2.6 SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRE

cours 18

On a vu comment résoudre une équation linéaire à une variable.

Habituellement, une équation linéaire à deux variables possède une infinité de solutions.

Nous nous y attarderons plus tard cette session lorsque nous parlerons de fonction.

Par contre, on est en mesure de trouver les solutions d'un système de deux équations et deux inconnues.

Lorsqu'on a un système d'équations, on cherche les valeurs des variables qui rendent toutes les équations vraies.

Exemple

Le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

a comme solution $x = \dfrac{7}{11}$ et $y = -\dfrac{1}{11}$

car $$2\left(\frac{7}{11}\right) + 3\left(-\frac{1}{11}\right) = \frac{14}{11} - \frac{3}{11} = 1$$

et $$3\left(\frac{7}{11}\right) - \left(-\frac{1}{11}\right) = \frac{21}{11} + \frac{1}{11} = 2$$

Il existe plusieurs façons de résoudre un système d’équations linéaire.

Dans les faits, toutes ces méthodes sont équivalentes et vous pouvez donc utiliser celle que vous préférez.

Les méthodes que nous verrons sont:

- Substitution
- Comparaison
- Réduction

Pour faire la substitution, on doit commencer par isoler une des deux variables dans une des deux équations. En suite on substitue la variable isolée dans l'autre équation.

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$3x - y = 5 \Longleftrightarrow y = 3x - 5$$

$$2x + 4(3x - 5) = 6 \quad \Longleftrightarrow 2x + 12x - 20 = 6$$

$$\Longleftrightarrow 14x = 26$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

$$y = 3x - 5 = 3\frac{13}{7} - 5 = \frac{39 - 35}{7} = \frac{4}{7}$$

Exemple

$$\begin{cases} 7x - 11y = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$2x - 3y = 4 \iff 2x = 4 + 3y \iff x = \frac{4+3y}{2}$$

$$7x - 11y = 2 \iff 7\left(\frac{4+3y}{2}\right) - 11y = 2$$

$$\iff 28 + 21y - 22y = 4 \iff -y = -24$$

$$\iff y = 24$$

$$2x - 3(24) = 4 \iff 2x = 76$$

$$\iff x = 38$$

Faites les exercices suivants

p.103 Ex 4.2

Pour la méthode de comparaison, on isole la même variable dans chaque équation et on égalise le tout.

Exemple

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 6 - 2x \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

$$6 - 2x = 5 - 3x \iff 3x - 2x = 5 - 6$$

$$\iff x = -1$$

$$y = 6 - 2x = 6 - 2(-1) = 8$$

$$y = 5 - 3x = 5 - 3(-1) = 8$$

Donc la solution est $x = -1$ et $y = 8$

Faites les exercices suivants

p.107 Ex 4.3

On a vu que l'ensemble solution d'une équation ne change pas si on applique la même opération de chaque côté de l'égalité.

Il en va de même si on a plusieurs équations. On peut modifier une équation à partir d'une autre.

$$a = b \quad \text{et} \quad c = d$$

$$a + c = b + d$$

$$a - c = b - d$$

$$a \times c = b \times d$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad\qquad c \neq 0 \neq d$$

Exemple

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + \cancel{y} - (2x + \cancel{y}) = 5 - 8 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ 2x + y - 2(x) = 8 - 2(-3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3 \\ y = 14 \end{cases}$$

Exemple

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(5x - 2y) = 2 \times 4 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x - 4y = 8 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x - 4y = 8 \\ -2x + 4y + (10x - 4y) = 1 + 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x - 4y = 8 \\ -2x + 10x = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ x = \frac{9}{8} \end{cases}$$

$$5\left(\frac{9}{8}\right) - 2y = 4 \iff 2y = \frac{45}{8} - \frac{32}{8} \iff y = \frac{13}{16}$$

Donc la solution est $x = \dfrac{9}{8}$ $\quad y = \dfrac{13}{16}$

Faites les exercices suivants

p.111 Ex 4.4

Devoir: p. 138, # 11 à 14