

2.3 ÉQUATIONS LINÉAIRES ET QUADRATIQUES

QUADRATIQUES

cours 13

Équations

Une équation est une expression mathématique contenant une égalité.

Une équation peut être vraie ou elle peut être fausse.

Exemple

$2 = 9$ est toujours fausse

Exemple

$5 = 2 + 3$ est toujours vraie

Lorsque l'équation fait intervenir une ou des variables, la valeur de vérité de l'équation dépend de la valeur de la variable.

Exemple

$$x + 7 = 9$$

Si $x = 10$ $10 + 7 = 9$ est fausse

Si $x = 4$ $4 + 7 = 9$ est fausse

Si $x = 2$ $2 + 7 = 9$ est vraie

Résoudre une équation revient à trouver toutes les valeurs des variables qui rendent l'équation vraie.

On nomme l'ensemble des valeurs des variables qui rendent l'équation vraie, l'ensemble solution.

Pour arriver à cette fin, on va transformer les équations en d'autres équations ayant le même ensemble solution.

Dans ce cas, on dit que les équations sont équivalentes.

À partir d'une équation, on peut obtenir une nouvelle équation qui possède le même ensemble solution si on effectue la même opération de chaque côté de l'équation.

$$a = b \iff a + c = b + c$$

$$a = b \iff a - c = b - c$$

$$a = b \iff a \times c = b \times c$$

$$a = b \iff \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \quad \text{si } c \neq 0$$

Définition

Une équation est dite linéaire si l'un des côtés de l'équation est un polynôme de degré 1 et l'autre est de degré 1 ou 0.

Exemple

$$x + 1 = 0$$

$$4x = 5$$

$$8x = 5x + 9$$

$$7x - 2 = -3x + 11$$

sont des équations linéaires.

Pour résoudre une équation linéaire, il suffit de trouver une équation équivalente où la variable est isolée.

Exemple

$$x + 8 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x + \cancel{8} - \cancel{8} = 5 - 8$$

$$\Longleftrightarrow x = -3$$

Exemple

$$4x - 3 = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x - \cancel{3} + \cancel{3} = 7 + 3$$

$$\Longleftrightarrow 4x = 10$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{10}{4}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Example

$$3x - 5 = -x + 3 \iff 3x - \cancel{5} + \cancel{5} = -x + 3 + 5$$

$$\iff 3x = -x + 8$$

$$\iff 3x + x = \cancel{-x} + 8 + \cancel{x}$$

$$\iff 4x = 8$$

$$\iff \frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\iff x = 2$$

Example

$$\frac{3(x+2)}{5} - \frac{6(2x-1)}{4} = 7$$

$$\Leftrightarrow 5 \times \left(\frac{3(x+2)}{5} - \frac{6(2x-1)}{4} \right) = 5 \times 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{5} \times 3(x+2)}{\cancel{5}} - \frac{5 \times 6(2x-1)}{4} = 35$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2) - \frac{30(2x-1)}{4} = 35$$

$$\Leftrightarrow 4 \times \left(3(x+2) - \frac{30(2x-1)}{4} \right) = 4 \times 35$$

Example

$$\frac{3(x+2)}{5} - \frac{6(2x-1)}{4} = 7$$

$$\iff 4 \times \left(3(x+2) - \frac{30(2x-1)}{4} \right) = 4 \times 35$$

$$\iff 4 \times 3(x+2) - \frac{4 \times 30(2x-1)}{4} = 140$$

$$\iff 12(x+2) - 30(2x-1) = 140$$

$$\iff 12x + 24 - 60x + 30 = 140$$

$$\iff -48x + 54 = 140$$

$$\iff -48x + 54 - 54 = 140 - 54$$

Example

$$\frac{3(x+2)}{5} - \frac{6(2x-1)}{4} = 7$$

$$\Leftrightarrow -48x + \cancel{54} - \cancel{54} = 140 - 54$$

$$\Leftrightarrow -48x = 86$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{-48}x}{\cancel{-48}} = \frac{86}{-48}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{86}{48} = -\frac{43}{24}$$

Faites les exercices suivants

#30 à 33

Définition

Une équation est dite quadratique si l'un des côtés de l'équation est un polynôme de degré 2 et l'autre est de degré 2 ou moins.

