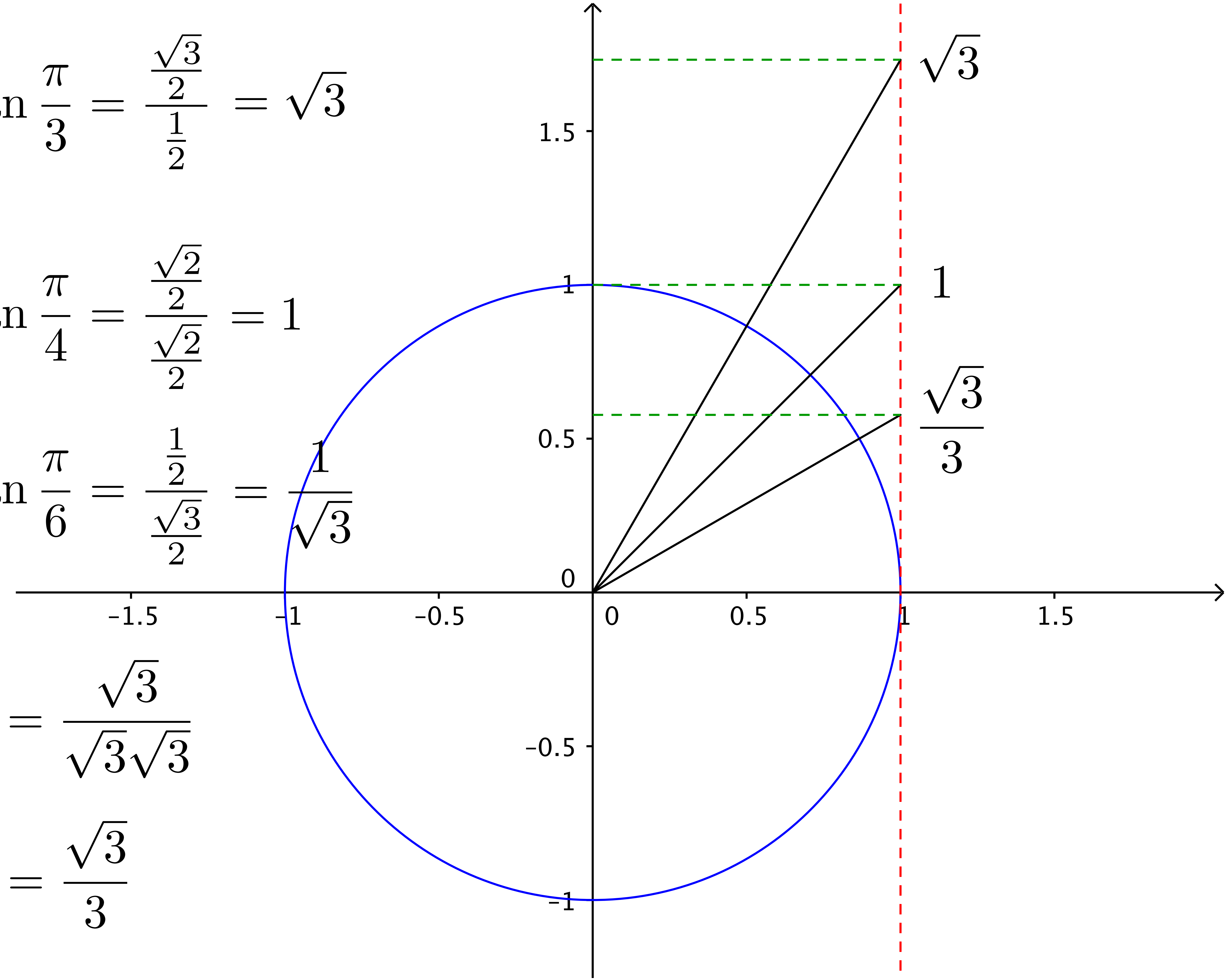
$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Faites les exercices suivants

Évaluer

a) $\arccos -1$

b) $\arcsin 0$

c) $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

f) $\arctan 1$

g) $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$

h) $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Un peu comme $\sqrt{x^2} \neq x$ mais plutôt $\sqrt{x^2} = |x|$

on a

$$\arcsin(\sin\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \theta & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\arccos(\cos\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si} \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -\theta & \text{si} \quad \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

$$\arctan(\tan\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \theta + \pi & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Par contre lorsqu'on cherche les solutions d'une équation on doit trouver toutes valeurs qui rendent cette équation vraie.

