1.3 LES EXPOSANTS

cours 3

Exposant

On a vu que la somme était de compter en terme de plus 1.

Que la multiplication était compter en terme de plus n.

Dans la même veine, prendre l'exposant d'un nombre revient à compter en terme de fois a

Exemple

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

Exemple

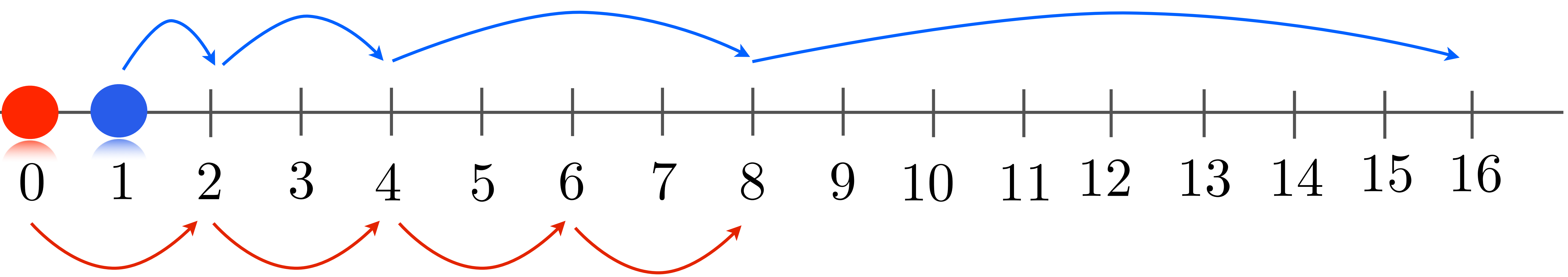
$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 0 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$0 \times 2 = 0$$

$$2^0 = 1$$



Exemple

$$2^4 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 2^7 = 2^{(4+3)} = 2^{4+3}$$

Théorème

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Preuve:

$$a^n \times a^m = (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}) \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m})$$

$$= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n+m}$$

Exemple

$$3^5 \times \boxed{3^0} = 3^{5+0} = 3^5$$

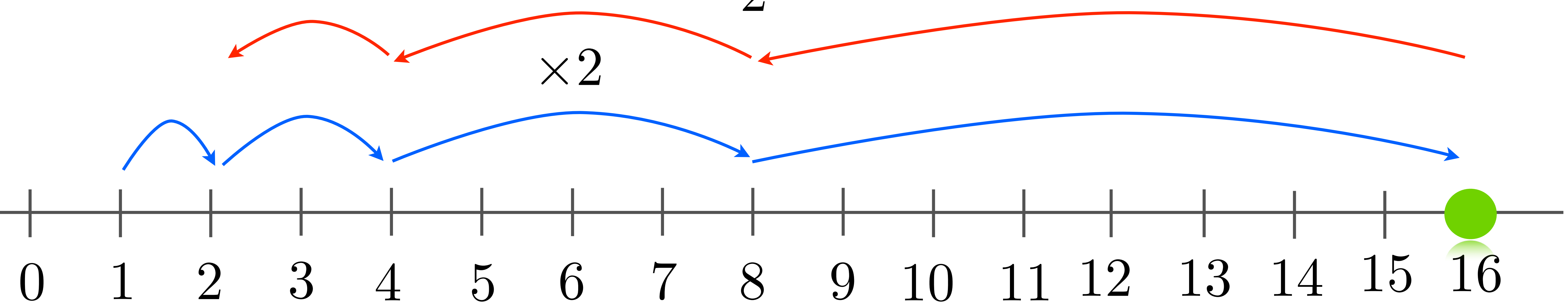
$$= 3^5 \times \boxed{1}$$

$$2^{-1} = ?\frac{1}{2}$$

$$16 \times 2^{-3} = 16 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2$$

$$= 2^{4} \times 2^{-3} = 2^{4-3} = 2^{1}$$

$$\div 2 = \times \frac{1}{2}$$



Exemple

$$(3^2)^3 = (3^2) \times (3^2) \times (3^2)$$
$$= (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$$
$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6 = 3^{(2 \times 3)}$$

Théorème

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Preuve:

