1.2 NOMBRES PREMIERS

cours 2

Division avec reste

Exemple Prenons $463 \div 3$ On va utiliser la notation crochet.

On commence par la plus grande décimale

$$\begin{array}{rr|l}
 & 463 & 3 \\ \cline{3-3}
- & 300 & 100 \\ \cline{2-2}
 & 163 & \;\;50 \;+ \\
- & 150 & \;\;\;\;4 \\ \cline{2-3}
 & 13 & 154 \\
- & 12 & \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}$$

Le reste de la division

$$\begin{array}{r}
3 \times 1 \times 100 = 300 \\
3 \times 5 \times 10 = 150 \;+ \\
3 \times 4 \times 1 = 12 \\ \hline
462
\end{array}$$

$$463 = 3 \times 154 + 1$$

$$\frac{463}{3} = \frac{3 \times 154 + 1}{3} = \frac{\cancel{3} \times 154}{\cancel{3}} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} \times 154 + \frac{1}{3}$$

$$= 154 + \frac{1}{3}$$

Division avec reste

Exemple Prenons $463 \div 3$ On va utiliser la notation crochet.

On commence par la plus grande décimale

$$\begin{array}{rl|l}
 & 463 & \ 3 \\ \cline{3-3}
- & 300 & 100 \\ \cline{2-2}
 & 163 & \ \ 50 \ + \\
- & 150 & \ \ \ \ 4 \\ \cline{2-3}
 & 13 & 154 \\
- & 12 & \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}$$

Habituellement on ne met pas les zéros

$$\begin{array}{rl|l}
 & 463 & \ 3 \\ \cline{3-3}
- & 3 & 154 \\ \cline{2-2}
 & 16 & \\
- & 15 & \\ \cline{2-2}
 & 13 & \\
- & 12 & \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}$$

$$463 = 3 \times 154 + 1$$

$$\frac{463}{3} = \frac{3 \times 154 + 1}{3} = \frac{\cancel{3} \times 154}{\cancel{3}} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} \times 154 + \frac{1}{3}$$

$$= 154 + \frac{1}{3}$$

Exemple

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 43951 & \;13 \\ \cline{3-3}
- & 39 & \;3380 \\ \cline{2-2}
 & 49 & \\
- & 39 & \\ \cline{2-2}
 & 105 & \\
- & 104 & \\ \cline{2-2}
 & 11 & \\
- & 0 & \\ \cline{2-2}
 & 11 &
\end{array}
$$

trop grand

$$
\begin{array}{rr}
 & 13 \\
\times & 3 \\ \hline
 & 39
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {}^{2}13 \\
\times & 9 \\ \hline
 & 117
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & {}^{2}13 \\
\times & 8 \\ \hline
 & 104
\end{array}
$$

Donc $43951 = 338 \times 13 + 11$

NON! On a pas fini!

C'est plutôt $43951 = 3380 \times 13 + 11$

ou bien $\dfrac{43951}{13} = 3380 + \dfrac{11}{13}$

Faites les exercices suivants

6 et 7

Définition

On dit qu'un nombre b est un diviseur de a s'il existe un nombre c

tel que $\quad a = b \times c \qquad$ avec $\quad a, b, c \in \mathbb{N}$

on note $\quad b|a$

Exemple

$7|35 \qquad$ car $\quad 35 = 7 \times 5$

Remarque:

Dire que $b|a$ est équivalent à dire que le reste de la division de a par b est 0.

Définition

Un nombre est premier s'il n'a que 1 et lui même comme diviseur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Théorème (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout nombre entier peut s'écrire comme un produit de nombre premier d'une unique façon.

$$a = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n$$

Exemple $756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$

$$
\begin{array}{r|l}
756 & 2 \\ \hline
-\,600 & 378 \\ \cline{1-1}
156 & \\
-\,140 & \\ \cline{1-1}
16 & \\
-\,16 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
378 & 2 \\ \hline
-\,200 & 189 \\ \cline{1-1}
178 & \\
-\,160 & \\ \cline{1-1}
18 & \\
-\,18 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
189 & 3 \\ \hline
-\,180 & 63 \\ \cline{1-1}
9 & \\
-\,9 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$63 = 9 \times 7$$
$$= 3 \times 3 \times 7$$

