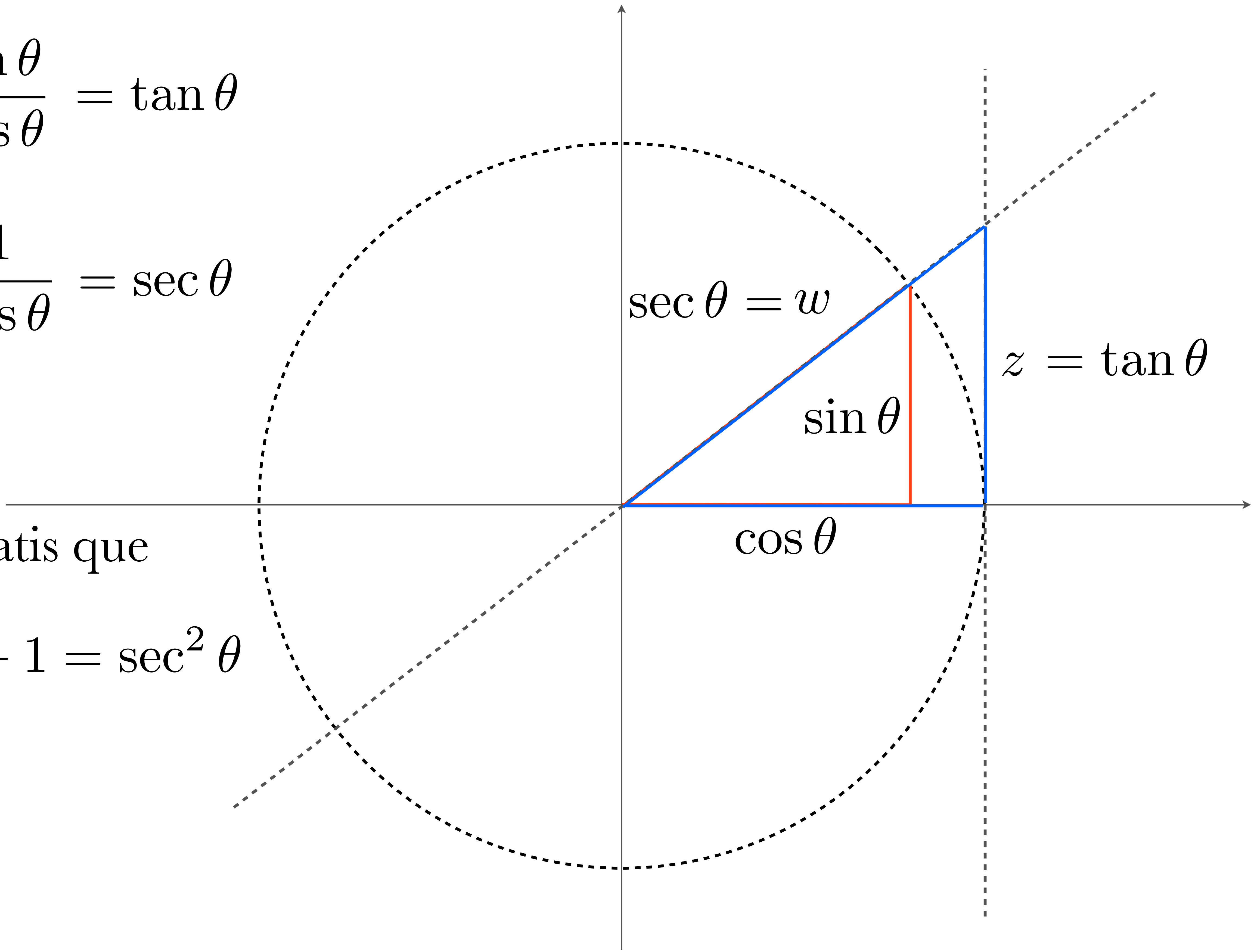
1.8 IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

cours 8

Pourquoi les mathématiciens utilisent-ils le terme «tangente» et «sécante» pour désigner deux concepts différent?

$$\frac{z}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{w}{1} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

