

3.1 FONCTION

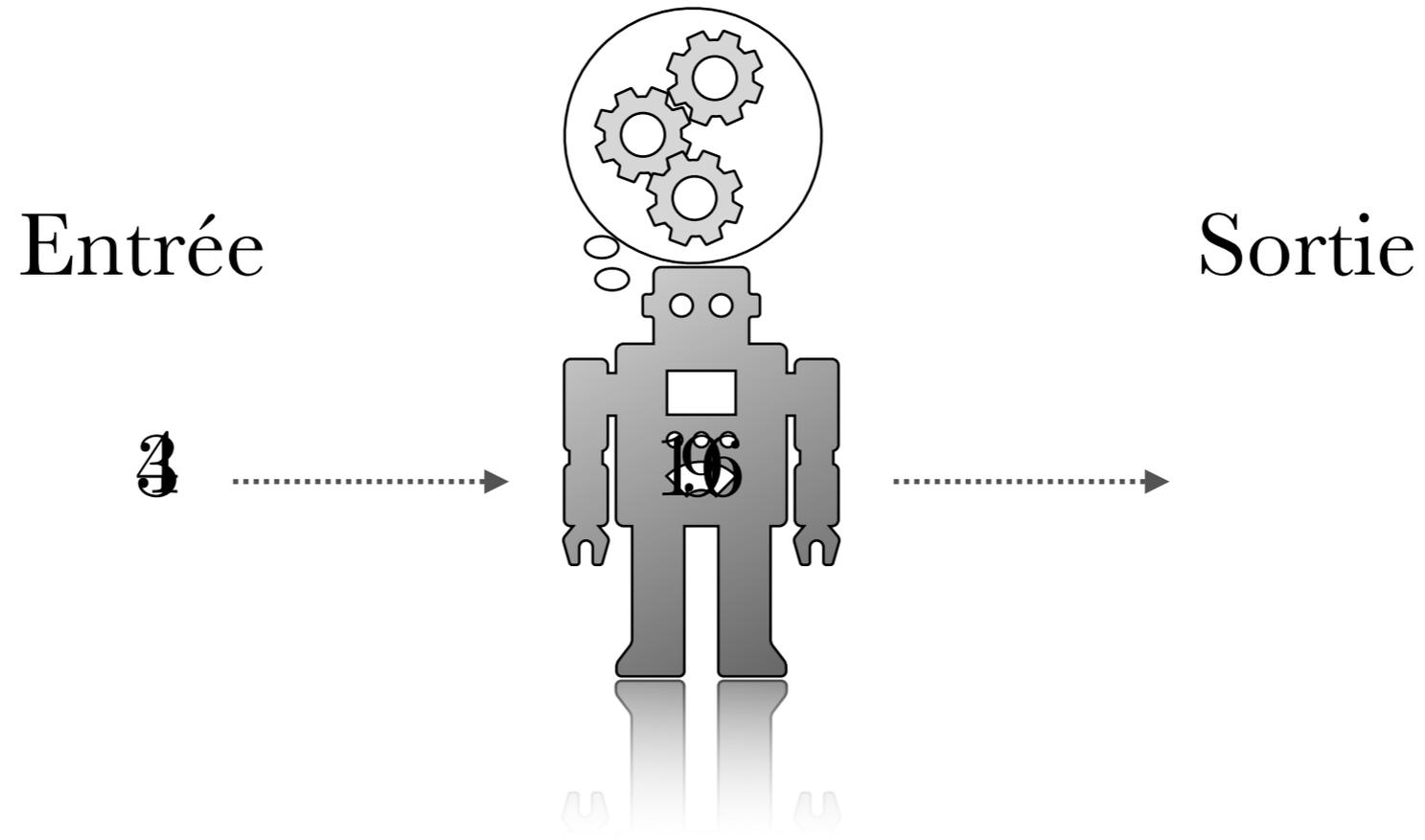
cours 25

Nous allons introduire le concept de fonction de deux manières différentes.