Malheureusement, il n'existe pas de façon beaucoup plus efficace pour factoriser un nombre en nombre premier que d'essayer de le diviser successivement par tous les nombres premiers plus petits.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 143 & 2 \\ \cline{3-3}
- & 140 & 71 \\ \cline{2-2}
 & 3 & \\
- & 2 & \\ \cline{2-2}
 & 1 & {\color{red}\neq 0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 143 & 3 \\ \cline{3-3}
- & 120 & 47 \\ \cline{2-2}
 & 23 & \\
- & 21 & \\ \cline{2-2}
 & 2 & {\color{red}\neq 0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 143 & 5 \\ \cline{3-3}
- & 100 & 28 \\ \cline{2-2}
 & 43 & \\
- & 40 & \\ \cline{2-2}
 & 3 & {\color{red}\neq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 143 & 7 \\ \cline{3-3}
- & 140 & 20 \\ \cline{2-2}
 & 3 & \\
- & 0 & \\ \cline{2-2}
 & 3 & {\color{red}\neq 0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 143 & 11 \\ \cline{3-3}
- & 110 & 13 \\ \cline{2-2}
 & 33 & \\
- & 33 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$$143 = 11 \times 13$$

Voici quelques trucs pour savoir si un nombre est divisible.

1) Un nombre est divisible par 2 si sa dernière décimale est paire.

2) Un nombre est divisible par 5 si sa dernière décimale est 5 ou 0.

3) Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses décimales est divisible par 3.

Exemple

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 4392 & 3 \\ \cline{3-3}
- & 3000 & 1464 \\ \cline{2-2}
 & 1392 & \\
- & 1200 & \\ \cline{2-2}
 & 192 & \\
- & 180 & \\ \cline{2-2}
 & 12 & \\
- & 12 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$$4 + 3 + 9 + 2 = 18 = 3 \times 6$$

$$
\begin{aligned}
abcd &= a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d \\
&= a \times (999 + 1) + b \times (99 + 1) + c \times (9 + 1) + d \\
&= a \times 999 + b \times 99 + c \times 9 + a + b + c + d \\
&= 3(a \times 333 + b \times 33 + c \times 3) + (a + b + c + d)
\end{aligned}
$$

4) Un nombre est divisible par 7 si son nombre de dizaines moins 2 fois sa dernière décimale est divisible par 7.

Exemple

$$\begin{array}{r|l} 301 & 7 \\ \hline -28 & 43 \\ 21 & \\ -21 & \\ 0 & \end{array}$$

$$30 - 2 \times 1 = 28 = 4 \times 7$$

Exemple

$$\begin{array}{r|l} 4095 & 7 \\ \hline -35 & 585 \\ 59 & \\ -56 & \\ 35 & \\ -35 & \\ 0 & \end{array}$$

$$409 - 2 \times 5 = 399$$

$$39 - 2 \times 9 = 21$$

$$= 3 \times 7$$

Pourquoi ça marche?

$$A = d \times 10 + u \qquad B = d - 2 \times u$$

$$B \times 10 = (d - 2 \times u) \times 10 = d \times 10 - 20 \times u$$

$$A = B \times 10 + 21 \times u = d \times 10 - 20 \times u + 21 \times u$$

$$= d \times 10 + u$$

Donc si $7|B$

$$A = B \times 10 + 21 \times u = (7 \times n) \times 10 + 21 \times u$$

$$= 7 \times (n \times 10 + 3 \times u)$$

$7|A$ aussi

Inversement

$$A = d \times 10 + u \qquad B = d - 2 \times u$$

$$-2 \times A = -2(d \times 10 + u) = -d \times 20 - 2 \times u$$

$$B = -2 \times A + 21 \times d = -d \times 20 - 2 \times u + 21 \times d$$
$$= d - 2 \times u$$

Donc si $7|A$ $\quad B = -2 \times A + 21 \times d$

$$= -2 \times (7 \times m) + 21 \times d$$

$$= 7 \times (-2 \times m + 3 \times d)$$

$7|B$ aussi

4) Un nombre est divisible par 11 si la somme alternée de ses décimales est divisible par 11.