Exemple

$$2x^2 + 3x - 5 = x$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$7x^2 - 3x + 17 = -14x^2 + 3x - 1$$

$$5x^2 - 3xy + 8y^2 = 4$$

sont des équations quadratiques.

Avant d'essayer de résoudre une équation quadratique quelconque, regardons de plus près l'opération inverse de mettre au carré, c'est-à-dire prendre la racine carrée.

$$2^2 = 4 \qquad (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

Donc si on se pose la question:

Quel nombre mis au carré donne 4?

et bien il y a deux réponses

$$2 \quad \text{et} \quad -2$$

Mais la racine carrée est la valeur positive.

$$\sqrt{4} = 2$$

Pour isoler x dans cette équation, on doit effectuer la même opération de chaque côté de l'équation.

$$x^2 = a$$

Et cette opération est la racine carré.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{x^2} \stackrel{?}{=} x \quad \text{non!}$$

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{a} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Si } x \geq 0 \qquad x = \sqrt{a}$$

$$\text{si } x < 0 \qquad -x = \sqrt{a} \iff x = -\sqrt{a}$$

Donc

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Example

$$3x^2 = 7 \iff x^2 = \frac{7}{3}$$

$$\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\iff x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Example

$$x^2 + 5 = 3x^2 + 13$$

$$\iff 5 - 13 = 3x^2 - x^2$$

$$\iff -8 = 2x^2$$

$$\iff x^2 = -4 \quad \text{impossible}$$

Faites les exercices suivants

34 et 35

Si le produit de deux nombres est zéro,

$$a \times b = 0$$

alors forcément l'un ou l'autre vaut zéro.

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

On peut utiliser ce fait pour trouver les zéros
d'un polynôme factorisé

Exemple

$$x^2 + x - 6 = 3x + 9$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$$

On a donc deux possibilités;

soit $(x - 5) = 0 \quad \Longleftrightarrow x = 5$

ou bien $(x + 3) = 0 \quad \Longleftrightarrow x = -3$

Faites les exercices suivants

#36

Étant donné une équation quadratique à une variable

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = \underbrace{a_2x^2}_{\text{cyan}} + \underbrace{b_2x}_{\text{red}} + \underbrace{c_2}_{\text{green}}$$

on peut toujours obtenir une équation équivalente de la forme:

$$a_1x^2 - \underbrace{a_2x^2}_{\text{cyan}} + b_1x - \underbrace{b_2x}_{\text{red}} + c_1 - \underbrace{c_2}_{\text{green}} = 0$$

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donc savoir résoudre cette forme d'équation nous permet de résoudre n'importe quelle équation quadratique.

Commençons par essayer de résoudre

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et en isolant x .