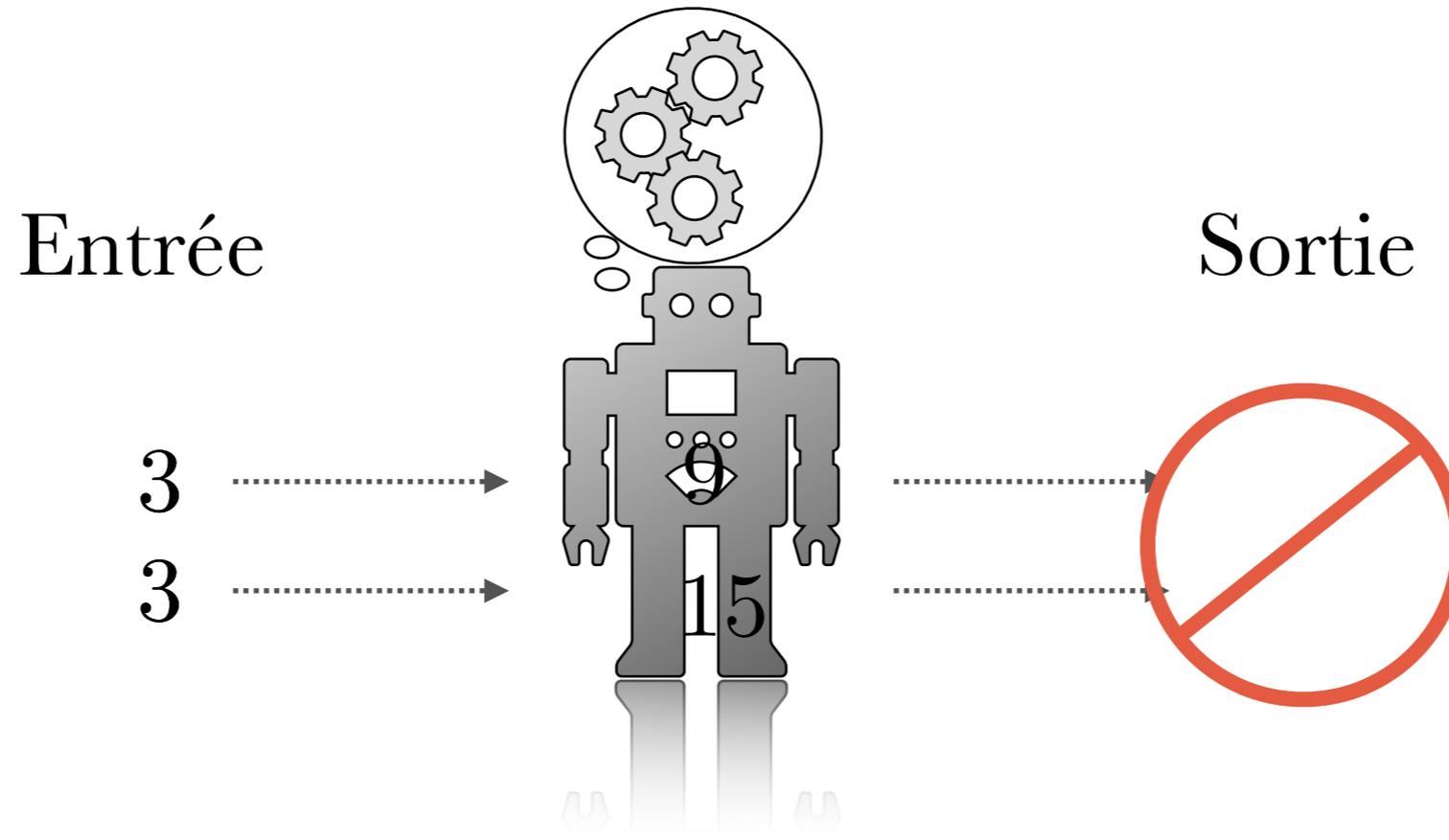
La première sera plus intuitive et donne une meilleure idée du fonctionnement des fonctions.

La deuxième est un peu plus abstraite et plus rigoureuse, mais permet de mieux visualiser certains concepts liés aux fonctions.

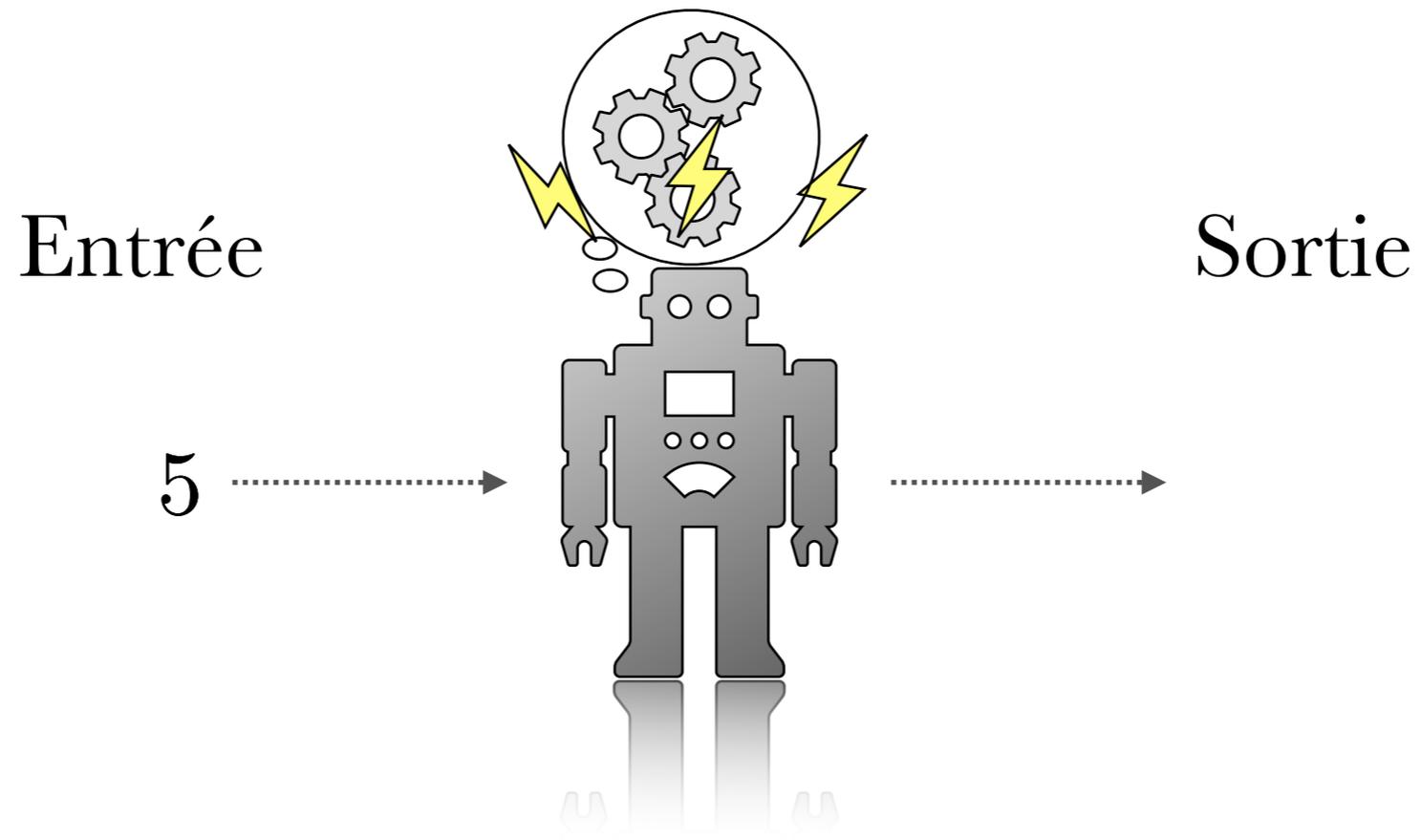
Une première approche des fonctions serait de les considérer comme des machines qui suivent une liste d'instructions.