Exemple

$$\begin{array}{rl}
8041 & \,|\,11 \\
-77 & \overline{\;731\;} \\
\hline
34 & \\
-33 & \\
\hline
11 & \\
-11 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad 8-0+4-1=11$$

Exemple

$$\begin{array}{rl}
939653 & \,|\,11 \\
-88 & \overline{\;85423\;} \\
\hline
59 & \\
-55 & \\
\hline
46 & \\
-44 & \\
\hline
25 & \\
-22 & \\
\hline
33 & \\
-33 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad \begin{aligned} 9-3+9-6+5-3 &= 22 \\ &= 2\times 11 \end{aligned}$$

Pourquoi ça marche?

$$
\begin{aligned}
abcd &= a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d \\
&= a \times (1100 - 100) + b \times (110 - 10) + c \times (11 - 1) + d \\
&= 11 \times (a \times 100 + b \times 10 + c) - a \times 100 - b \times 10 - c + d \\
&= 11 \times N - a \times 100 - b \times 10 - c + d \\
&= 11 \times N - a \times (110 - 10) - b \times (11 - 1) - c + d \\
&= 11 \times N - 11(a \times 10 + b) + a \times 10 + b - c + d \\
&= 11 \times M + a \times 10 + b - c + d \\
&= 11 \times M + a \times (11 - 1) + b - c + d \\
&= 11 \times T - a + b - c + d \\
&= 11 \times T + (-a + b - c + d)
\end{aligned}
$$

Donc pour décomposer un nombre en nombres premiers on peut utiliser ces trucs pour allez plus vite et ne pas diviser inutilement.

143 3 n'est ni pair ni 5 donc $2 \nmid 143$ et $5 \nmid 143$

$1+4+3=8$ $3 \nmid 8$ $3 \nmid 143$

$14-3\times 2=8$ $7 \nmid 8$ $7 \nmid 143$

$1-4+3=0$ $0=0\times 11$ $11|143$

$$\begin{array}{rr|l} & 143 & 11 \\ \cline{3-3} - & 110 & 13 \\ \cline{2-2} & 33 & \\ - & 33 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

$$143 = 11 \times 13$$

Malheureusement, parfois on doit essayer avec beaucoup de premiers avant de trouver la décomposition.

$$8633 = 89 \times 97$$

997 est un nombre premier.

Saviez-vous que c'est cette difficulté qui est exploitée pour barrer les comptes informatiques avec des mots de passe?

Faites les exercices suivants

Faites les exercices suivants

8, 9 et 10

Définition Le plus grand commun diviseur de deux nombres, noté

$$pgcd(a, b) = c$$

est le plus grand nombre entier c tel que $c|a$ et $c|b$

Exemple $pgcd(15, 21) = 3$ car $3|15$ et $3|21$

Définition Le plus petit commun multiple de deux nombres, noté

$$ppcm(a, b) = c$$

est le plus petit nombre entier c tel que $a|c$ et $b|c$

Exemple $ppcm(21, 14) = 42$ car $21|42$ et $14|42$

La décomposition en nombre premier permet aisément de trouver le pgcd et le ppcm.

Pour trouver le pgcd de deux nombres, il suffit de les décomposer en nombre premier.

Ensuite on prend le produit de tous les nombres premiers qu'ils ont en commun.

Exemple

$$pgcd(1260, 525) = 7 \times 5 \times 3 = 105$$

$$1260 = 126 \times 10 = 42 \times 3 \times 2 \times 5 = 7 \times 6 \times 3 \times 2 \times 5$$

$$= 7 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5$$

$$525 = 105 \times 5 = 35 \times 3 \times 5 = 7 \times 5 \times 3 \times 5$$

Pour trouver le ppcm de deux nombres, il faut que ce nombre possède tous les facteurs premiers des deux nombres, mais pas plus.

Pour ça il suffit de prendre

$$ppcm(a,b) = \frac{a \times b}{pgcd(a,b)}$$

Exemple

$$ppcm(105,66) = \frac{105 \times 66}{3}$$

$$= \frac{(3 \times 5 \times 7) \times (2 \times 3 \times 11)}{3}$$

$$= 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 11$$

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

Faites les exercices suivants

11

Définition

Une fraction est dite réduite si le pgcd du dénominateur et du numérateur est 1.

Exemple

$$\frac{330}{1365} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 11}{3 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{2 \times 11}{7 \times 13} = \frac{22}{91}$$

$$330 = 10 \times 33$$
$$= 2 \times 5 \times 3 \times 11$$

$$pgcd(330, 1365) = 3 \times 5$$

$$pgcd(22, 91) = 1$$

$$1365 = 5 \times 273$$
$$= 5 \times 3 \times 91$$
$$= 5 \times 3 \times 7 \times 13$$

Faites les exercices suivants

12

Devoir: # 6 à 16

et

p.16 ex 1.3