1.8 PRODUIT SCALAIRE

cours 8

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque

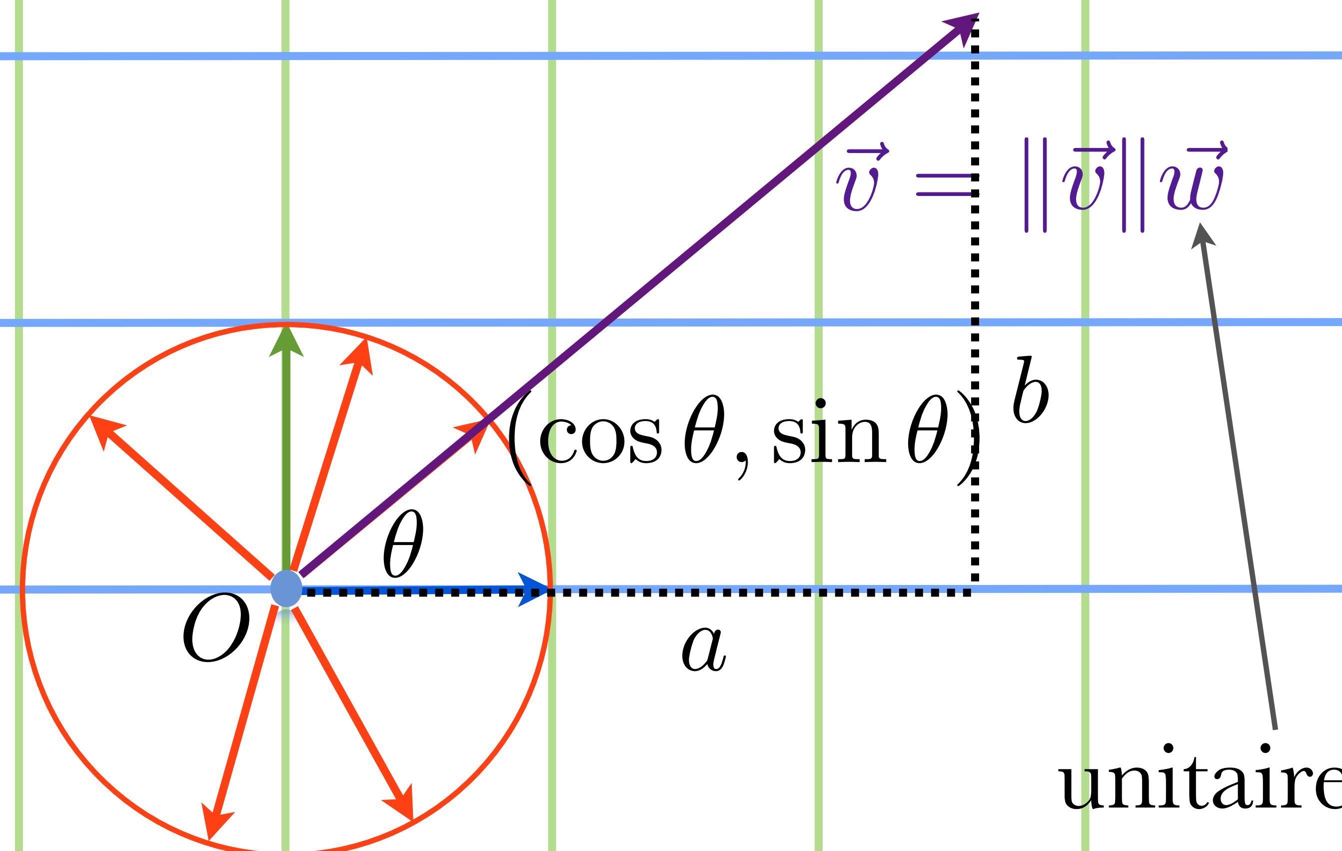
Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \qquad \text{car} \quad \|\vec{w}\| = \left| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \right| \|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1$$

car $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

$$\frac{a}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta$$

$$a = \|\vec{v}\| \cos\theta$$



mais $\;\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

donc $\;\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta) = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta)$

$$= (a, b)$$

Exemple

Trouver le vecteur unitaire du vecteur

$$\vec{v} = (4, -3)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\hat{v} = \vec{v}_u = \frac{1}{5}(4, -3) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Une notation qui est beaucoup utilisée, particulièrement en physique