La particularité des fonctions est que pour une entrée donnée, il ne peut pas y avoir plus d'une sortie

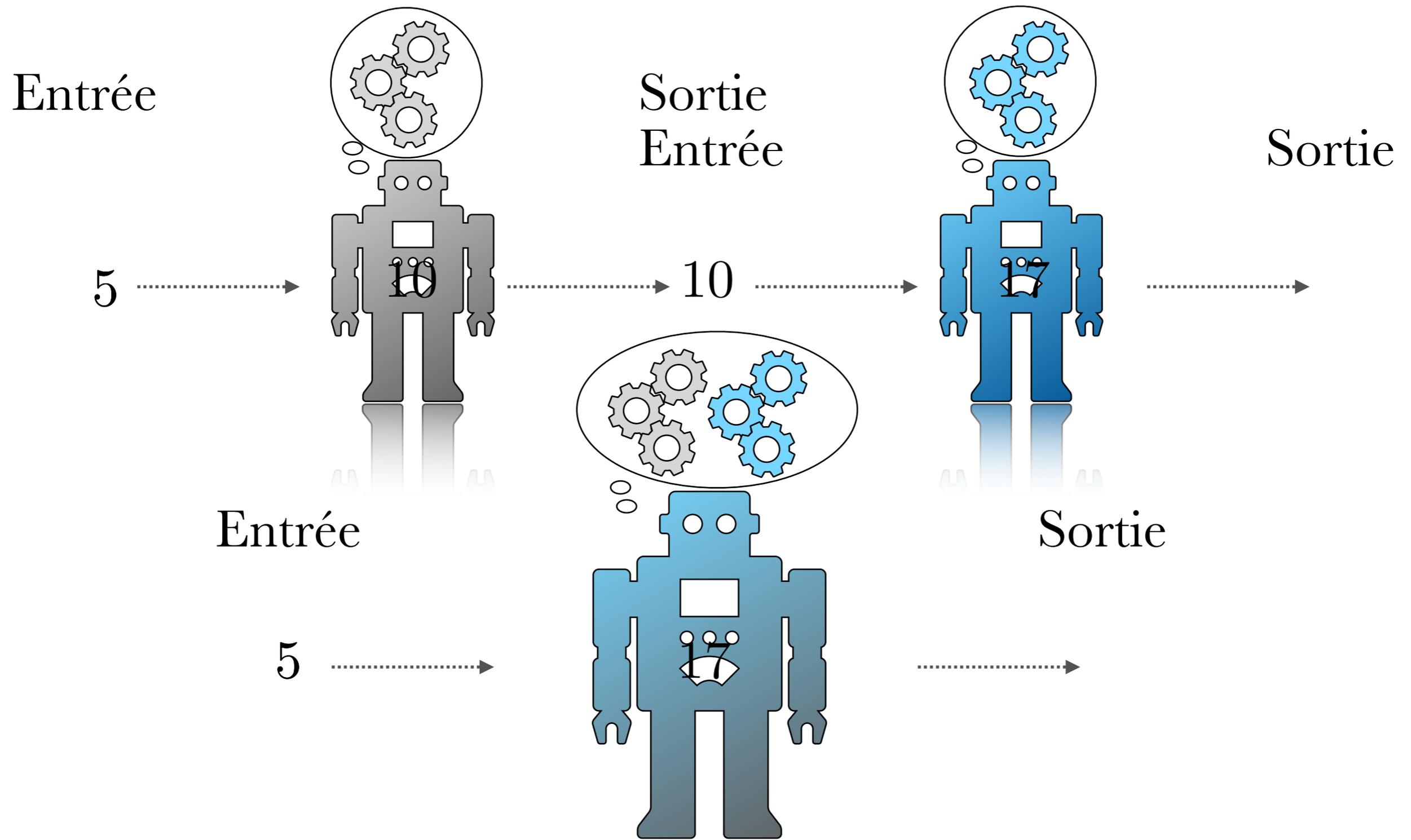


Parfois, il n'est pas possible de trouver la sortie de certaines valeurs.