Ajouter un ou des tours à l'angle nous amène au même point sur le cercle et donc au même rapport trigonométrique.

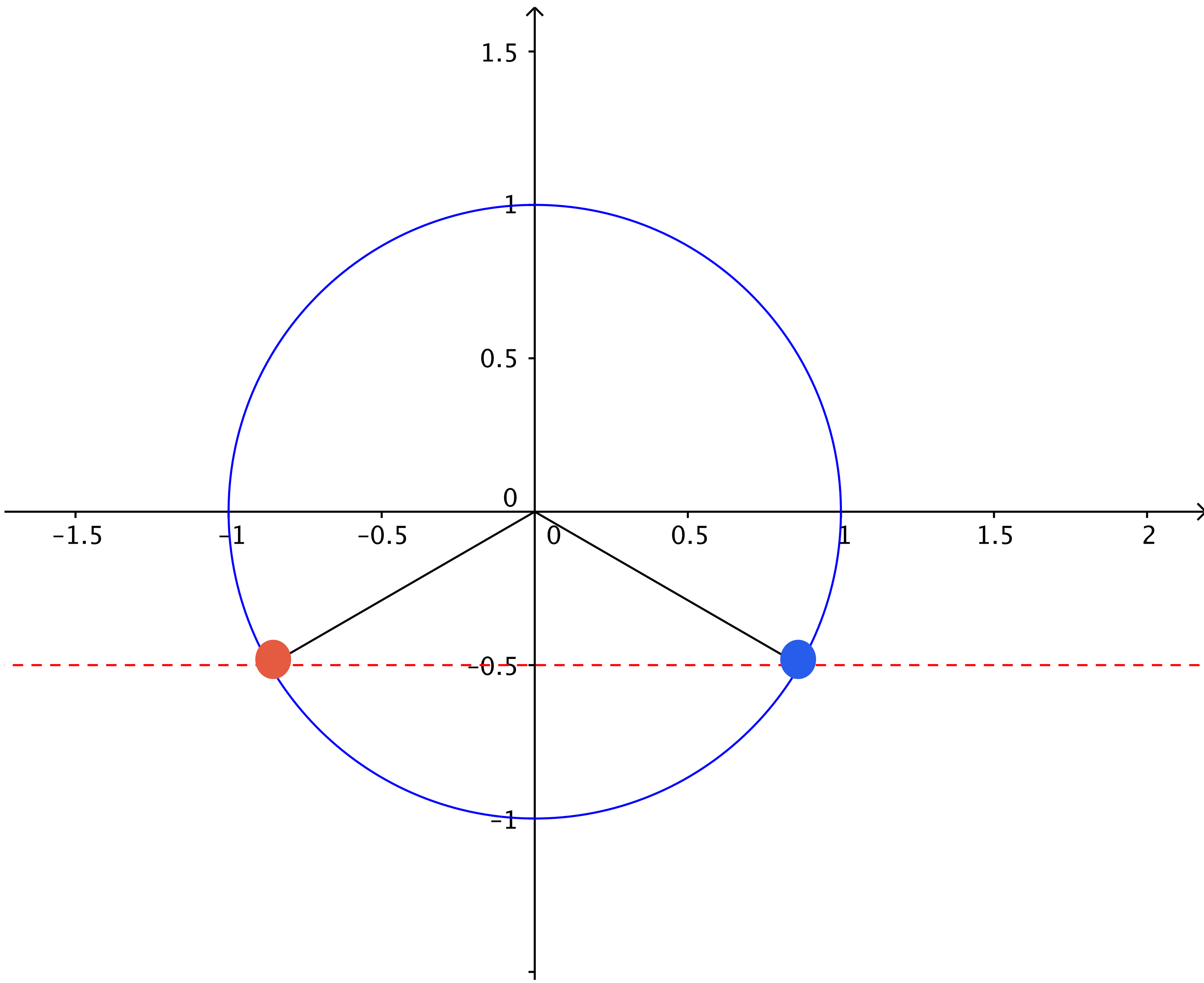
Donc dès qu'on a une solution, additionner un multiple de 2π ou en soustraire un nous donne aussi une solution.

