1.7 RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

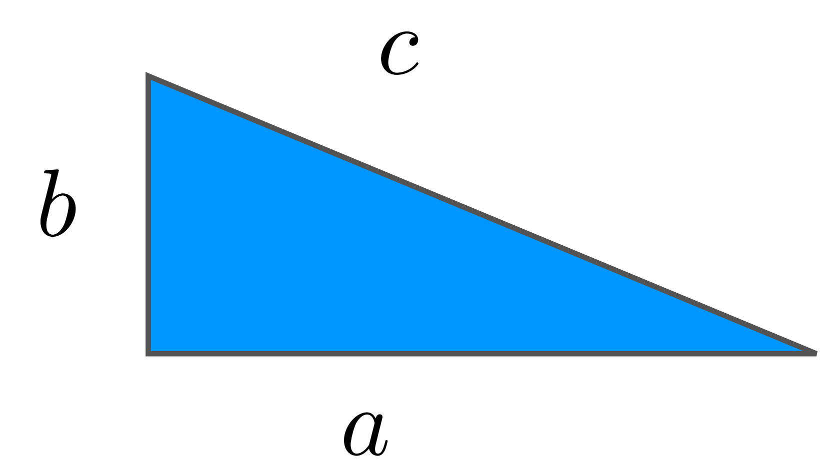
cours 7

$$\underbrace{\text{Tri}}_{\text{Trois}}\underbrace{\text{gono}}_{\text{côtés}}\underbrace{\text{métrie}}_{\text{mesure}}$$

La trigonométrie sert à mesurer les côtés d’un triangle.

Commençons par un triangle rectangle.

Que sait-on sur les triangles?

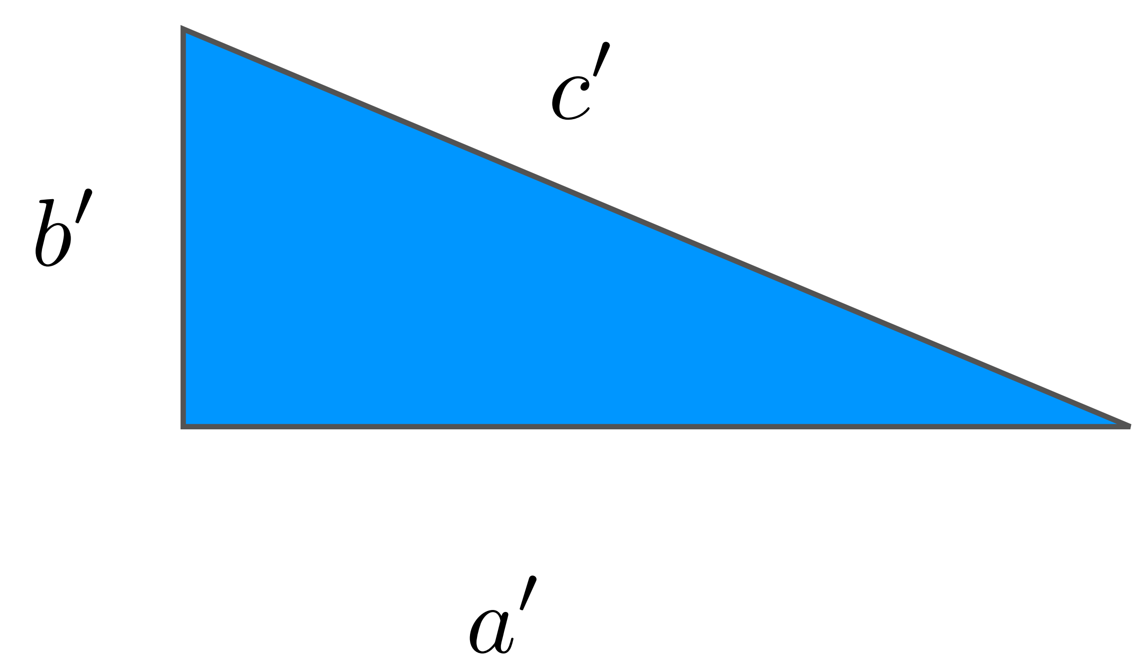


Somme des angles est $180°$.