On nomme l'ensemble des nombres qui ne brise pas notre fonction, le **domaine** de la fonction.

On peut prendre la sortie d'une fonction et la mettre directement dans l'entrée d'une autre.



On peut créer une nouvelle fonction qu'on nomme la **composition** des deux fonctions.

Avant de définir correctement une fonction, on doit définir un autre concept.

Définition

Une **relation** entre deux ensembles A et B est un sous-ensemble R du produit cartésien $A \times B$.

$$R \subset A \times B$$

Exemple

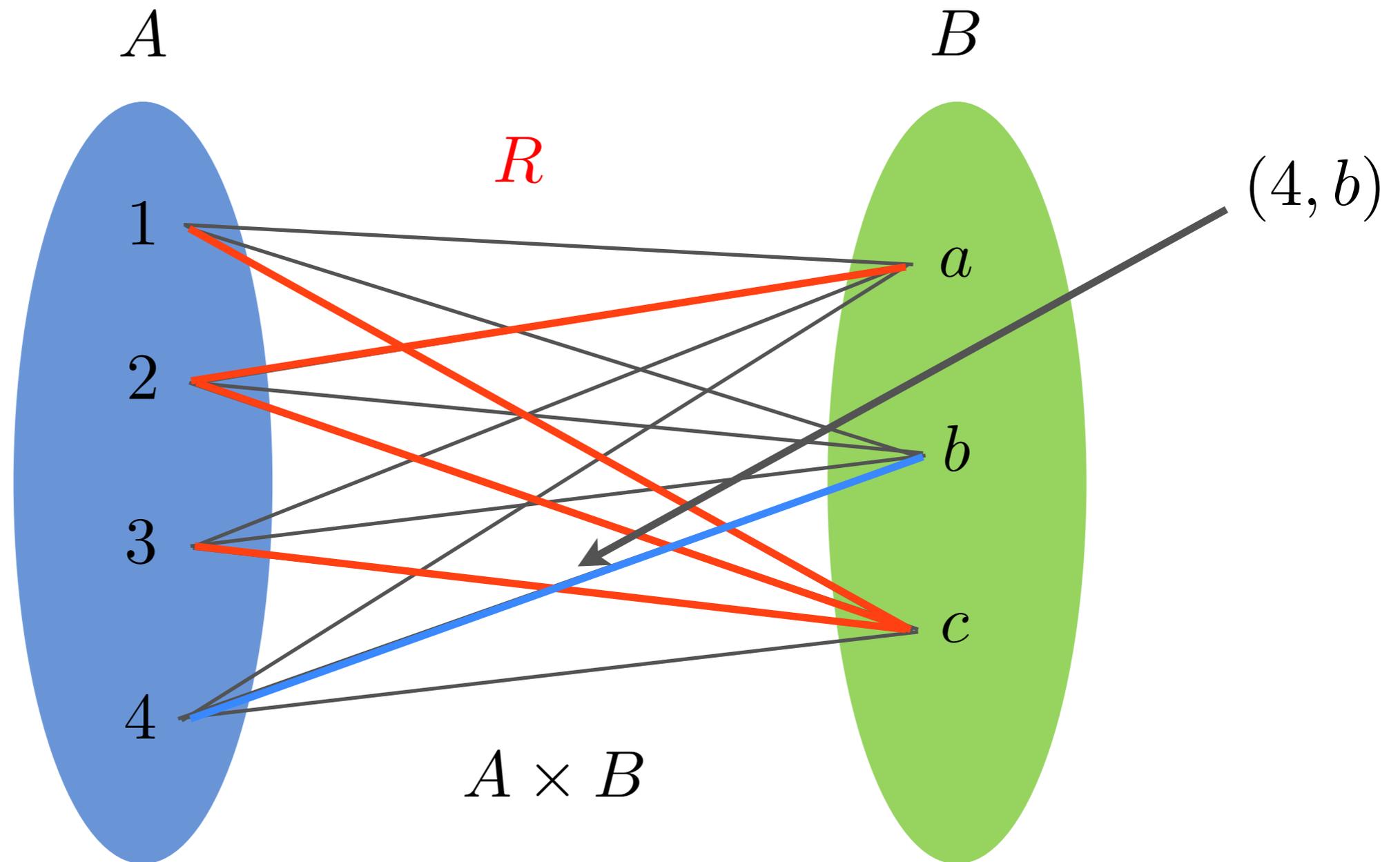
$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{a, b, c\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), \\ (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

$$R = \{(1, c), (2, a), (2, b), (3, c)\}$$

Est une relation car $R \subset A \times B$

On illustre habituellement l'exemple précédent comme suit.