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \implies ax^2 = -bx - c$$

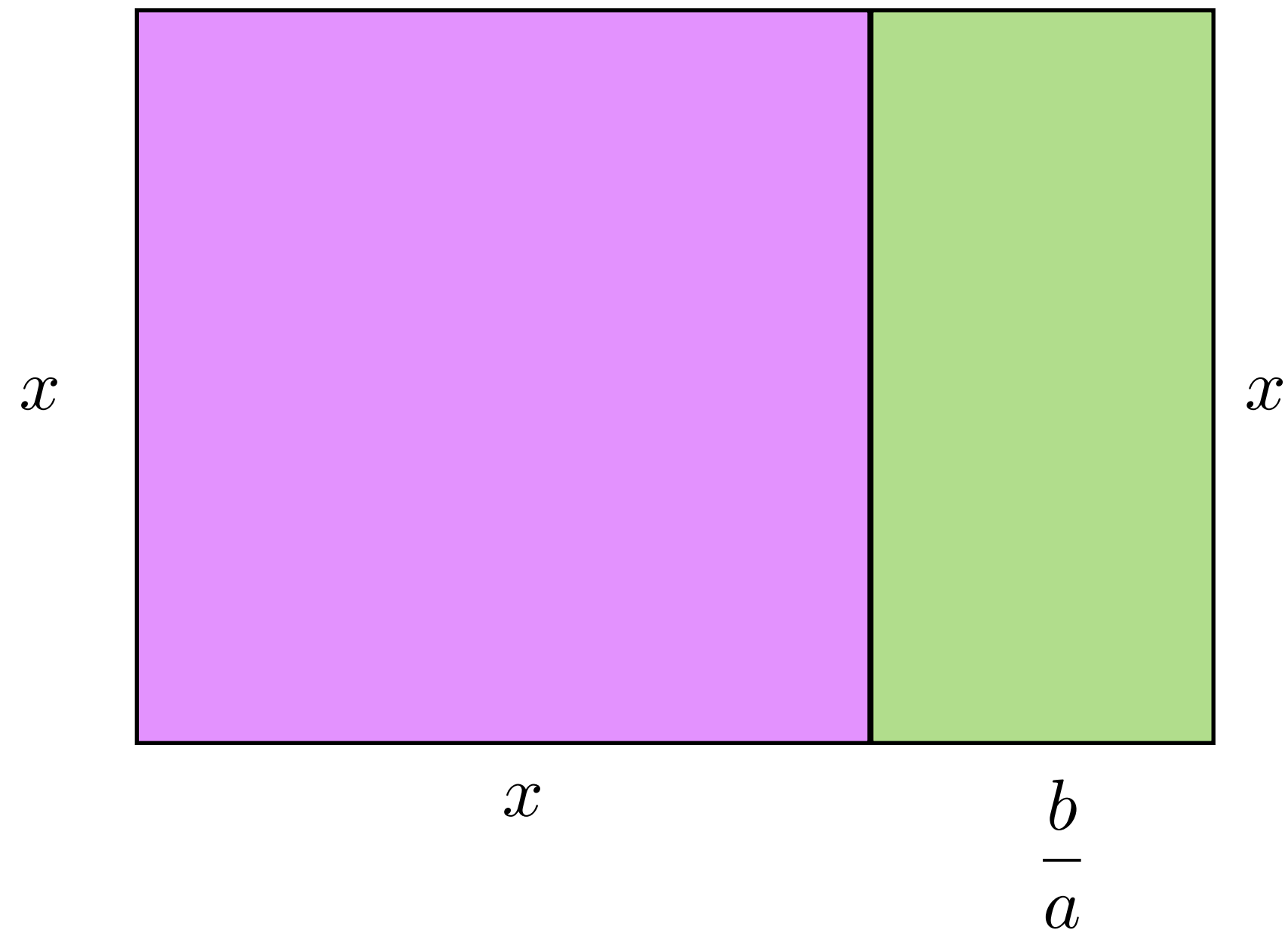
$$\implies x^2 = \frac{-bx - c}{a}$$

Ce terme nous
empêche d'isoler x

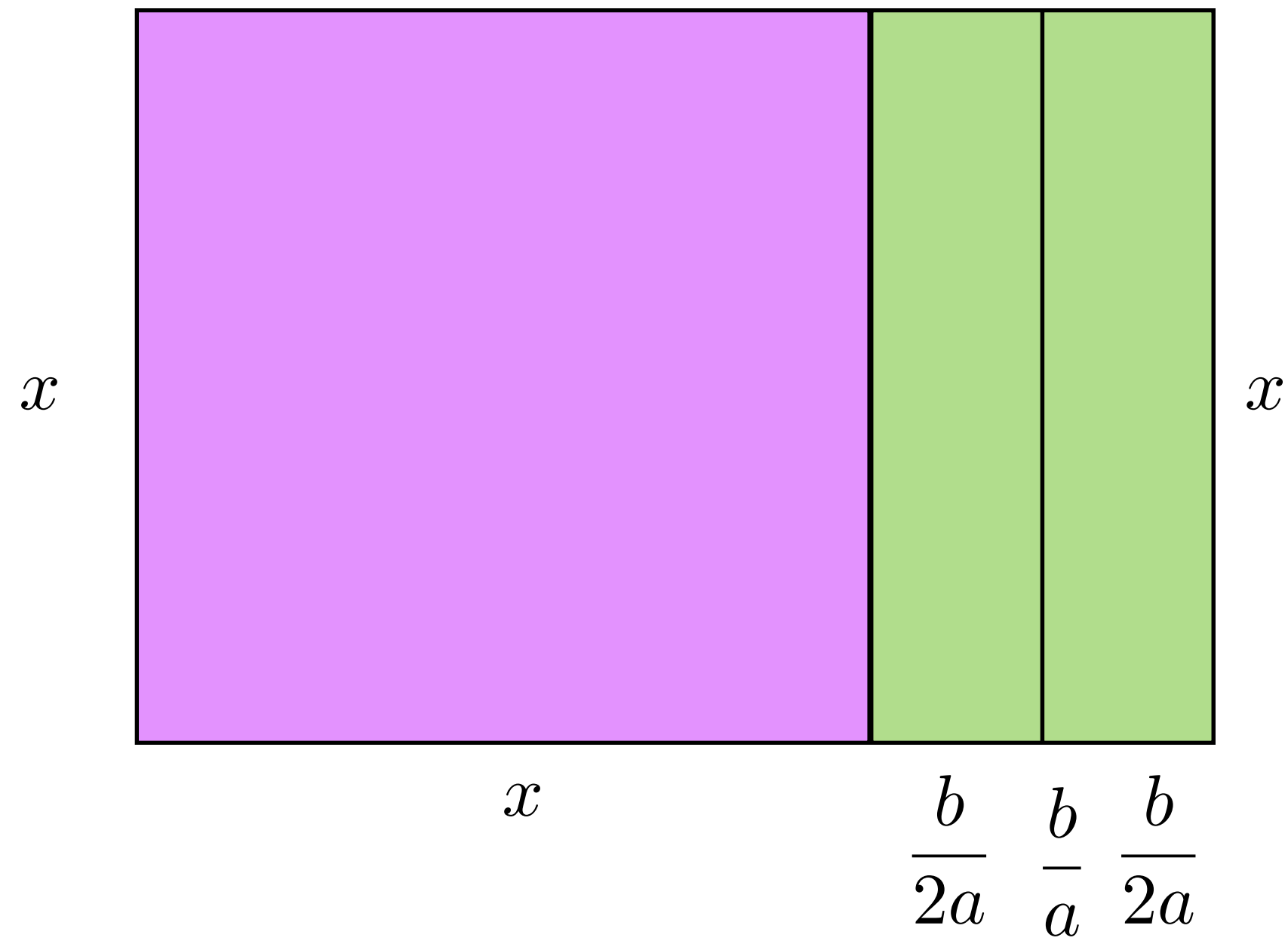