Le théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$

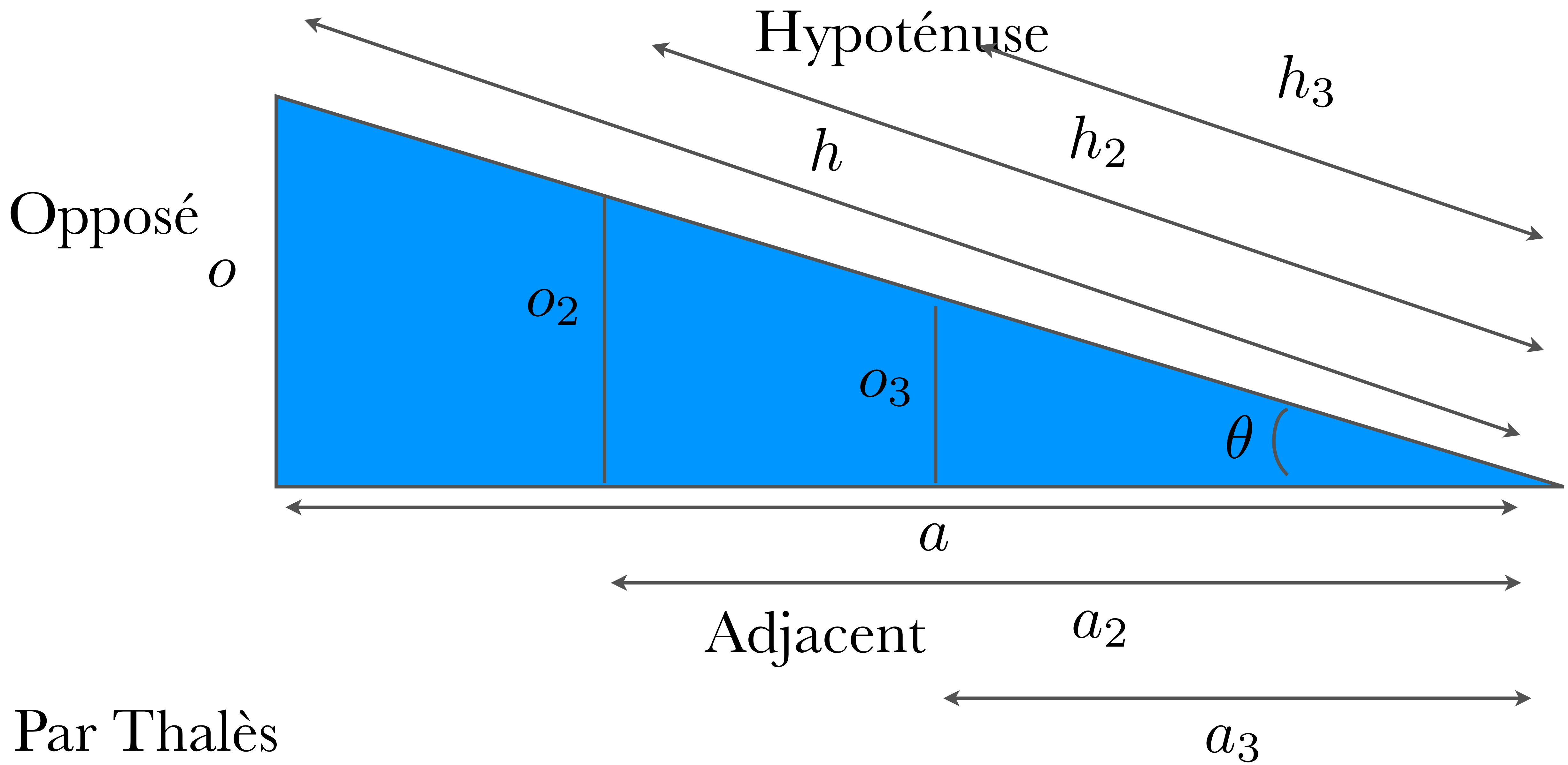
Le théorème de Thalès



Les rapports de côtés homologues de triangles semblables sont égaux

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Si on a un triangle rectangle et qu'on fixe un angle



Par Thalès

$$\frac{a}{h} = \frac{a_2}{h_2} = \frac{a_3}{h_3} \qquad \frac{o}{a} = \frac{o_2}{a_2} = \frac{o_3}{a_3} \qquad \frac{h}{a} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3}$$

$$\frac{o}{h} = \frac{o_2}{h_2} = \frac{o_3}{h_3} \qquad \frac{a}{o} = \frac{a_2}{o_2} = \frac{a_3}{o_3} \qquad \frac{h}{o} = \frac{h_2}{o_2} = \frac{h_3}{o_3}$$

Ces rapports ne dépendent que de l'angle θ

Et ils portent des noms.

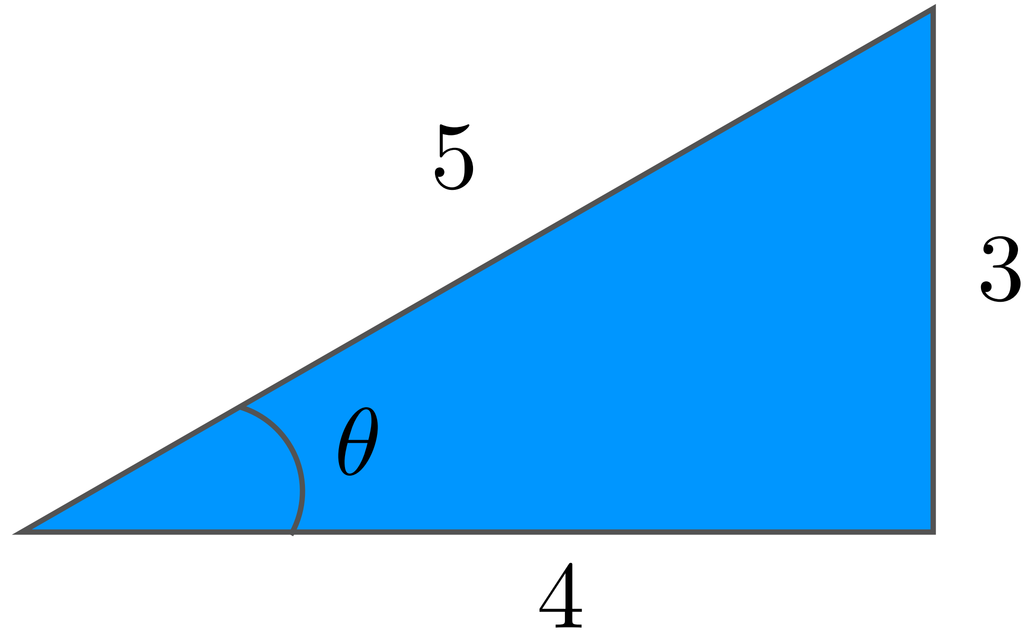
$$\cos\theta = \frac{a}{h} = \frac{a_2}{h_2} = \frac{a_3}{h_3} \qquad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \frac{h}{a} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3}$$

$$\sin\theta = \frac{o}{h} = \frac{o_2}{h_2} = \frac{o_3}{h_3} \qquad \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta = \frac{h}{o} = \frac{h_2}{o_2} = \frac{h_3}{o_3}$$

$$\tan\theta = \frac{o}{a} = \frac{o_2}{a_2} = \frac{o_3}{a_3} \qquad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta = \frac{a}{o} = \frac{a_2}{o_2} = \frac{a_3}{o_3}$$

SOH CAH TOA

Exemple



$$\sin\theta = \frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{3} \qquad \sec\theta = \frac{5}{4} \qquad \cot\theta = \frac{4}{3}$$

Trouver les rapports trigonométriques est relativement simple lorsqu'on connaît les longueurs des côtés.

Par contre dans cet exemple, on a pas vraiment d'information sur la mesure de l'angle.