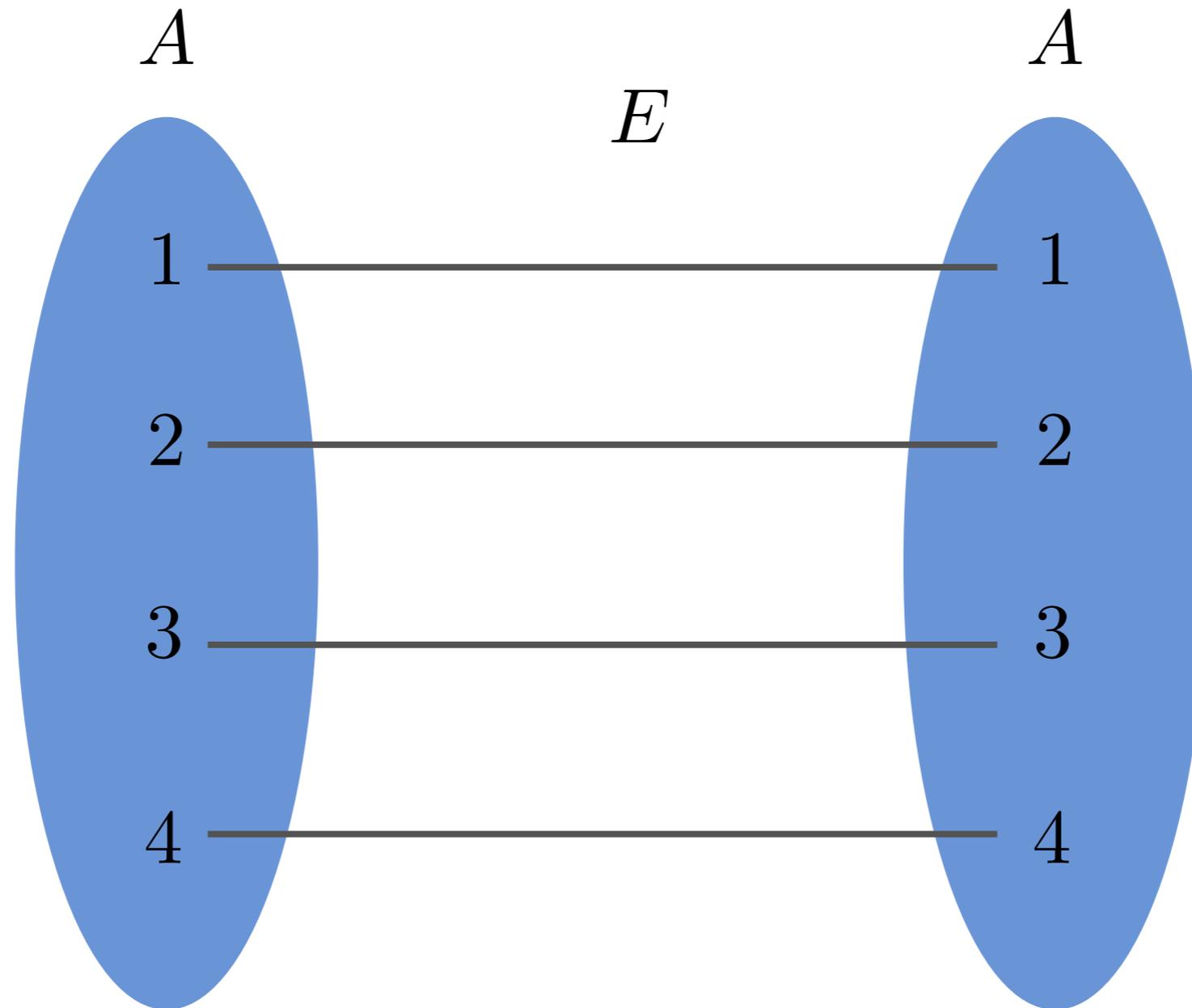


Dans cet exemple, on peut dire que 1 est en relation avec c , que 2 est en relation avec a et avec c et que 3 est en relation avec c .

La nature de cette relation dépend bien sûr du contexte.