$$\implies x = \pm \sqrt{\frac{-bx - c}{a}}$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

On aimerait bien trouver une manière d'englober le terme bx dans un carré



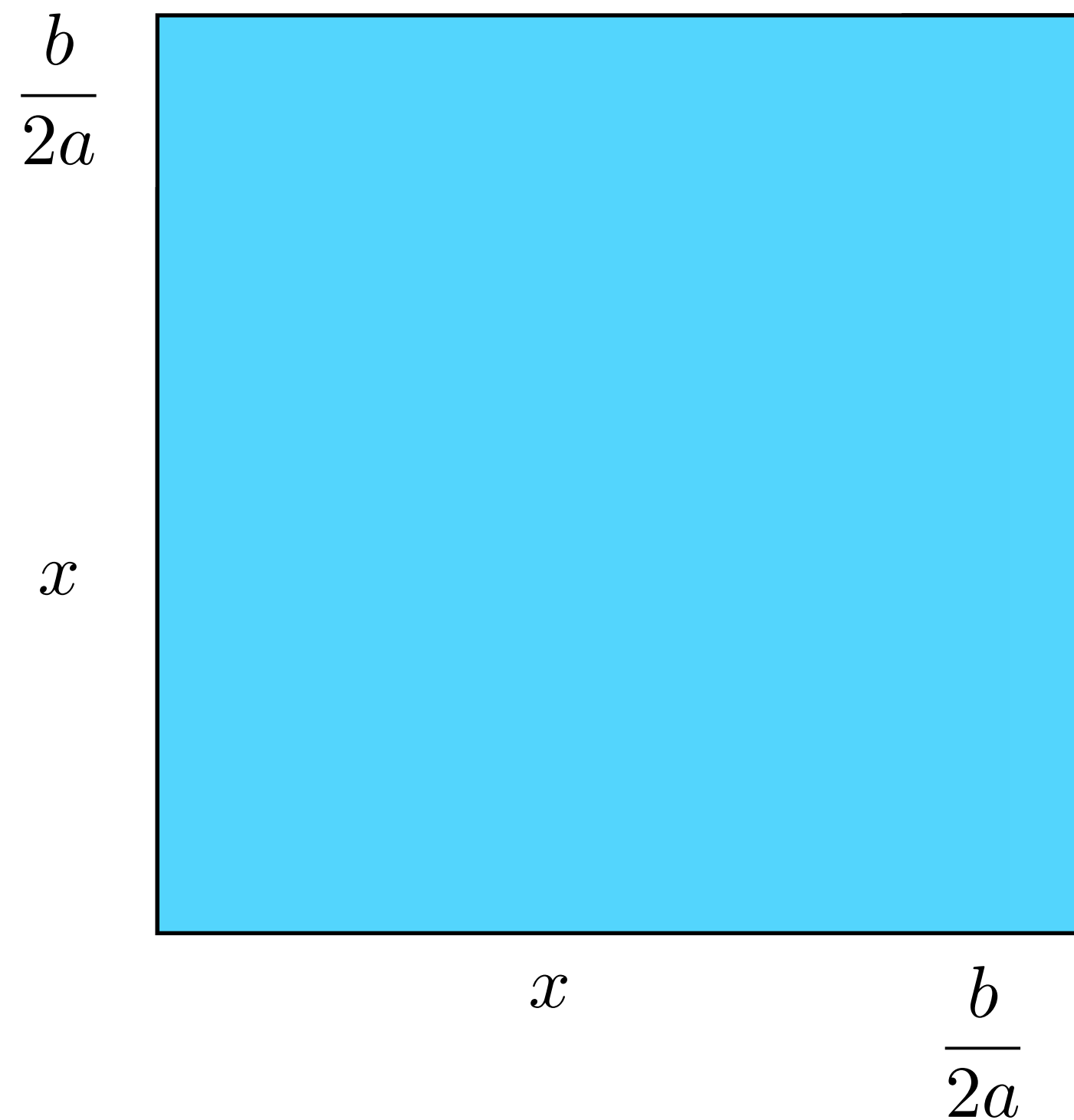
$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$