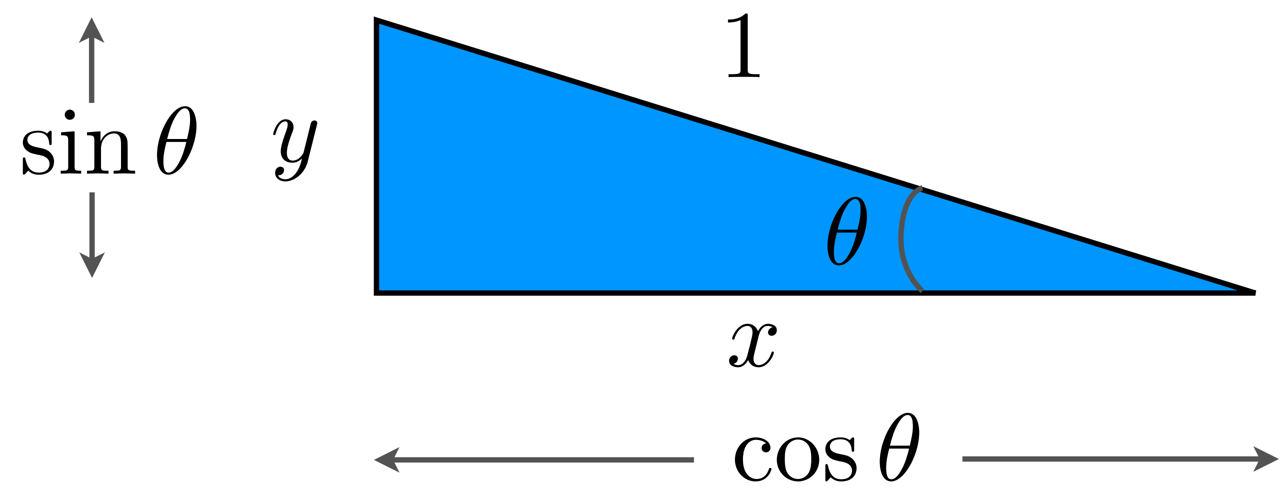
Faites les exercices suivants

p. 466 #28

Puisque les rapports trigonométriques dépendent que de l'angle aussi bien prendre un triangle dont un des côtés est simple.

$$\frac{x}{1} = \cos\theta \quad = x$$

$$\frac{y}{1} = \sin\theta \quad = y$$



Donc les longueurs des côtés d'un triangle d'hypoténuse 1 sont le sinus et le cosinus de l'angle.

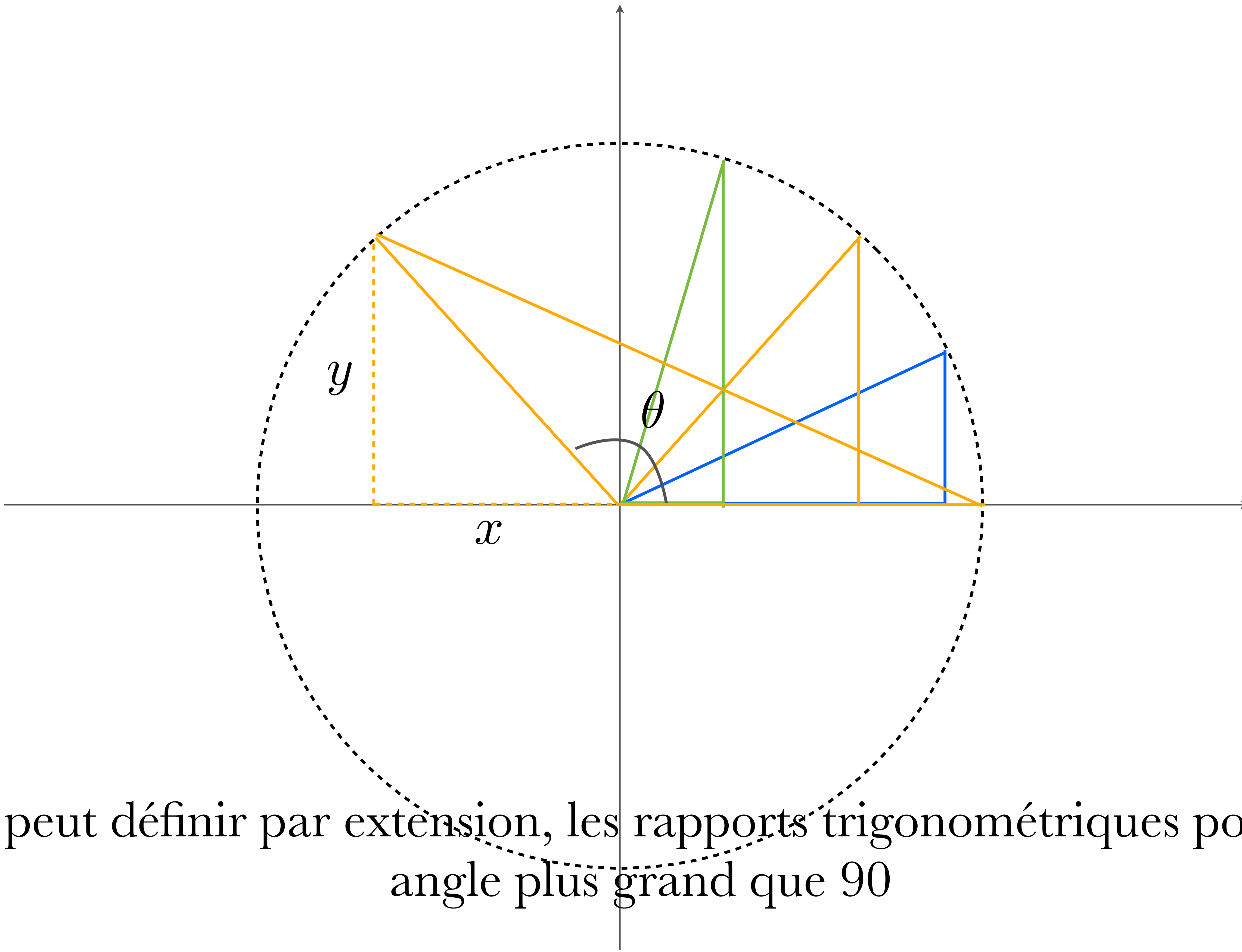
En prime, on a l'identité trigonométrique suivante:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Si on regarde tous les triangles rectangles d'hypoténuse 1