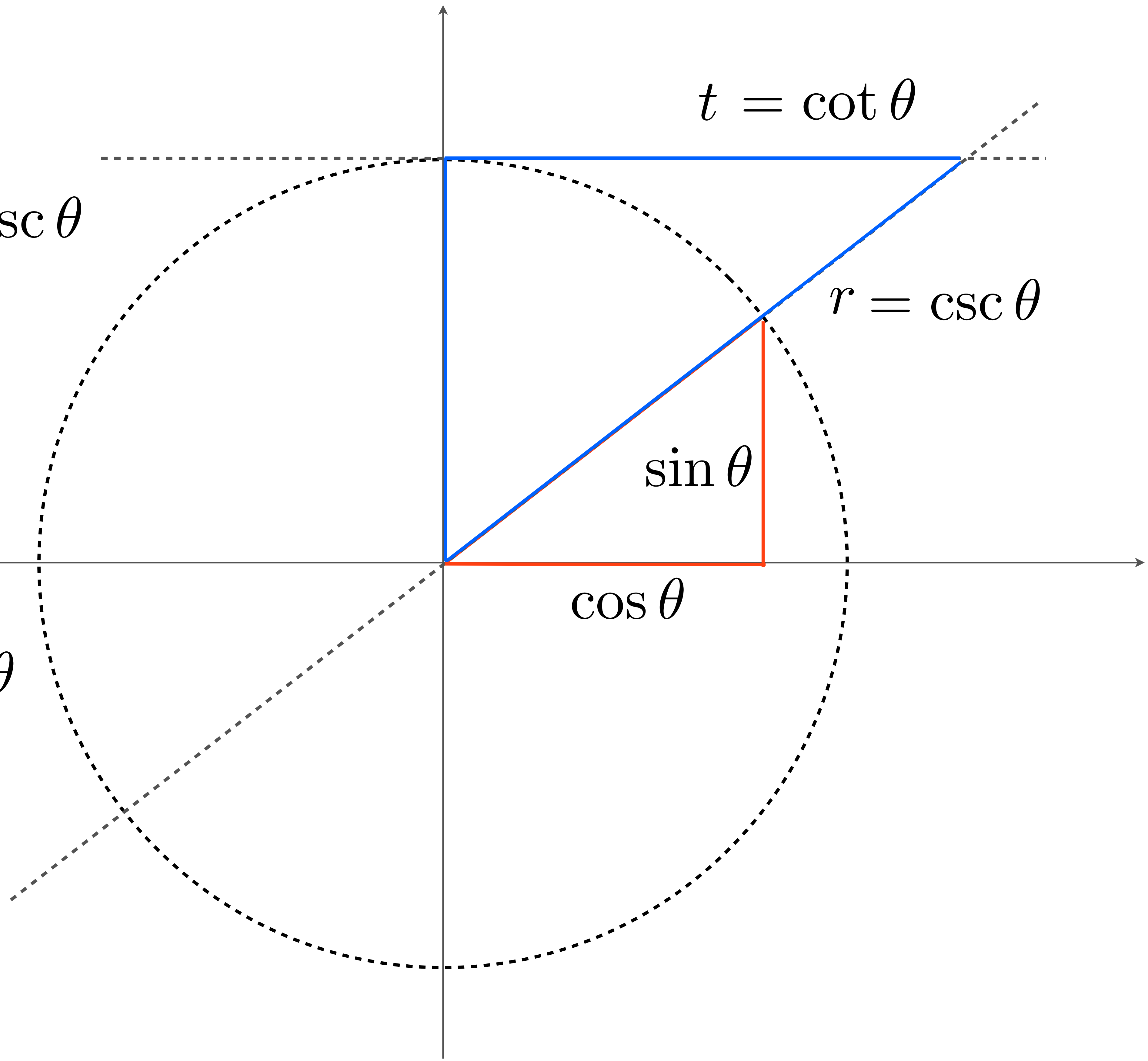


On a gratis que

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\frac{t}{1} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$



