

2.4 ÉQUATIONS LINÉAIRES

cours 16

Équations

Une équation est une expression mathématique contenant une égalité.

Une équation peut être vraie ou elle peut être fausse.

Exemple

$2 = 9$ est toujours fausse

Exemple

$5 = 2 + 3$ est toujours vraie

Lorsque l'équation fait intervenir une ou des variables, la valeur de vérité de l'équation dépend de la valeur de la variable.

Exemple

$$x + 7 = 9$$

Si $x = 10$ $10 + 7 = 9$ est fausse

Si $x = 4$ $4 + 7 = 9$ est fausse

Si $x = 2$ $2 + 7 = 9$ est vraie

Résoudre une équation revient à trouver toutes les valeurs des variables qui rendent l'équation vraie.

On nomme l'ensemble des valeurs des variables qui rendent l'équation vraie, l'ensemble solution.

Pour arriver à cette fin, on va transformer les équations en d'autres équations ayant le même ensemble solution.

Dans ce cas, on dit que les équations sont équivalentes.

À partir d'une équation, on peut obtenir une nouvelle équation qui possède le même ensemble solution si on effectue la même opération de chaque côté de l'équation.

$$a = b \iff a + c = b + c$$

$$a = b \iff a - c = b - c$$

$$a = b \iff a \times c = b \times c$$

$$a = b \iff \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \quad \text{si } c \neq 0$$

Définition

Une équation est dite linéaire si l'un des côtés de l'équation est un polynôme de degré 1 et l'autre est de degré 1 ou 0.

Exemple

$$x + 1 = 0$$

$$4x = 5$$

$$8x = 5x + 9$$

$$7x - 2 = -3x + 11$$

sont des équations linéaires.

Pour résoudre une équation linéaire, il suffit de trouver une équation équivalente où la variable est isolée.

Exemple

$$x + 8 = 5 \iff x + \cancel{8} - 8 = 5 - 8$$

$$\iff x = -3$$

Exemple

$$4x - 3 = 7 \iff 4x - \cancel{3} + 3 = 7 + 3$$

$$\iff 4x = 10$$

$$\iff \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{10}{\cancel{4}}$$

$$\iff x = \frac{5}{2}$$

Example

$$3x - 5 = -x + 3 \iff 3x - \cancel{5} + \cancel{5} = -x + 3 + 5$$

$$\iff 3x = -x + 8$$

$$\iff 3x + x = \cancel{-x} + 8 + \cancel{x}$$

$$\iff 4x = 8$$

$$\iff \frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\iff x = 2$$

Example

$$\frac{3(x+2)}{5} - \frac{6(2x-1)}{4} = 7$$

$$\Leftrightarrow 5 \times \left(\frac{3(x+2)}{5} - \frac{6(2x-1)}{4} \right) = 5 \times 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{5} \times 3(x+2)}{\cancel{5}} - \frac{5 \times 6(2x-1)}{4} = 35$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2) - \frac{30(2x-1)}{4} = 35$$

$$\Leftrightarrow 4 \times \left(3(x+2) - \frac{30(2x-1)}{4} \right) = 4 \times 35$$

Example

$$\frac{3(x+2)}{5} - \frac{6(2x-1)}{4} = 7$$

$$\Leftrightarrow 4 \times \left(3(x+2) - \frac{30(2x-1)}{4} \right) = 4 \times 35$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 3(x+2) - \frac{4 \times 30(2x-1)}{4} = 140$$

$$\Leftrightarrow 12(x+2) - 30(2x-1) = 140$$

$$\Leftrightarrow 12x + 24 - 60x + 30 = 140$$

$$\Leftrightarrow -48x + 54 = 140$$

$$\Leftrightarrow -48x + 54 - 54 = 140 - 54$$

Example

$$\frac{3(x + 2)}{5} - \frac{6(2x - 1)}{4} = 7$$

$$\Leftrightarrow -48x + \cancel{54} - \cancel{54} = 140 - 54$$

$$\Leftrightarrow -48x = 86$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{-48x}}{\cancel{-48}} = \frac{86}{-48}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{86}{48} = -\frac{43}{24}$$

Faites les exercices suivants

p.98 Ex 4.1 #1

Bien qu'il soit nécessaire de s'exercer avec des exercices sans contexte, les équations permettent de résoudre des problèmes plus concrets.

Pour ça il est nécessaire de bien lire, poser les variables, poser l'équation et la résoudre.

Exemple John a 50 dollars et travail à un taux horaire de 13\$/h.

Tyrion a 30 dollars et travail à un taux horaire de 15\$/h.

Après combien d'heures de travail auront-ils le même montant?

h : le nombre d'heures travaillé

$$\text{John: } 50 + 13h$$

$$\text{Tyrion: } 30 + 15h$$

$$30 + 15h = 50 + 13h$$

$$\iff 15h - 13h = 50 - 30$$

$$\iff 2h = 20$$

$$\iff h = 10$$

Faites les exercices suivants

p.98 Ex 4.1 #2, 3, 4

Devoir:

p.137 # 1 à 7