L'hypoténuse est un rayon d'un cercle de rayon 1



On peut définir par extension, les rapports trigonométriques pour un angle plus grand que 90

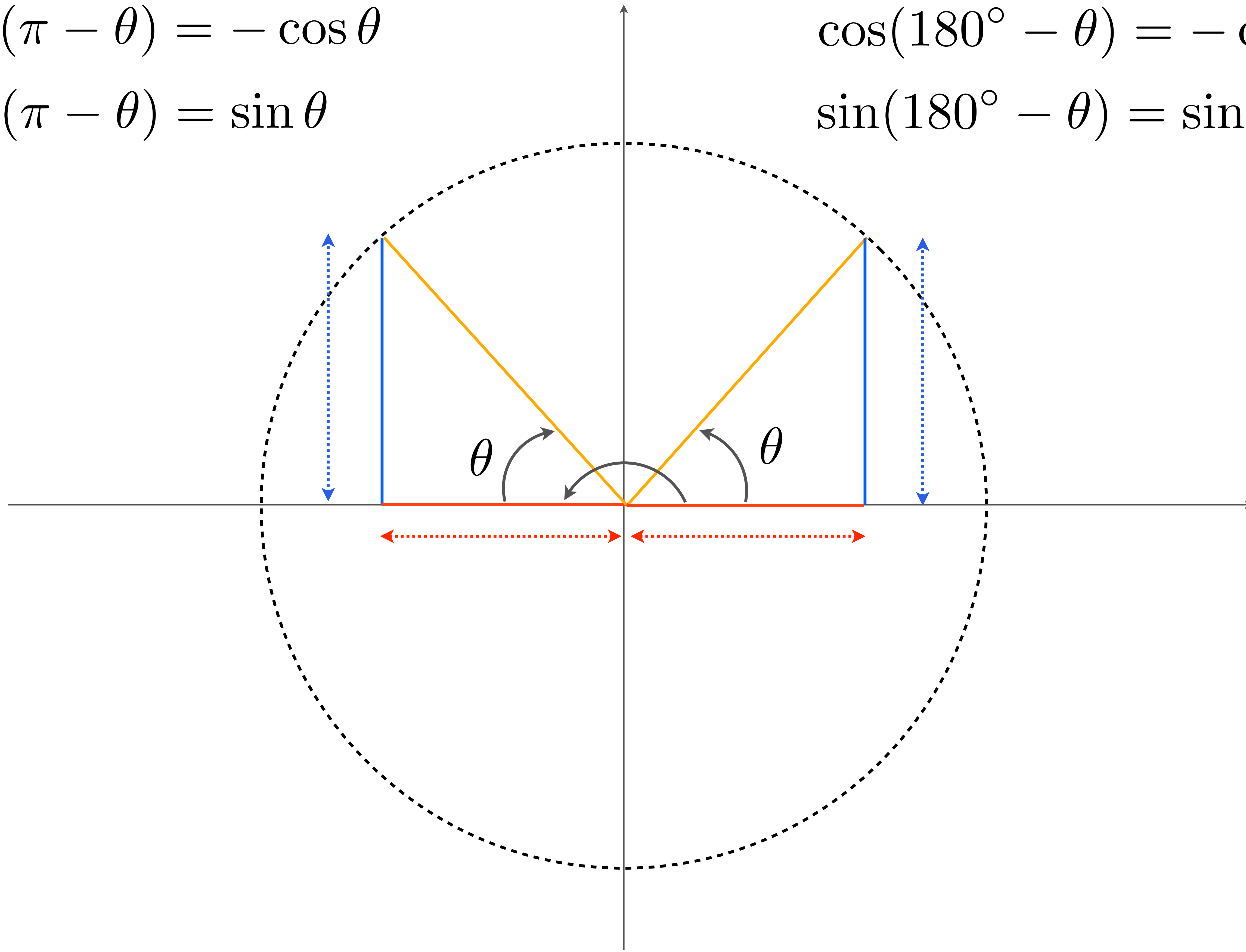
Quelques symétries

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