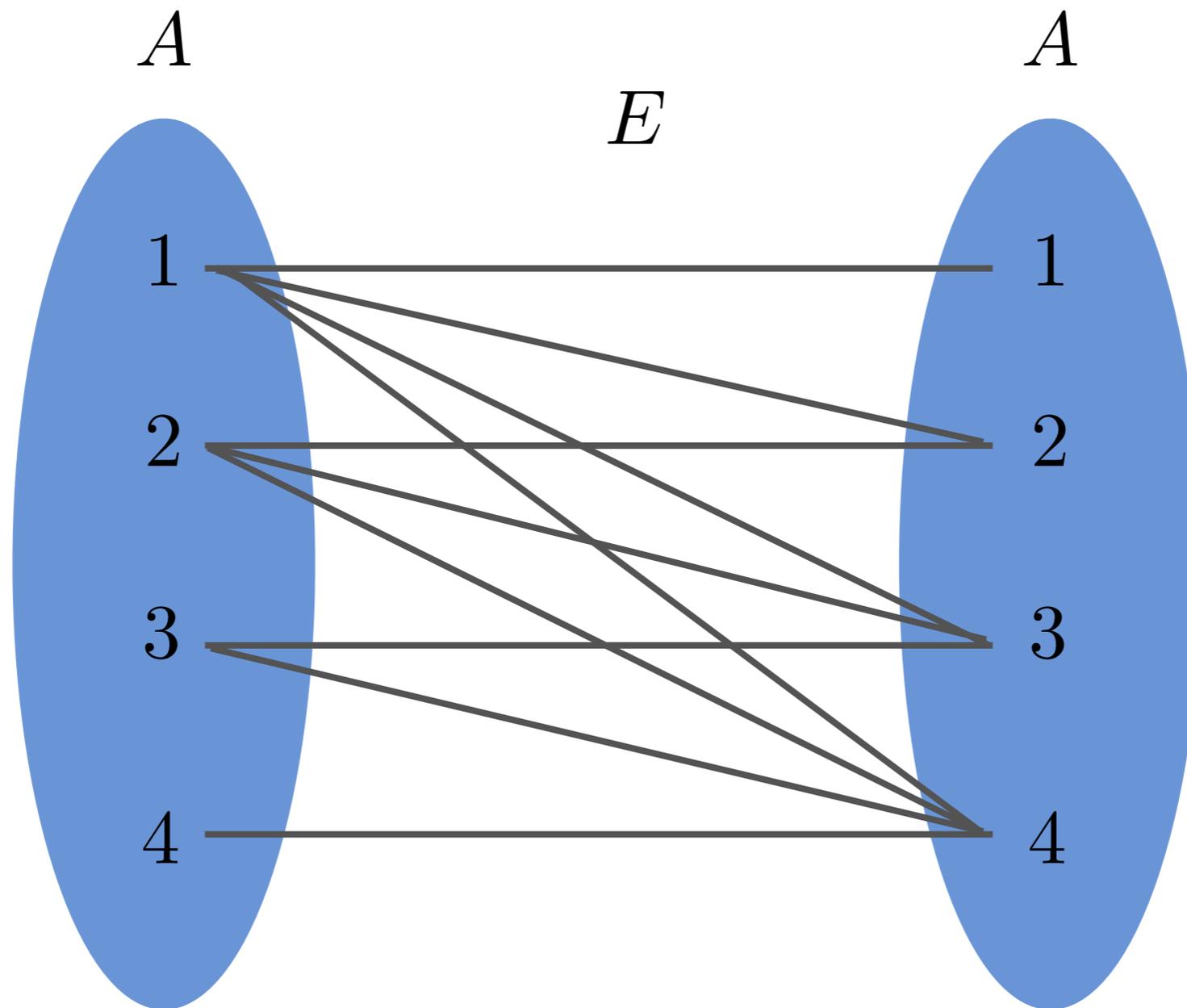
Vous connaissez déjà certaines relations.

Par exemple l'égalité.



On a bien que $E \subset A \times A$

Ou même l'inégalité (\leq)



