1.4 LOGARITHMES

cours 4

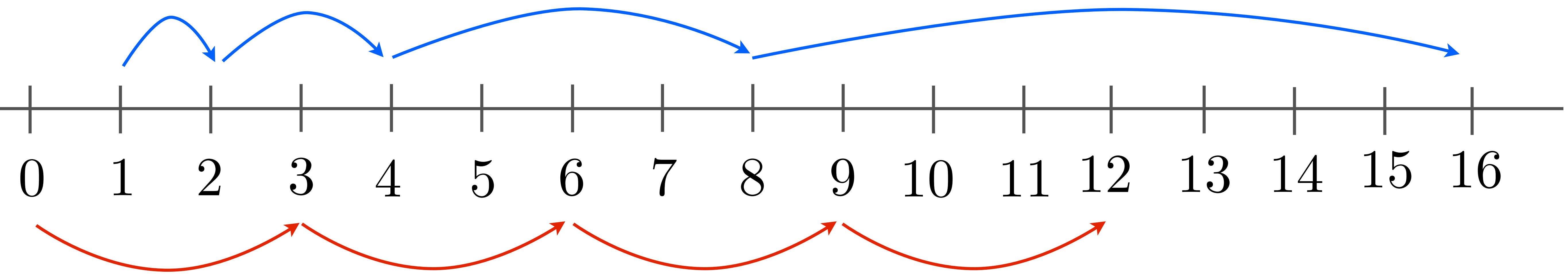
De la même manière que

$12 \div 3 = 4$ $\qquad$ $3 \times 4 = 12$

donne le nombre de bonds de +3 nécessaire pour atteindre 12

$\log_2 16 = 4$ $\qquad$ $2^4 = 16$

donne le nombre de bonds de x 2 nécessaire pour atteindre 16



Logarithme

On définit $\log_a b$ comme l'inverse de l'exposant.

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Exemple $\log_2 8 = 3$ car $2^3 = 8$

Notation:

$$\log_{10} a = \log a$$

$$\log_e a = \ln a$$

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

Faites les exercices suivants

23, 24 et 25.

Propriétés des logarithmes

1. $\log_a 1 = 0$

Justification: $a^0 = 1$

2. $\log_a a = 1$

Justification: $a^1 = a$

3. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

Justification:

$\log_a(bc) = n \Longleftrightarrow a^n = bc$

$\log_a b = m \quad \Longleftrightarrow a^m = b$

$\log_a c = r \quad \Longleftrightarrow a^r = c$

$n = m + r$

$a^n = bc = a^m a^r = a^{m+r}$

Exemple

$$\log_2(4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

$$2^5 = 32 = 4 \times 8$$

4. $\log_a(b^n) = n \log_a b$

Justification:

$$\log_a(b^n) = m \iff a^m = b^n$$

$$\log_a(b) = r \iff a^r = b$$

$$m = nr$$

$$a^m = b^n = (a^r)^n = a^{nr}$$

Exemple

$$\log_2(8^3) = 3\log_2(8) = 3 \times 3 = 9$$

$$2^9 = 2^{3\times 3} = (2^3)^3 = (8)^3$$

5. $\log_a b \log_b c = \log_a c$

Justification:

$\log_a b = n \iff a^n = b$

$\log_b c = m \iff b^m = c$

$\log_a c = r \iff a^r = c$

$r = nm$

$a^r = c = b^m = (a^n)^m = a^{nm}$

Exemple

$\log_2 8 \times \log_8 64 = \log_2 64 = 6$

$2^6 = 64 = 8^2 = (2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$

$\log_2 8 = 3 \qquad \log_8 64 = 2$

Remarque: Cette propriété des logarithmes peut sembler magique, car elle permet de calculer le produit de deux nombres sans pour autant être capable de les connaitre.

$$\log_3 12 = ?$$

$$3^2 = 9 < 12 < 27 = 3^3$$

$$2 < \log_3 12 < 3$$

$$\log_{12} 81 = ?$$

$$12^1 = 12 < 81 < 144 = 12^2$$

$$1 < \log_{12} 81 < 2$$

$$\log_3 12 \times \log_{12} 81 = \log_3 81 = 4$$

$$3^4 = 81 = 12^{\log_{12} 81} = (3^{\log_3 12})^{\log_{12} 81} = 3^{\log_3 12 \times \log_{12} 81}$$

Formule de changement de base

La dernière propriété que l'on vient de voir peut être modifiée légèrement comme suit:

$$\log_c a \times \log_a b = \log_c b$$

$$\frac{\cancel{\log_c a} \times \log_a b}{\cancel{\log_c a}} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Cette égalité a la particularité que le nombre c n'apparait que d'un côté.

Exemple

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{5}{3}$$

Formule de changement de base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Dans les faits on n'est pratiquement jamais en mesure d'évaluer un logarithme à la main.

À l'époque on utilisait des tables, mais de nos jours on utilise une calculatrice.

Par contre les calculatrices ne donnent que les logarithmes en base 10 ou e.

La formule de changement de base nous permet donc d'évaluer avec la calculatrice n'importe quel logarithme dans n'importe quelle base.

Que vaut $3^{\log_3 7}$?

Cette question semble difficile, car on a tendance à vouloir commencer par évaluer

$$\log_3 7$$

Mais on ne peut pas faire ça sans la calculatrice!

$\log_3 7 = a$ qu'on ne connait pas

mais on sait que $3^a = 7$

$$3^{\log_3 7} = 3^a = 7$$

En général on a

$$a^{\log_a b} = b$$

En fait, cette propriété illustre le fait que le logarithme est l'inverse de l'exponentiation.

Dans le même ordre d'idée, on a aussi

$$\log_a a^b = b$$

mais ça se déduit bien des propriétés.

$$\log_a a^b = b \log_a a = b \times 1 = b$$

Faites les exercices suivants

#26 à 29.

Devoir:

#23 à 29

p379 # 1 à 3

p388 # 3