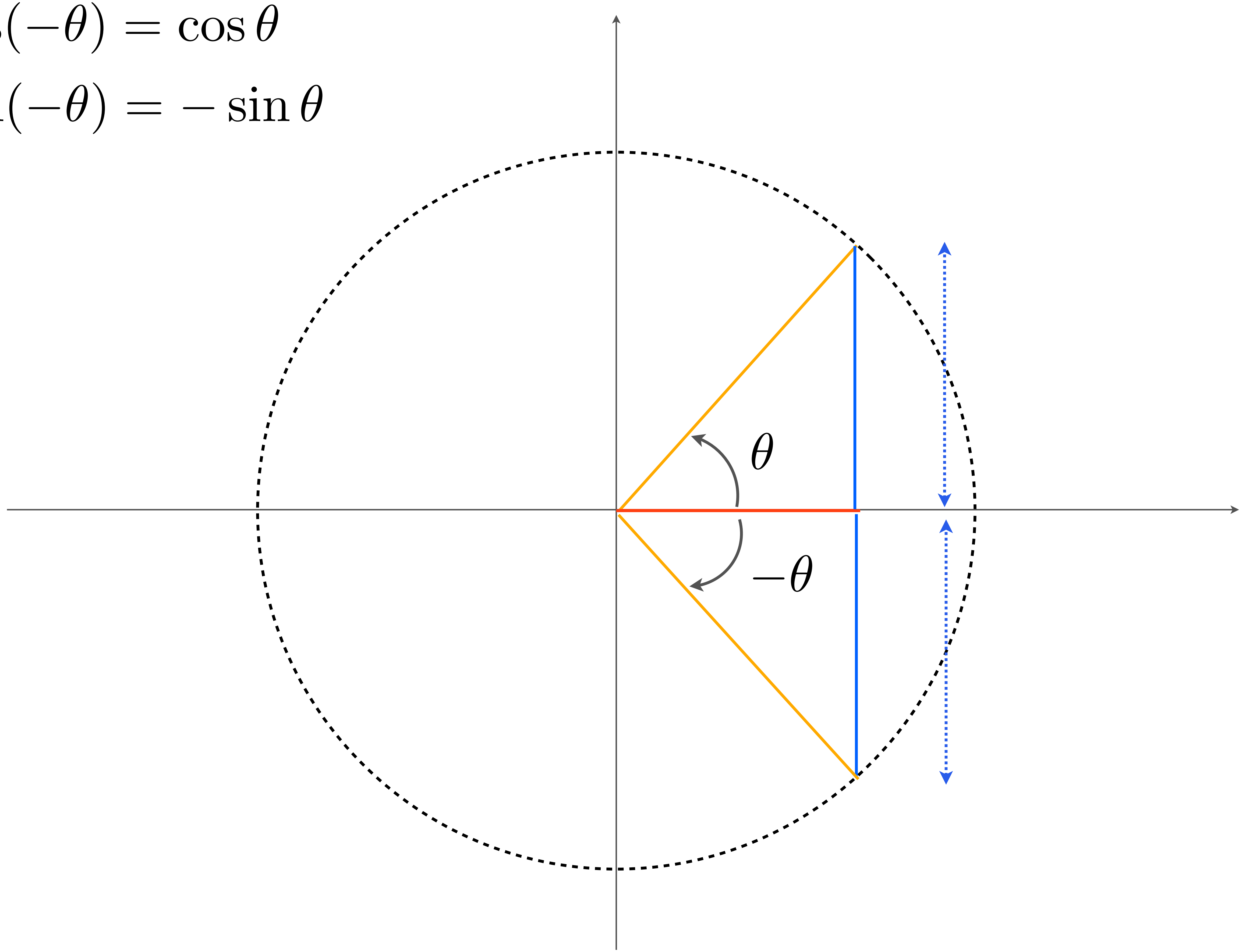
$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$



Quelques symétries

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

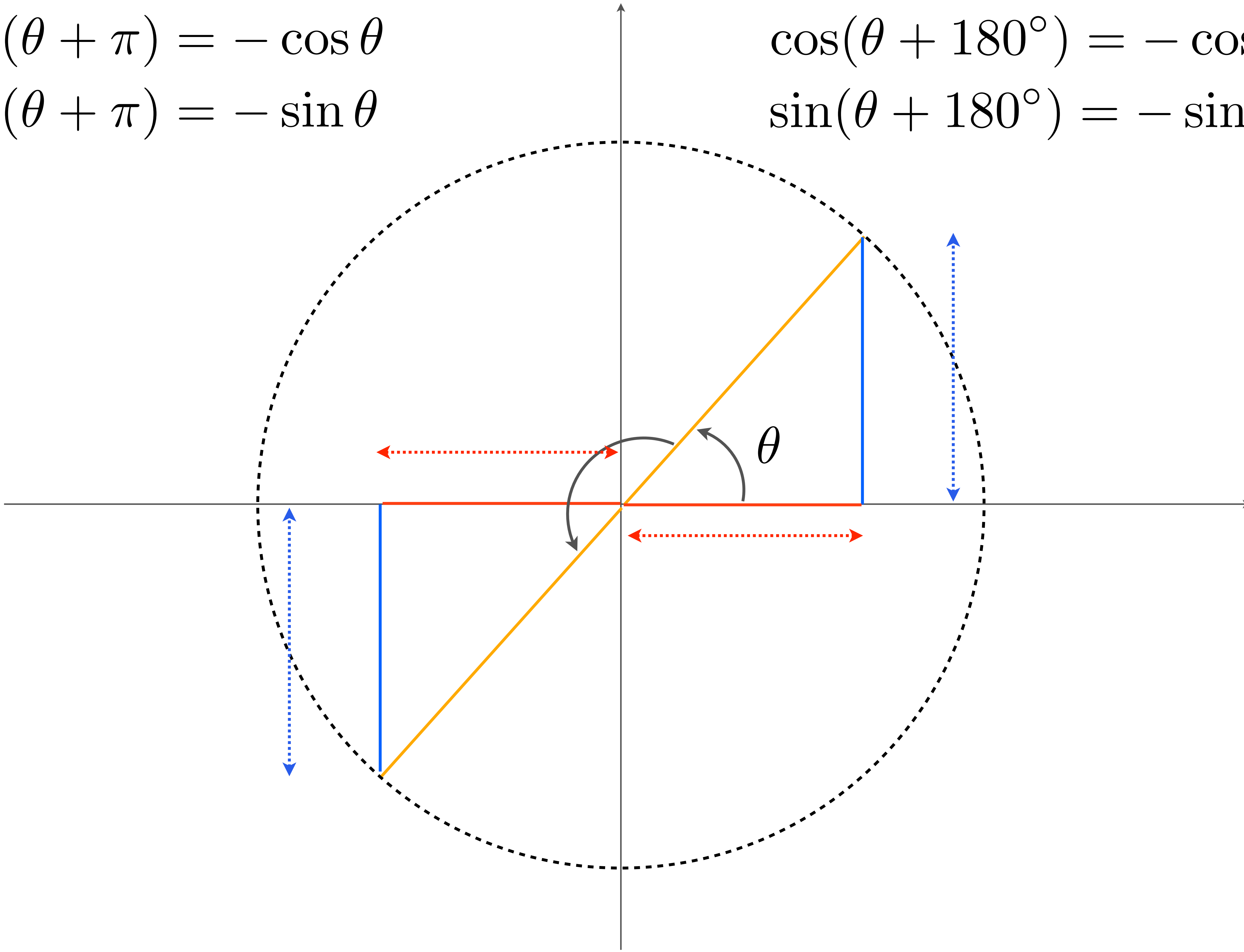
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$