Exemple

Trouver le vecteur unitaire du vecteur

$$\vec{v} = (-50, 120) = 10(-5, 12)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-50)^2 + 120^2} = \ldots$$

$$\|\vec{v}\| = |10|\|(-5, 12)\| = 10\sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$

$$= 10\sqrt{25 + 144} = 10\sqrt{169} = 10 \cdot 13 = 130$$

$$\vec{v}_u = \frac{1}{130}(-50, 120) = \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

Étant donné n'importe quel vecteur, on peut en construire un autre ayant le même sens, la même direction mais de la longueur que l'on souhaite de la manière suivante;

$$\vec{w} = \frac{k}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

Exemple

Construire un vecteur de longueur 5 dans la direction et le sens du vecteur:

$$\vec{u} = (-2, 3)$$

$$\vec{w} = \frac{5}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 3^2}}(-2, 3) = \left(-\frac{10}{\sqrt{13}}, \frac{15}{\sqrt{13}}\right)$$

Faites les exercices suivants

#67 et 68

Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{u} = (a_1, b_1) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = (a_2, b_2)$$

est le nombre (pas un vecteur)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

À première vue, ce nombre ne semble pas servir à grand-chose.

Mais nous allons voir qu'il renferme de l'information intéressante.

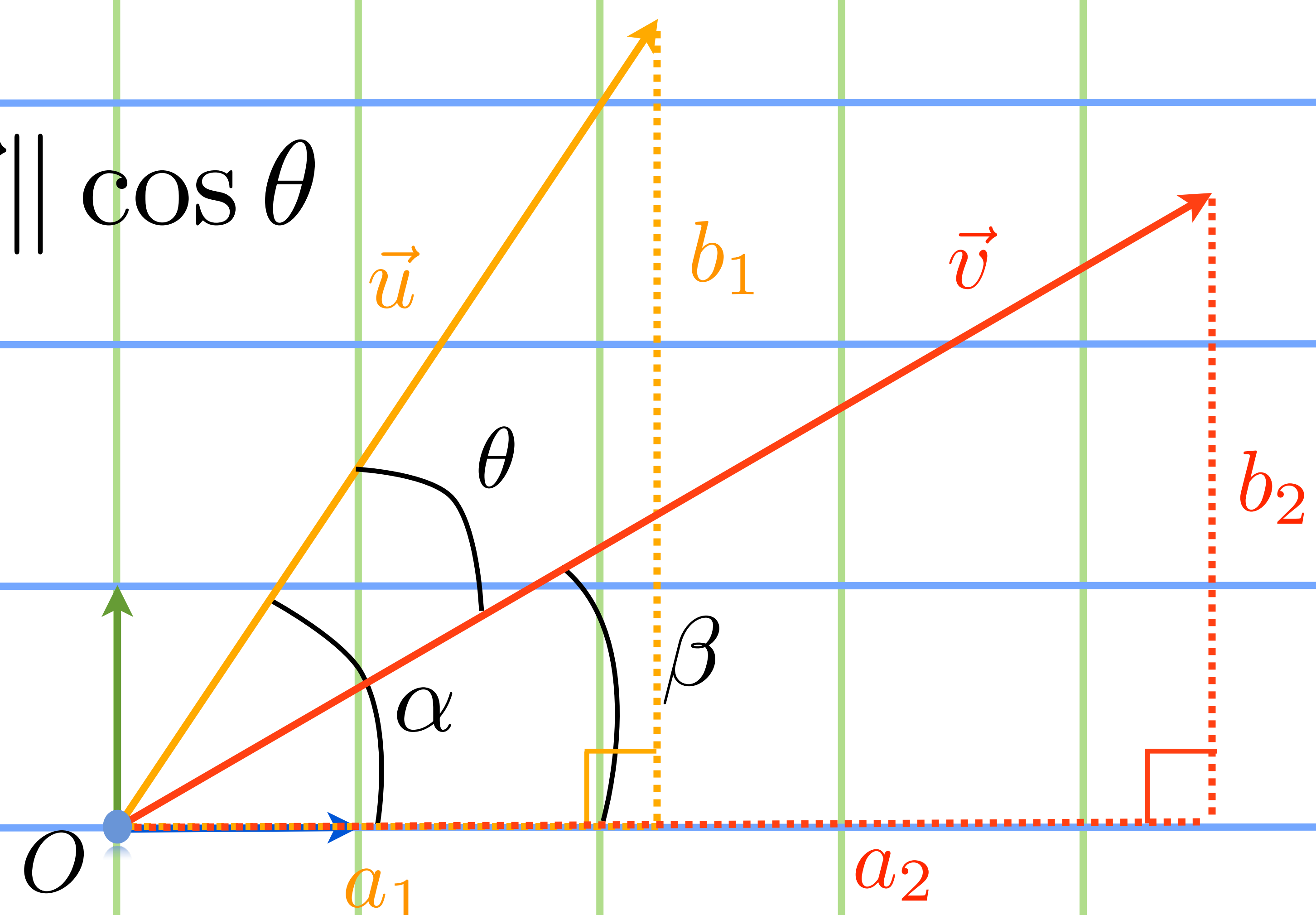
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