$$ax^2 + bx + c = a \left(\boxed{x^2} + \boxed{\frac{b}{a}x} \right) + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \boxed{\frac{b^2}{4a^2}} - \boxed{\frac{b^2}{4a^2}} \right) + c$$

$$= a \left(\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}} \right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$



x

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Example

$$2x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 2(-7)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 14}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 56}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{72}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{36 \times 2}}{4} = -1 \pm \frac{6\sqrt{2}}{4}$$

$$= -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Example

$$8x^2 + 3x - 5 = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\Longleftrightarrow 8x^2 - 3x^2 + 3x + 4x - 5 - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 5x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 5 \times (-6)}}{10} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{10}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{10} = \frac{-7 \pm 13}{10}$$

$$x = \frac{-7 + 13}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad x = \frac{-7 - 13}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

Remarque

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lors de la résolution d'une quadratique, il y a trois possibilités selon la valeur de

$$b^2 - 4ac$$

qu'on nomme le discriminant.

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

Remarque

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac < 0$

$\sqrt{b^2 - 4ac}$ n'existe pas

donc il n'y a pas de solution

si $b^2 - 4ac = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

donc il n'y a qu'une seule solution

si $b^2 - 4ac > 0$

Il y a deux solutions.

Exemple

$$2x^2 + 20x + 50 = 0$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 2(50)}}{2 \times 2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 400}}{4}$$

$$= \frac{-20}{4} = -5$$

Exemple

$$3x^2 + x + 7 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 3 \times 7 = -83 < 0$$

Donc pas de solutions

Faites les exercices suivants

#37 et 38

Si on a un polynôme du deuxième degré qu'on a factorisé

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

Alors, chercher à résoudre

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est équivalent à résoudre

$$a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = 0$$

$$a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = 0$$

Or le produit de plusieurs nombres donne zéro si au moins un de ces nombres est zéro.

Mais $a \neq 0$ car sinon ce serait une équation linéaire.

Donc soit $x - \alpha_1 = 0$ ou $x - \alpha_2 = 0$

c'est-à-dire $x = \alpha_1$ ou $x = \alpha_2$

Exemple

On veut résoudre

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = -2$$

$$x = -3$$

Exemple

Inversement, on peut factoriser une quadratique avec cette idée.

$$3x^2 - 11x - 4 = 3(x - 4) \left(x + \frac{1}{3} \right)$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \times 3(-4)}}{2 \times 3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6}$$

$$x = \frac{24}{6} = 4$$

et

$$x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Faites les exercices suivants

#39 à 41

Devoir:

30 à 41