On a par Pythagore

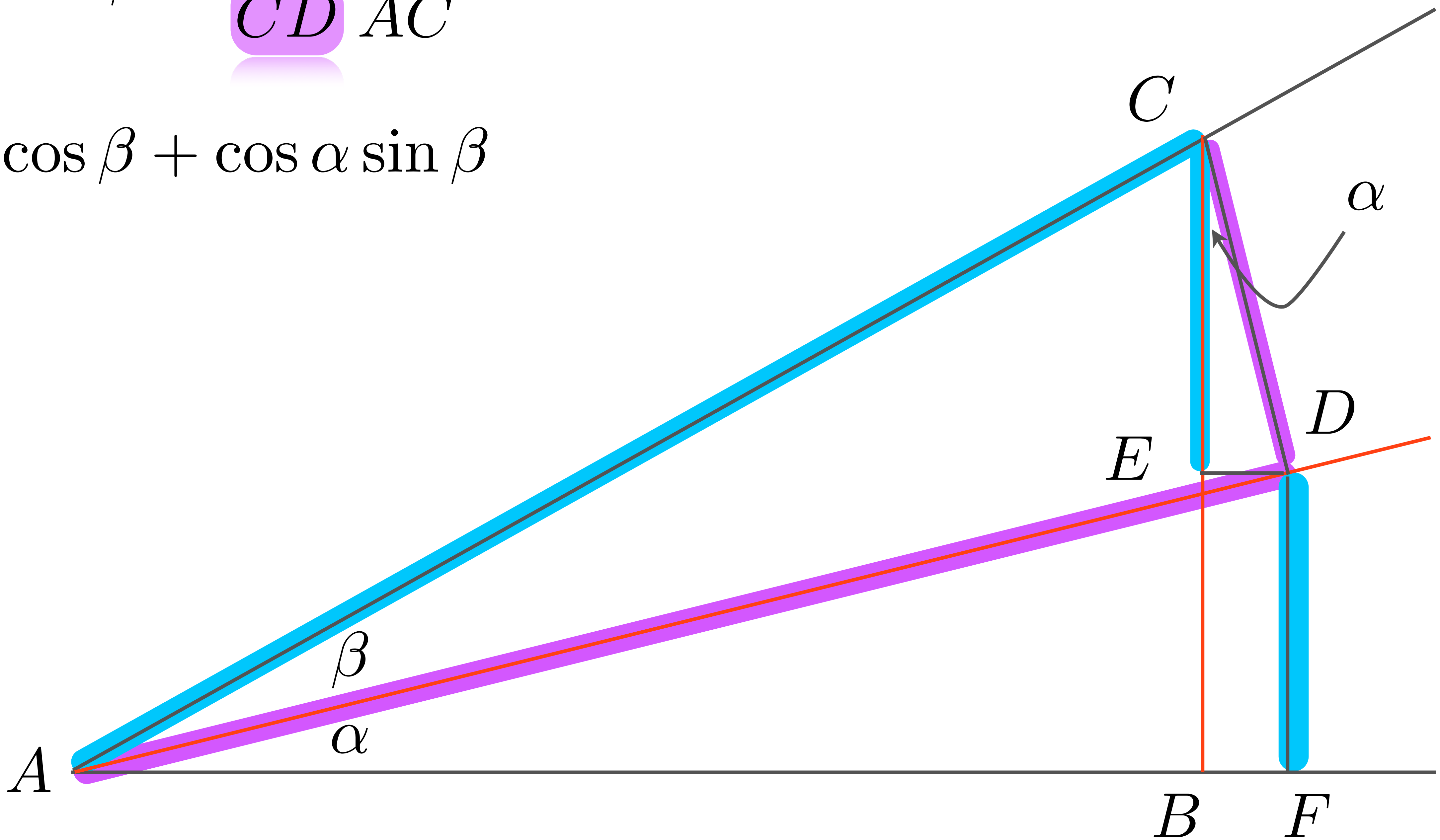
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BC}{AC} = \frac{BE+EC}{AC} = \frac{BE}{AC} + \frac{EC}{AC} = \frac{DF}{AC} + \frac{EC}{AC}$$

$$= \frac{DF}{AD}\frac{AD}{AC} + \frac{EC}{AC} = \sin\alpha\cos\beta + \frac{EC}{AC}$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \frac{EC}{CD}\frac{CD}{AC}$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



On est maintenant en mesure de trouver des rapports trigonométrique d'angle qui ne sont pas remarquables.