$$= (\|\vec{u}\| \cos\alpha)(\|\vec{v}\| \cos\beta) + (\|\vec{u}\| \sin\alpha)(\|\vec{v}\| \sin\beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \qquad = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha - \beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\beta - \alpha)$$

$$= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



On a donc deux façons de calculer la même quantité.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

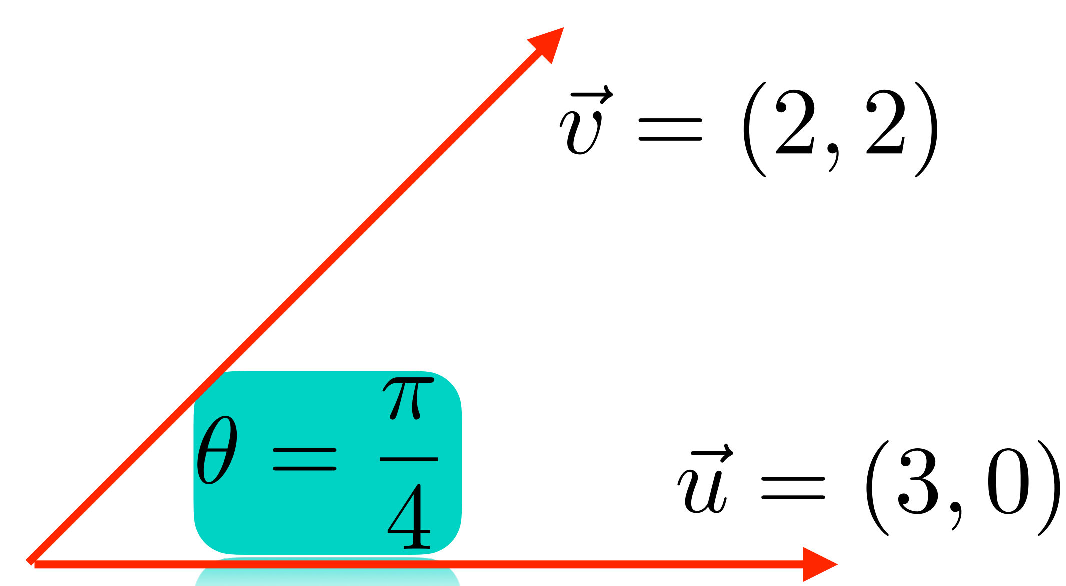
Exemple

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 0) \cdot (2, 2) = 3 \times 2 + 0 \times 2 = 6$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{8} \cos \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{8}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{16}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$$