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \times (a^n) \times \cdots \times (a^n)}_{m}$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}) \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}) \times \cdots \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n})}_{m}$$

$$= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \times m} = a^{n \times m}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
2^3 \times 5^3 &= (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5) \\
&= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\
&= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \\
&= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = (2 \times 5)^3
\end{aligned}
$$

Théorème

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Preuve:

$$
\begin{aligned}
a^n \times b^n &= (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}) \times (\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n}) \\
&= \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \cdots \times (a \times b)}_{n} \\
&= (a \times b)^n
\end{aligned}
$$

Exemple

$$\frac{15^5 \times 14^3}{21^2 \times 10^4} = \frac{(3 \times 5)^5 \times (2 \times 7)^3}{(3 \times 7)^2 \times (2 \times 5)^4}$$

$$= \frac{3^5 \times 5^5 \times 2^3 \times 7^3}{3^2 \times 7^2 \times 2^4 \times 5^4}$$

$$= \frac{3^{5-2} \times 5^{5-4} \times 7^{3-2}}{2^{4-3}}$$

$$= \frac{3^3 \times 5 \times 7}{2}$$

Faites les exercices suivants

17

Remarque: Prendre des exposants n'est pas associatif.

$$2^{2^3} \begin{array}{l} \nearrow \; = \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \\ ? \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq \\ \searrow \; = 2^{\left(2^3\right)} = 2^8 = 256 \end{array}$$

La convention veut que

$$2^{2^3} = 2^{\left(2^3\right)}$$

c'est-à-dire qu'on commence par l'exposant le plus élevé.

$$2^{3^{4^{5^6}}} = 2^{\left(3^{\left(4^{\left(5^6\right)}\right)}\right)}$$

Priorité des opérations

Lorsqu'on a plusieurs opérations, on peut mettre des parenthèses pour savoir quelle opération faire en premier.

Par contre pour éviter d'avoir des parenthèses un peu partout il y a une convention sur l'ordre de priorité des opérations.

1. Parenthèses
2. Exposants
3. Multiplications et divisions
4. Additions et soustractions

Si plusieurs opérations ont le même ordre de priorité alors on va de gauche à droite.

Exemple

$$5 - 2^3 \times 3 + 4 \times (7 - 12 \div 3)$$

$$= 5 - 2^3 \times 3 + 4 \times (7 - 4)$$

$$= 5 - 2^3 \times 3 + 4 \times 3$$

$$= 5 - 8 \times 3 + 4 \times 3$$

$$= 5 - 24 + 4 \times 3$$

$$= 5 - 24 + 12$$

$$= -19 + 12$$

$$= -7$$

Si on a plusieurs additions et soustractions, on peut les faire dans l'ordre qu'on veut

Exemple

$$4 - 5 + 3 = 4 - 8 = -4$$

gauche à droite

$$4 - 5 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$-a = +(-a)$

$$\begin{aligned} 4 - 5 + 3 &= 4 + (-5) + 3 \\ &= 4 + (-2) = 2 \end{aligned}$$

On doit donc faire attention!

De même, si on a plusieurs multiplications et divisions

Exemple

$$5 \times 3 \div \boxed{2 \div 2} = 5 \times 3 \div \boxed{1}$$
$$= 5 \times 3 = 15$$

gauche à droite

$$5 \times 3 \div 2 \div 2 = 15 \div 2 \div 2$$
$$= \frac{15}{2} \div 2 = \frac{15}{4}$$

$$\div a = \times \frac{1}{a}$$

$$5 \times 3 \div 2 \div 2 = 5 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= 15 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

On doit donc faire attention!