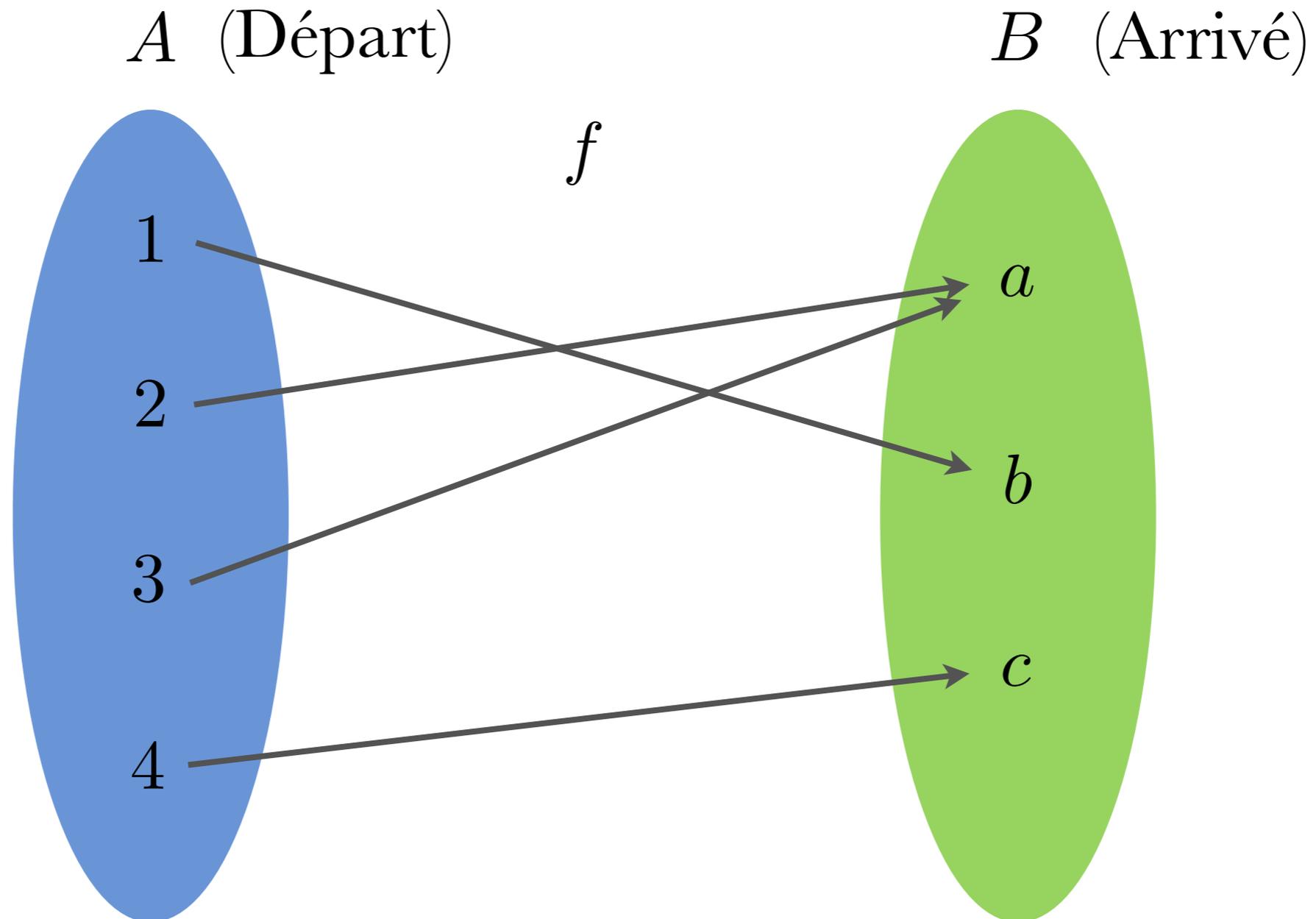
On a bien que $E \subset A \times A$

La raison qu'on vient de parler de relation est qu'une fonction est un cas particulier de relation.

Définition

Une **fonction** est une relation telle que chaque élément d'un des deux ensembles (qu'on nomme l'ensemble de départ) est en relation avec au plus un élément de l'autre ensemble (qu'on nomme l'ensemble d'arrivé).

Contrairement à la modélisation de la relation, on utilise des flèches pour les fonctions question de faire ressortir l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivé.



En d'autres termes, une fonction est une relation dont au plus une seule flèche sort des éléments de l'ensemble de départ

Contrairement à la modélisation de la relation, on utilise des flèches pour les fonctions pour faire ressortir l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivé.

A (Départ)

B (Arrivé)