Exemple

$$2\sin\theta + 1 = 0 \iff 2\sin\theta = -1$$

$$\iff \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\iff \theta = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$



$$\theta = \boxed{-\frac{\pi}{6}} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\theta = \boxed{\frac{7\pi}{6}} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \qquad \text{posons} \quad x = \cos\theta$$

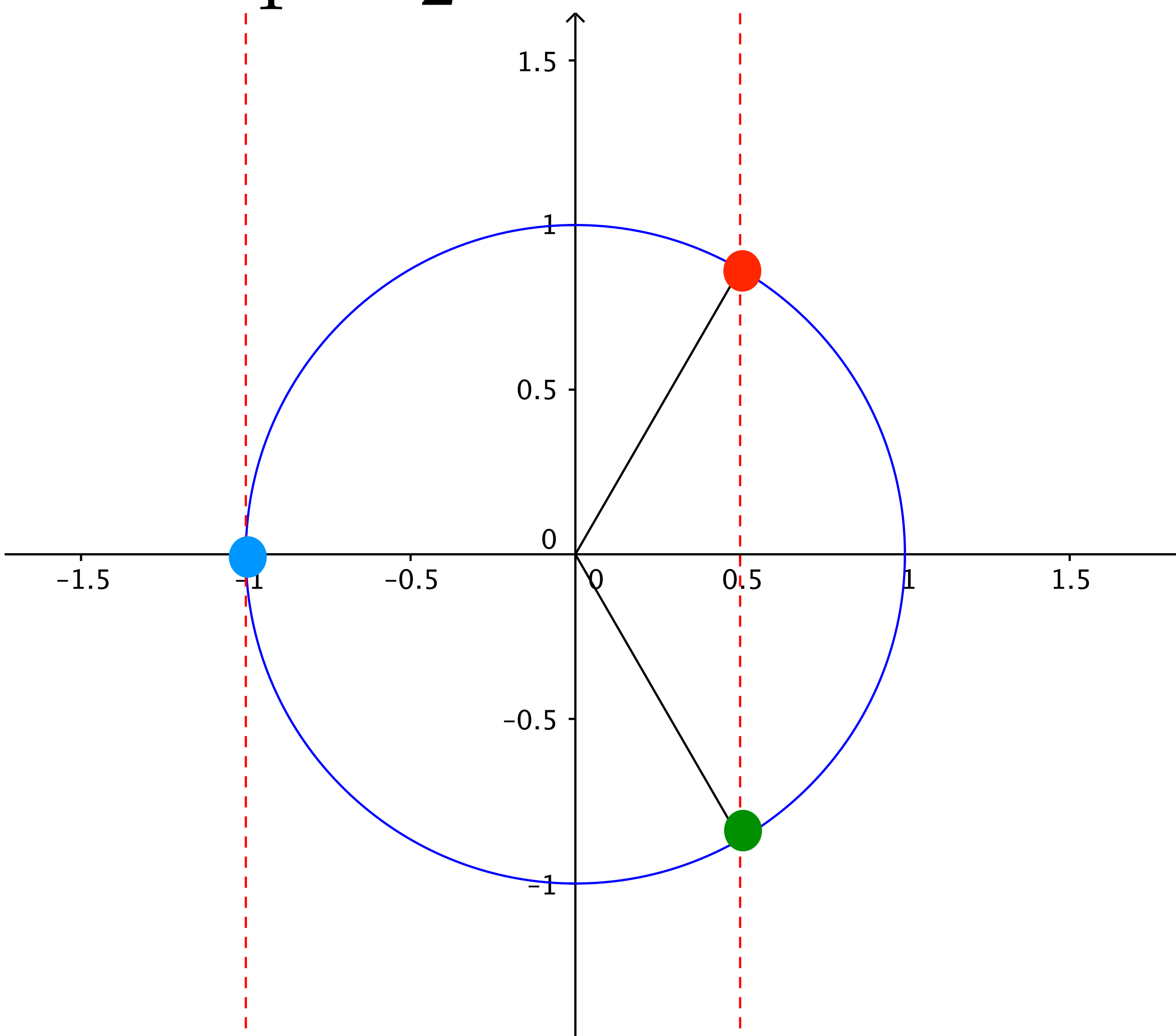
$$2x^2 + x - 1 = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = -1 \; = \cos\theta \qquad x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \cos\theta$$