Faites les exercices suivants

20

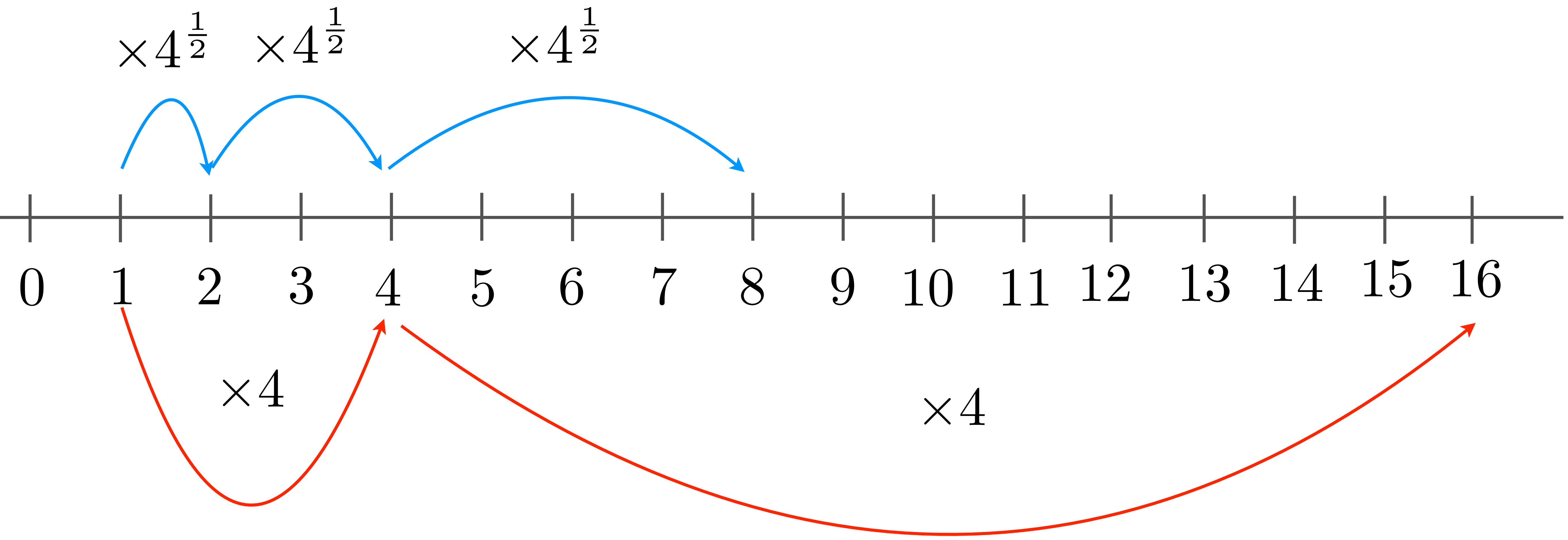
$4^{\frac{1}{2}} = ?$

La demi d'un bond?

$$4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4^1$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$4^{\frac{3}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} = 4^1 \times 4^{\frac{1}{2}} = 4 \times 2 = 8$$



Exposant fractionnaire

Si $a \geq 0$ on définit $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

De sorte qu'on ait bien $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n \times \frac{1}{n}} = a^1 = a$

Et pour une fraction quelconque

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Remarque:

$$(\text{positif}) \times (\text{positif}) = \text{positif}$$

$$(\text{négatif}) \times (\text{négatif}) = \text{positif}$$

$$(?) \times (?) = \text{négatif} \qquad \ldots \text{ rien!}$$

De sorte que $\sqrt{\text{négatif}} = (\text{négatif})^{\frac{1}{2}}$ n'existe pas

Par contre $(\text{négatif}) \times (\text{négatif}) \times (\text{négatif}) = \text{négatif}$

$$\sqrt[3]{\text{négatif}} = (\text{négatif})^{\frac{1}{3}} \quad \text{existe}$$

Exemple

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \quad \nexists$$

Remarque:

$$(-)\times(-)\times(-)\times(-) = (+)$$

$$(-)\times(-)\times(-)\times(-)\times(-) = (-)$$

$$(-)\times(-)\times(-)\times(-)\times(-)\times(-) = (+)$$

$$(\text{négatif})^{\text{pair}} = \text{positif} \qquad (\text{négatif})^{\text{impair}} = \text{négatif}$$

$$\sqrt[\text{pair}]{\text{négatif}} = (\text{négatif})^{\frac{1}{\text{pair}}} \qquad \sqrt[\text{impair}]{\text{négatif}} = (\text{négatif})^{\frac{1}{\text{impair}}}$$

n'existe pas

existe

Faites les exercices suivants

21 et 22

Devoir: #17 à 22

et

p. 22 ex 1.4, p23 ex 1.5