Quelques symétries

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$$
$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

$$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$$
$$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta$$



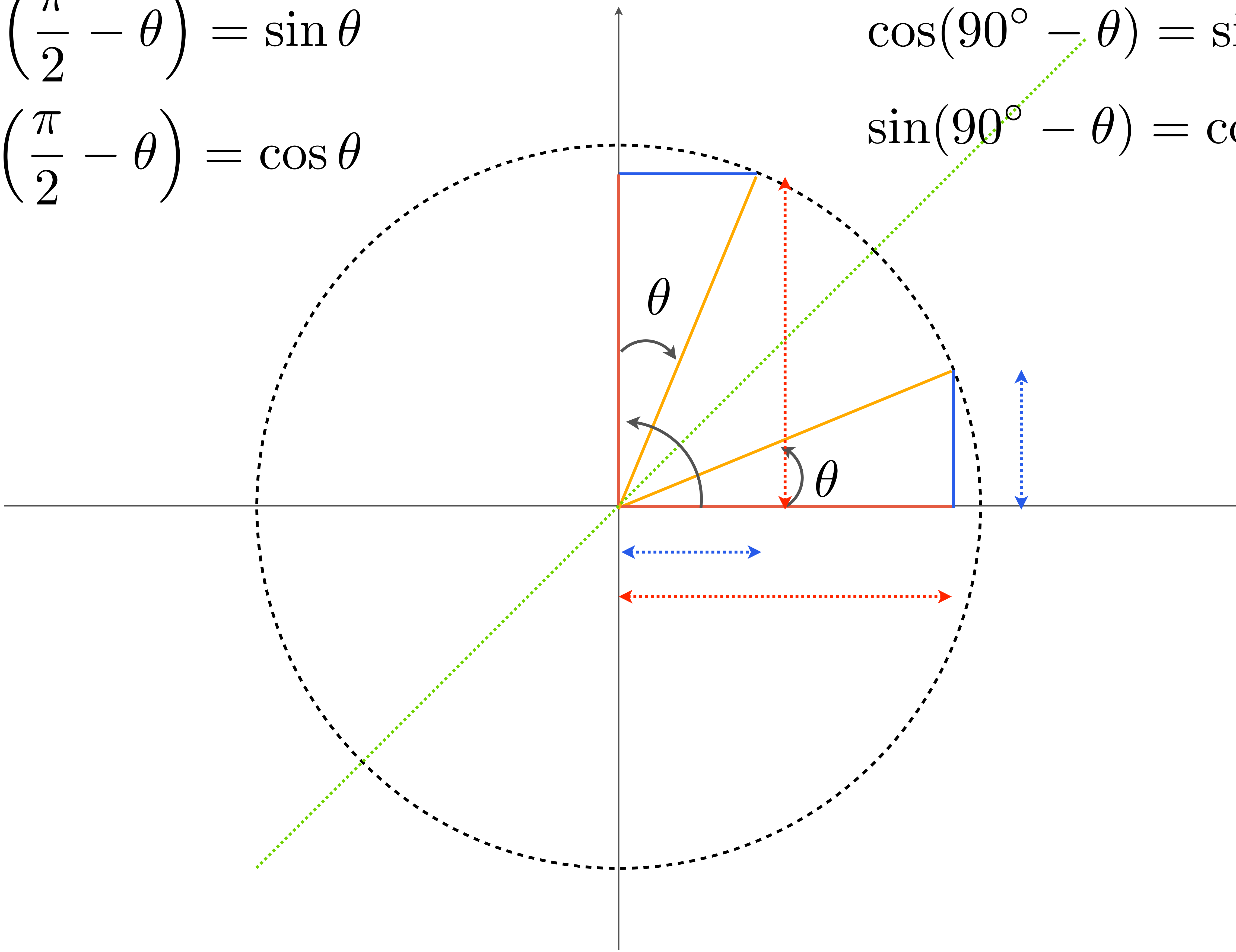
Quelques symétries

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$



Les coordonnées d’un point sur le cercle unité sont:

$\cos 0 = 1$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\cos \pi = -1$

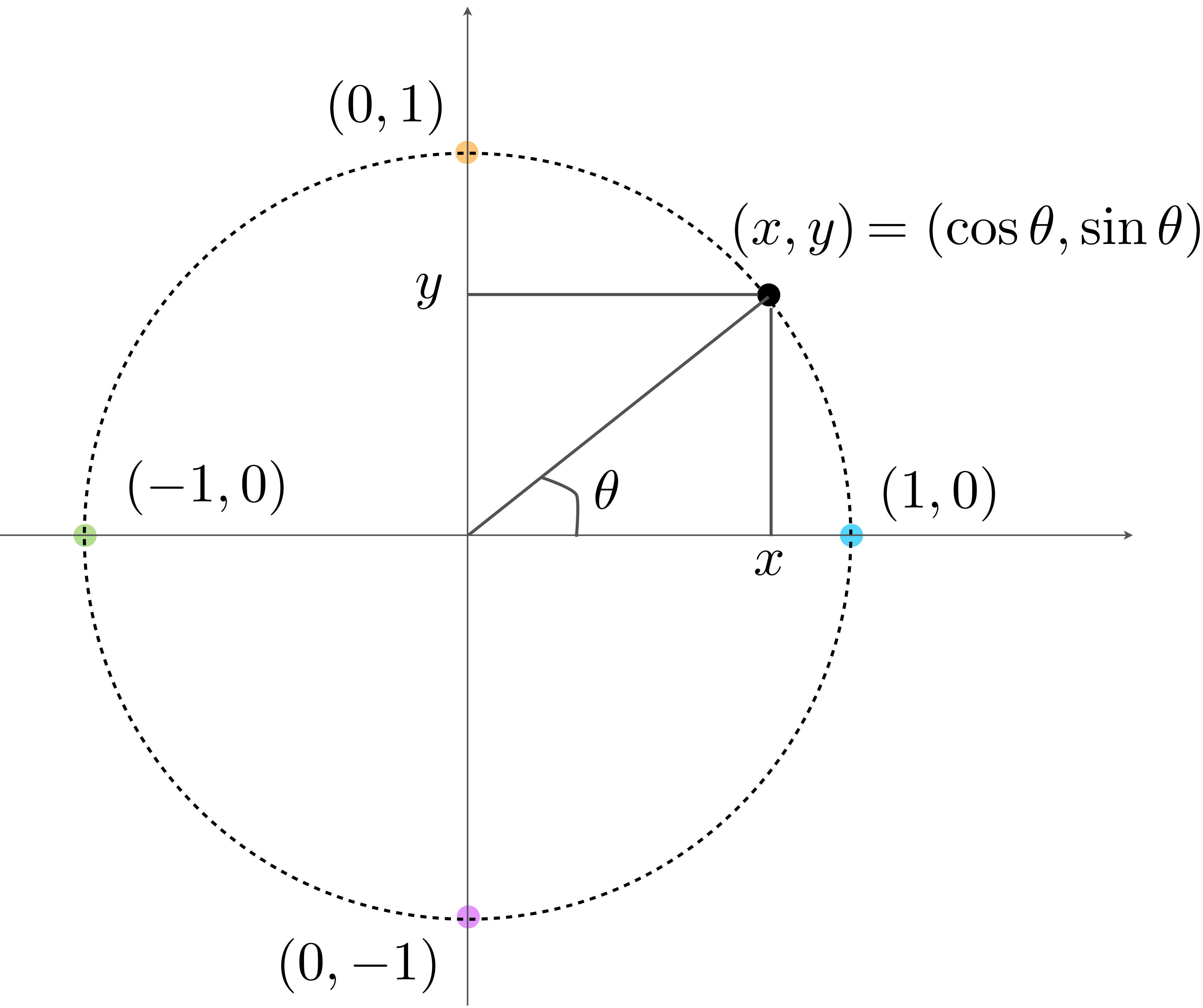
$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

$\sin 0 = 0$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\sin \pi = 0$

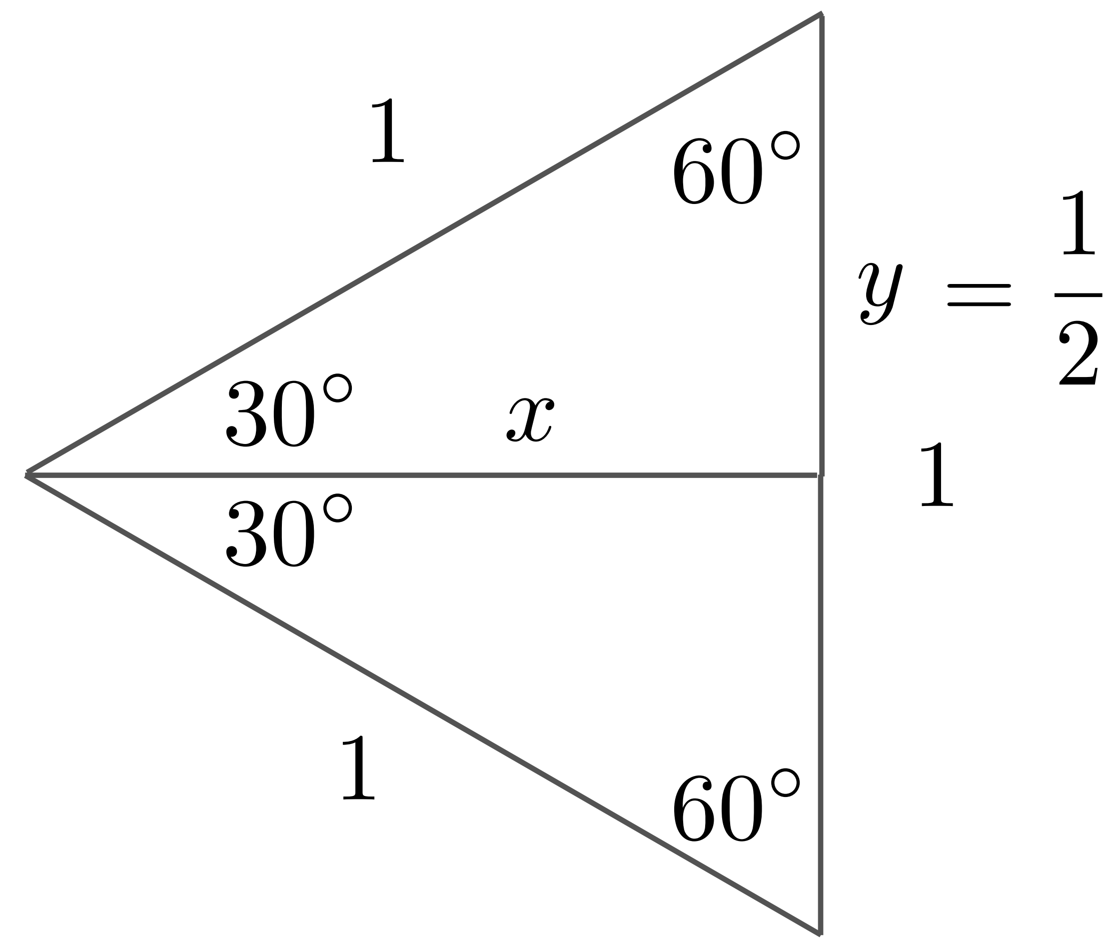
$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$



Il suffit de connaître le sin et le cos de deux autres angles pour retrouver tout le cercle trigonométrique.