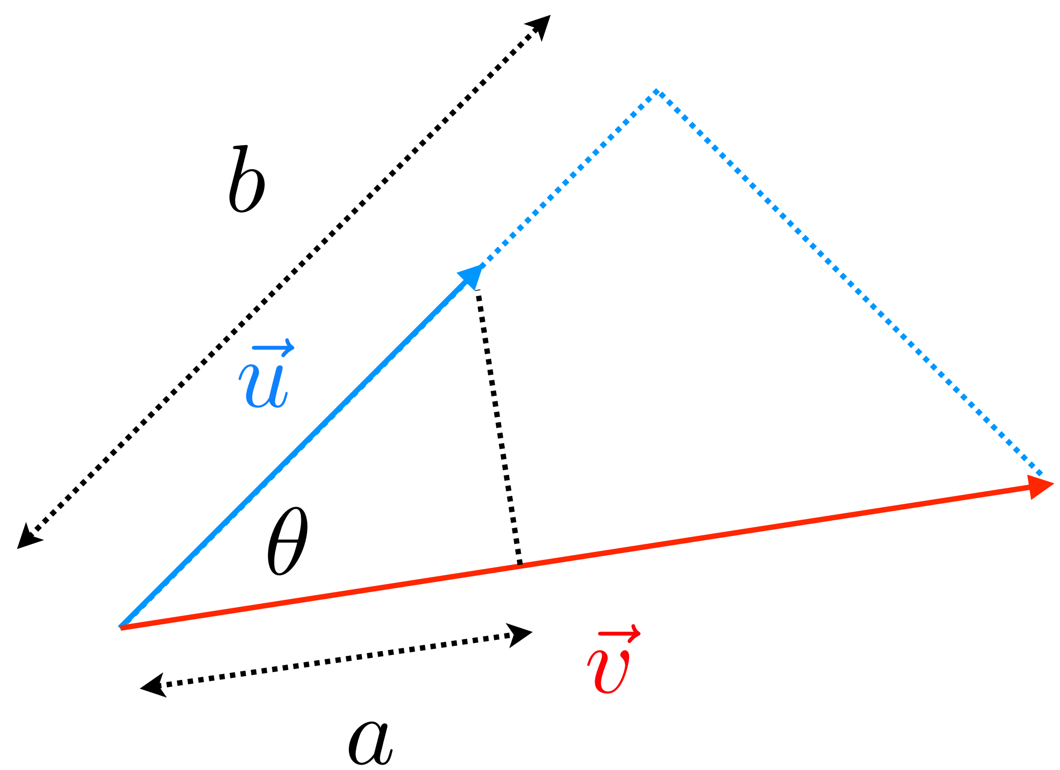
Faites les exercices suivants

#69 et 70

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\|\vec{u}\|}$$

$$a = \|\vec{u}\| \cos\theta$$



$$\cos\theta = \frac{b}{\|\vec{v}\|}$$

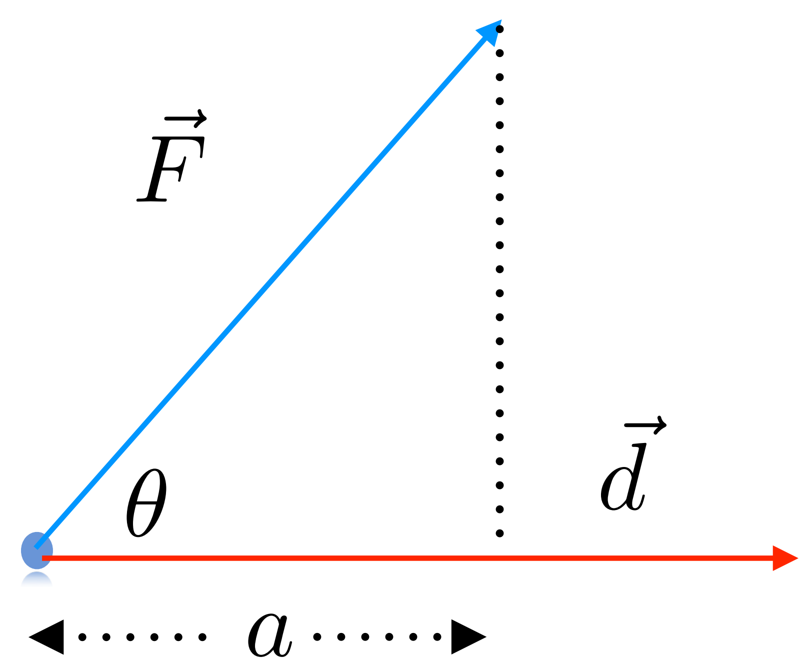
$$b = \|\vec{v}\| \cos\theta$$

En physique, le travail est la force multipliée par le déplacement.