Exemple

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4}$$

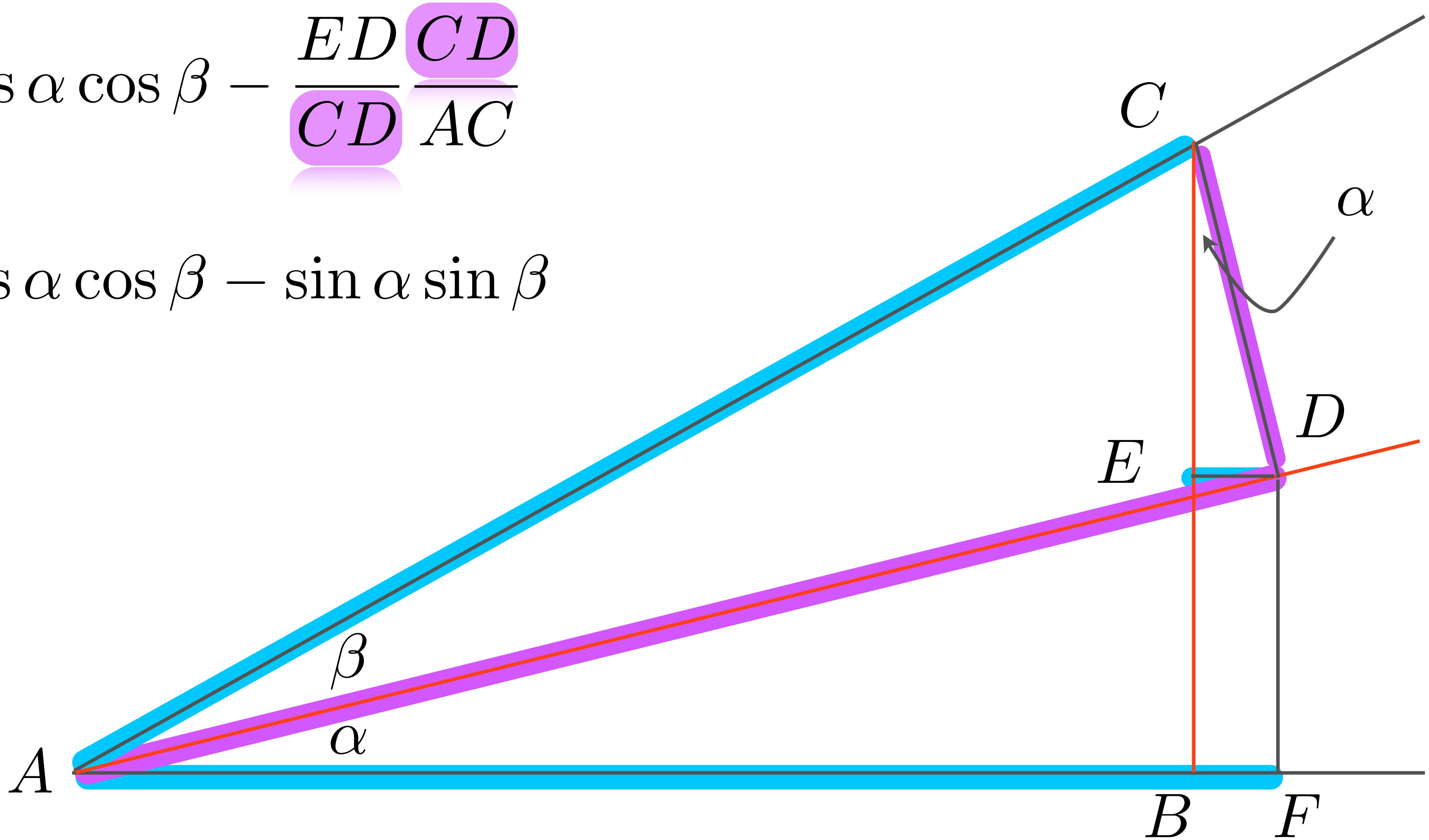
$$= \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AB}{AC} = \frac{AF - BF}{AC} = \frac{AF}{AC} - \frac{BF}{AC} = \frac{AF}{AC} - \frac{ED}{AC}$$

$$= \frac{AF}{AD}\frac{AD}{AC} - \frac{ED}{AC} = \cos\alpha\cos\beta - \frac{ED}{AC}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \frac{ED}{CD}\frac{CD}{AC}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$



Faites les exercices suivants

49 et 50

De ces deux identités

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

on peut en déduire d'autre.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos\alpha \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Exemple

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

De ces deux identités

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

on peut aussi déduire.

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$+$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \cos^2\theta$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\theta = \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Exemple

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \qquad = \sqrt{\frac{\frac{2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \qquad = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Faites les exercices suivants

Trouver l'identité pour $\sin \frac{\theta}{2}$

51 à 56

Devoir:

#49 à 56

et

p. 466 # 38