$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$



Avec Pythagore

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

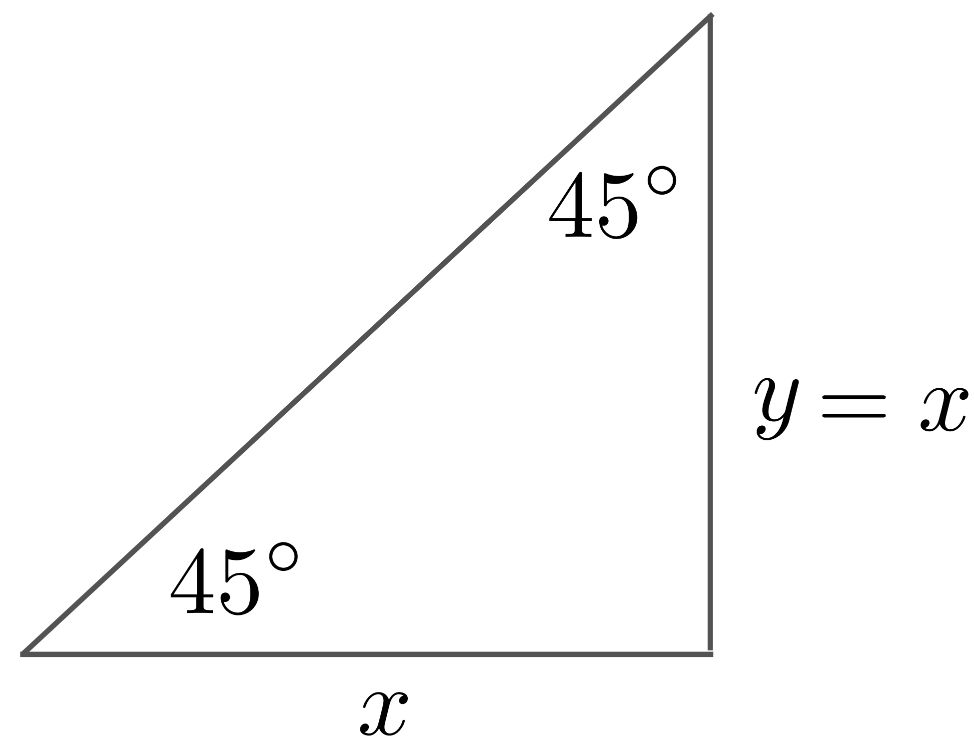
$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Un triangle équilatéral !

$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



C'est un triangle isocèle

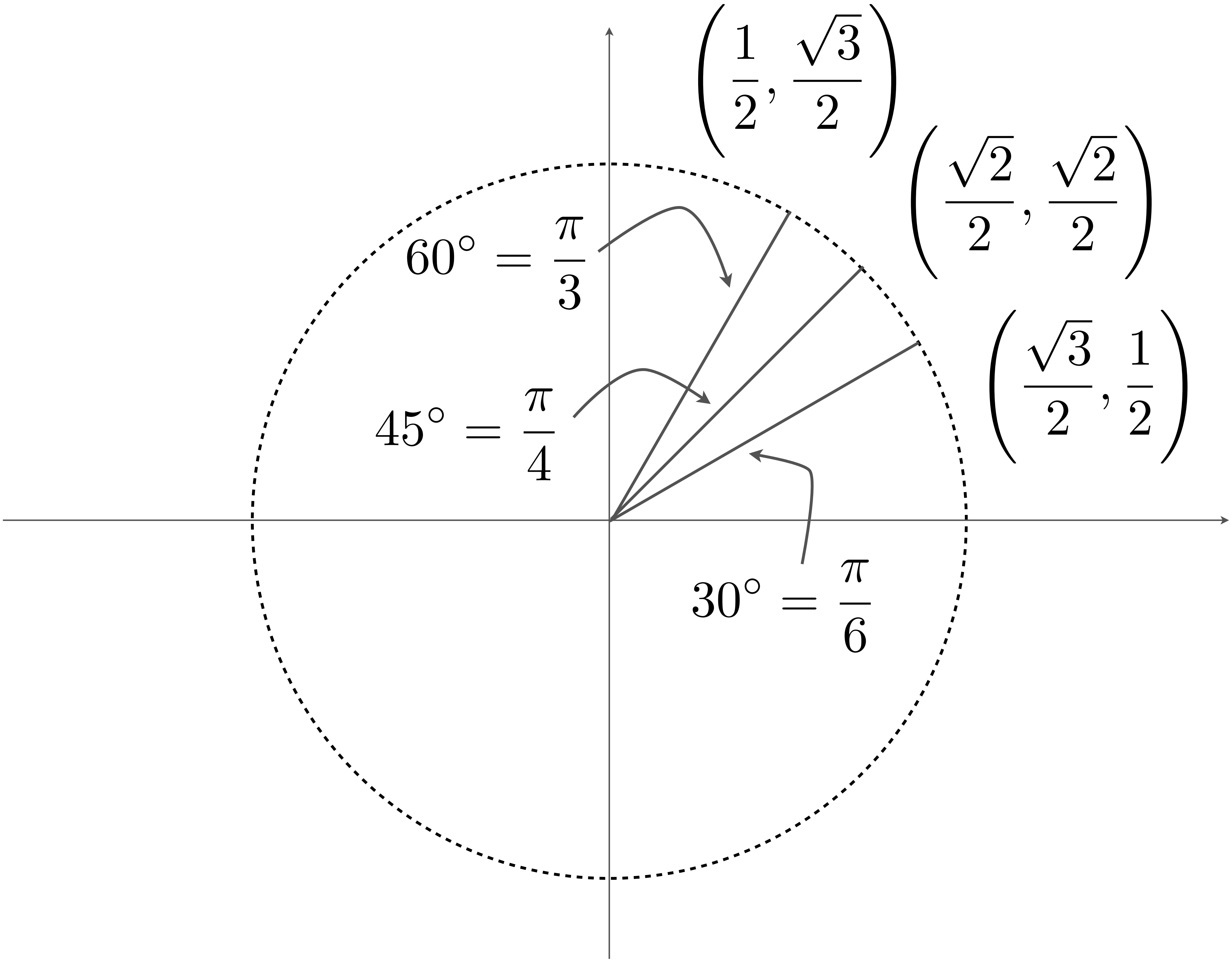
Avec Pythagore

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les angles remarquables



Faites les exercices suivants

Faites un cercle trigonométrique complet

Devoir: # 43 à 48