Or, seule la portion de la force qui est dans la direction du déplacement est considérée.

$$\cos\theta = \frac{a}{\|\vec{F}\|}$$

$$\begin{aligned} W &= a\|\vec{d}\| \\ &= \|\vec{F}\|\cos\theta\,\|\vec{d}\| \\ &= \|\vec{d}\|\,\|\vec{F}\|\cos\theta \\ &= \vec{d}\cdot\vec{F} \end{aligned}$$

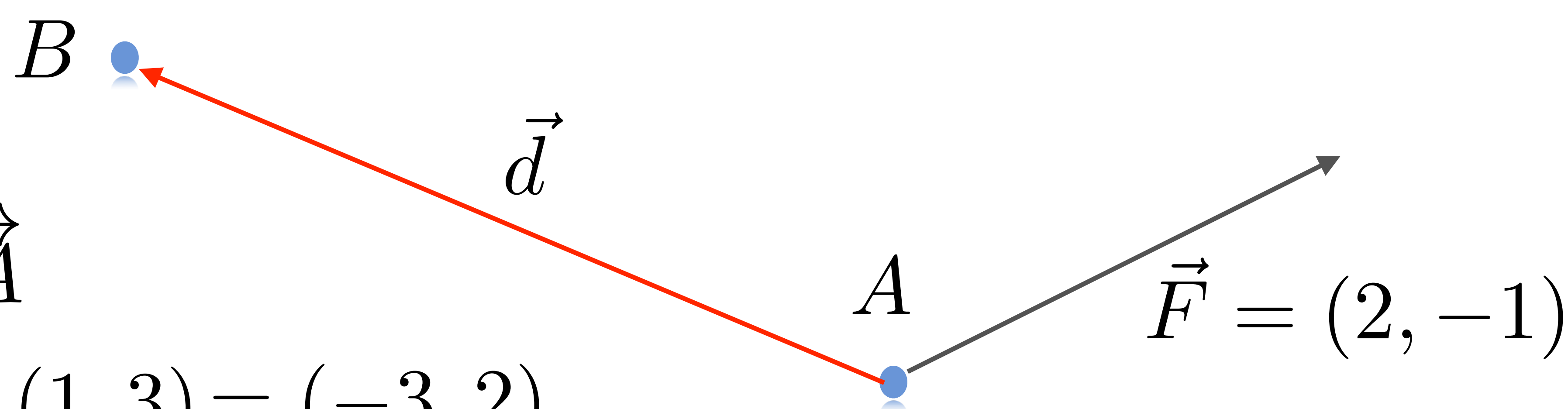


$$a = \|\vec{F}\|\cos\theta$$

Exemple

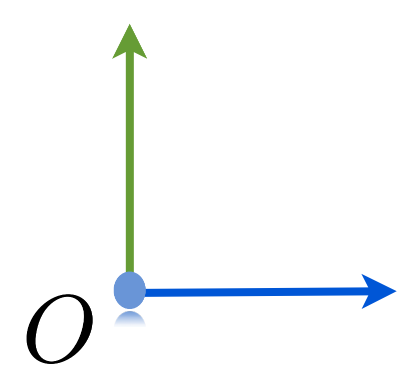
Un particule qui se déplace d'un point $A(1,3)$ à un point $B(-2,5)$ est soumis à une force $\vec{F} = (2,-1)$

Le travail effectué par cette particule est:



$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (-2,5) - (1,3) = (-3,2)$$

$$W = \vec{d} \cdot \vec{F} = (-3,2) \cdot (2,-1) = -6 - 2 = -8$$



Faites les exercices suivants

Faites les exercices suivants

71

Angle entre deux vecteurs

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\|}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\|} \right)$$

Exemple Trouver l'angle entre les vecteurs

$$\vec{u} = (-\sqrt{3}, 2) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = (-5, \sqrt{3})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (5+2)\sqrt{3}$$
$$= 7\sqrt{3}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{25+3} = \sqrt{28}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{28}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{7}\sqrt{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{7 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Faites les exercices suivants

72

Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Preuve:

$(\Longrightarrow)$ Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

et donc, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$(\Longleftarrow)$ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$, mais

donc $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$

d'où $\cos\theta = 0$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

Exemple Est-ce que les vecteurs suivants forment un angle droit?

a) $\vec{u} = (-2, 8)$ et $\vec{v} = (10, 2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -20 + 16 = -4 \neq 0 \quad \text{donc non!}$$

b) $\vec{u} = (-10, -12)$ et $\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}\right)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{10 \times 4}{5} + \frac{12 \times 2}{3} = -2 \times 4 + 4 \times 2 = 0$$

donc oui!

Faites les exercices suivants

#73

Devoir: #67 à 73