$$\theta = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

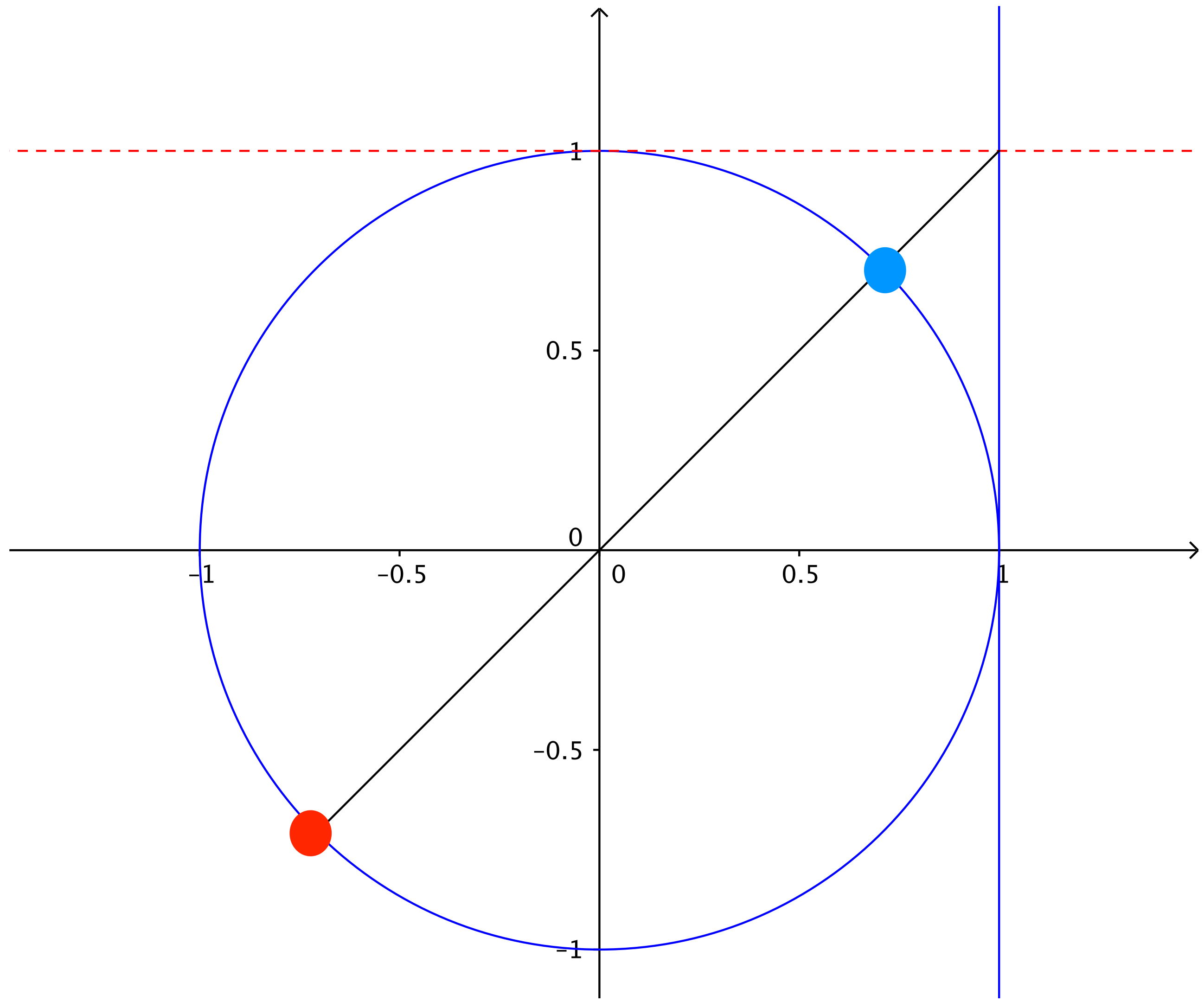


Exemple

$$\sec\theta + 4\csc\theta = 5\csc\theta$$

$$\iff \sec\theta = \csc\theta \quad \iff \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\iff \sin\theta = \cos\theta \quad \iff \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \quad \iff \tan\theta = 1$$



$$\theta = \boxed{\frac{\pi}{4}} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \boxed{\frac{5\pi}{4}} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Faites les exercices suivants

p. 517 Ex. 13.10

Devoir: p. 521 # 17