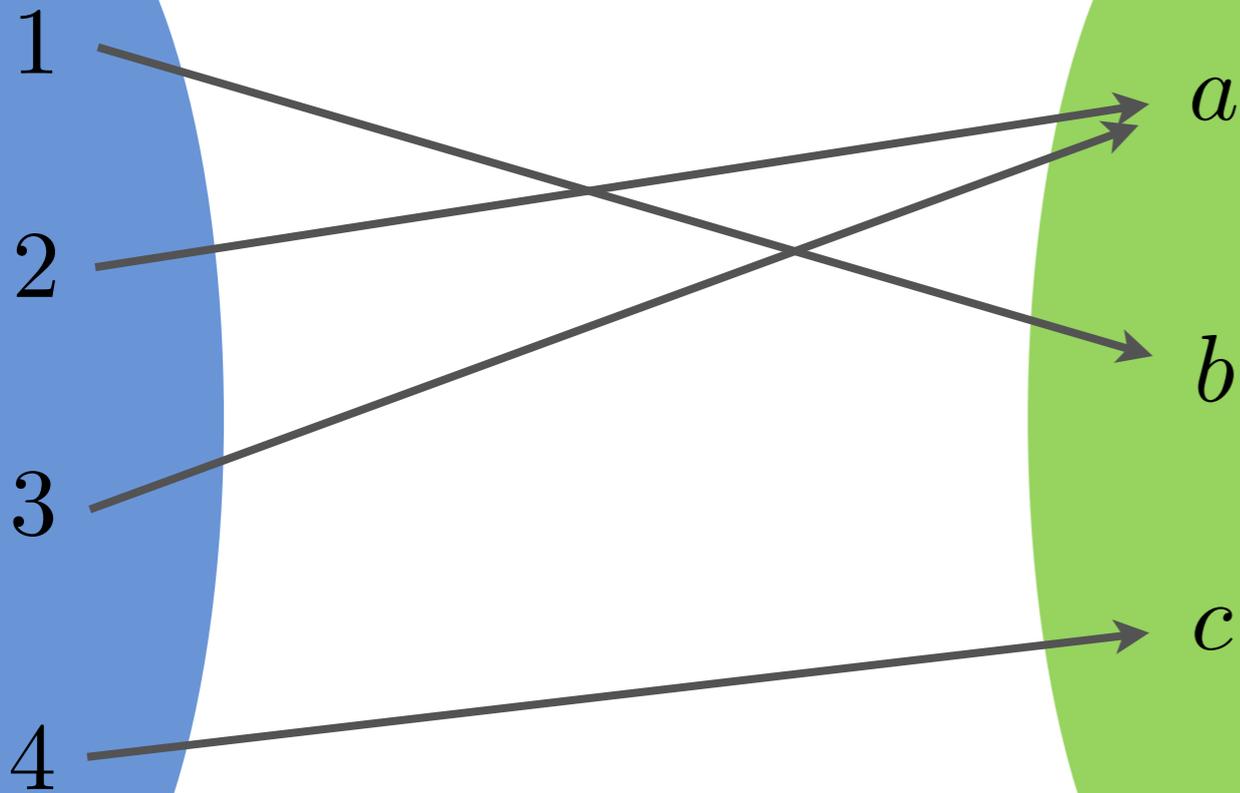
f

Quelques notations:

$$f : A \longrightarrow B$$

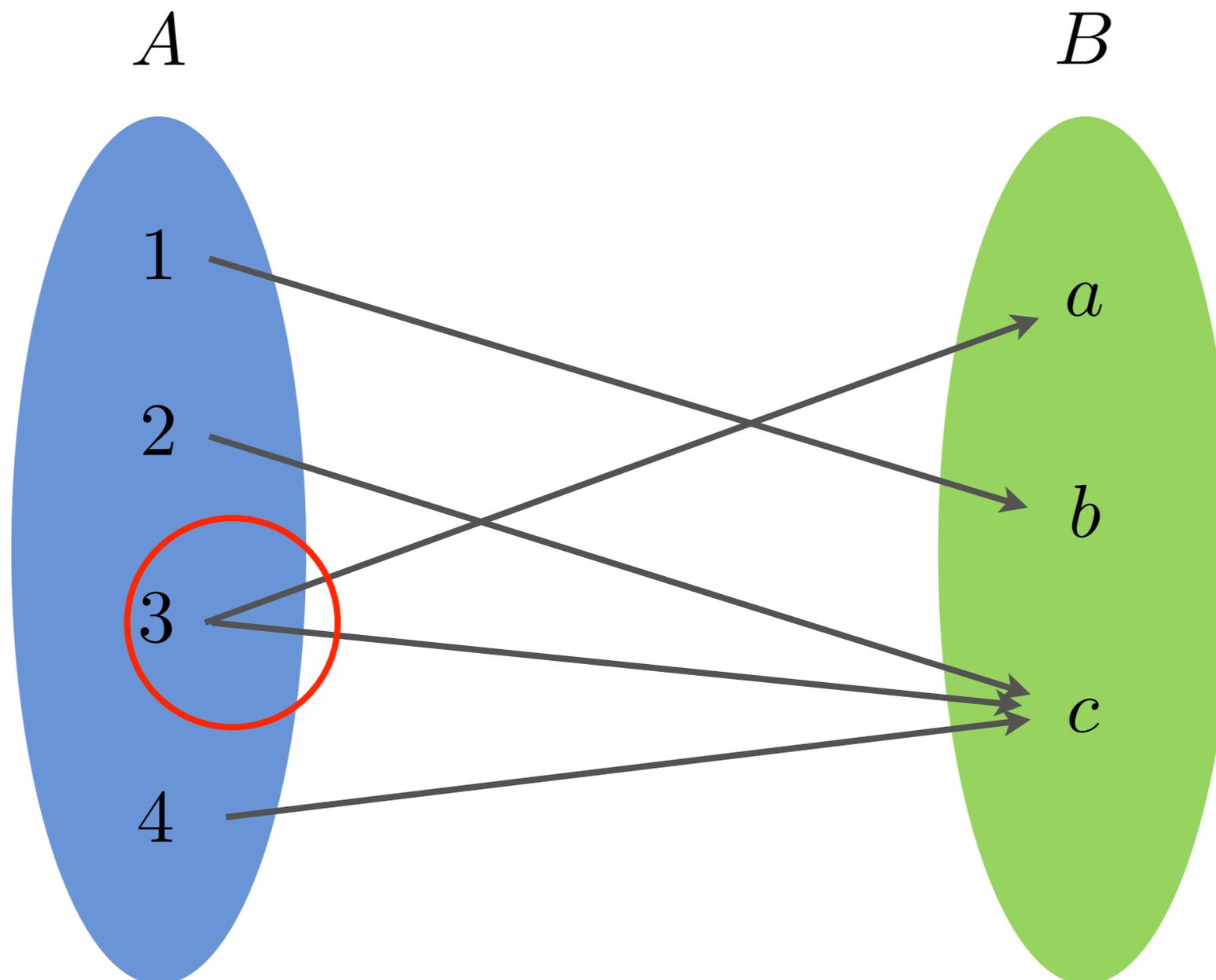
$$2 \longmapsto a$$

$$f(2) = a$$



En d'autres termes, une fonction est une relation dont au plus une seule flèche sort des éléments de l'ensemble de départ

La relation suivante n'est pas une fonction car

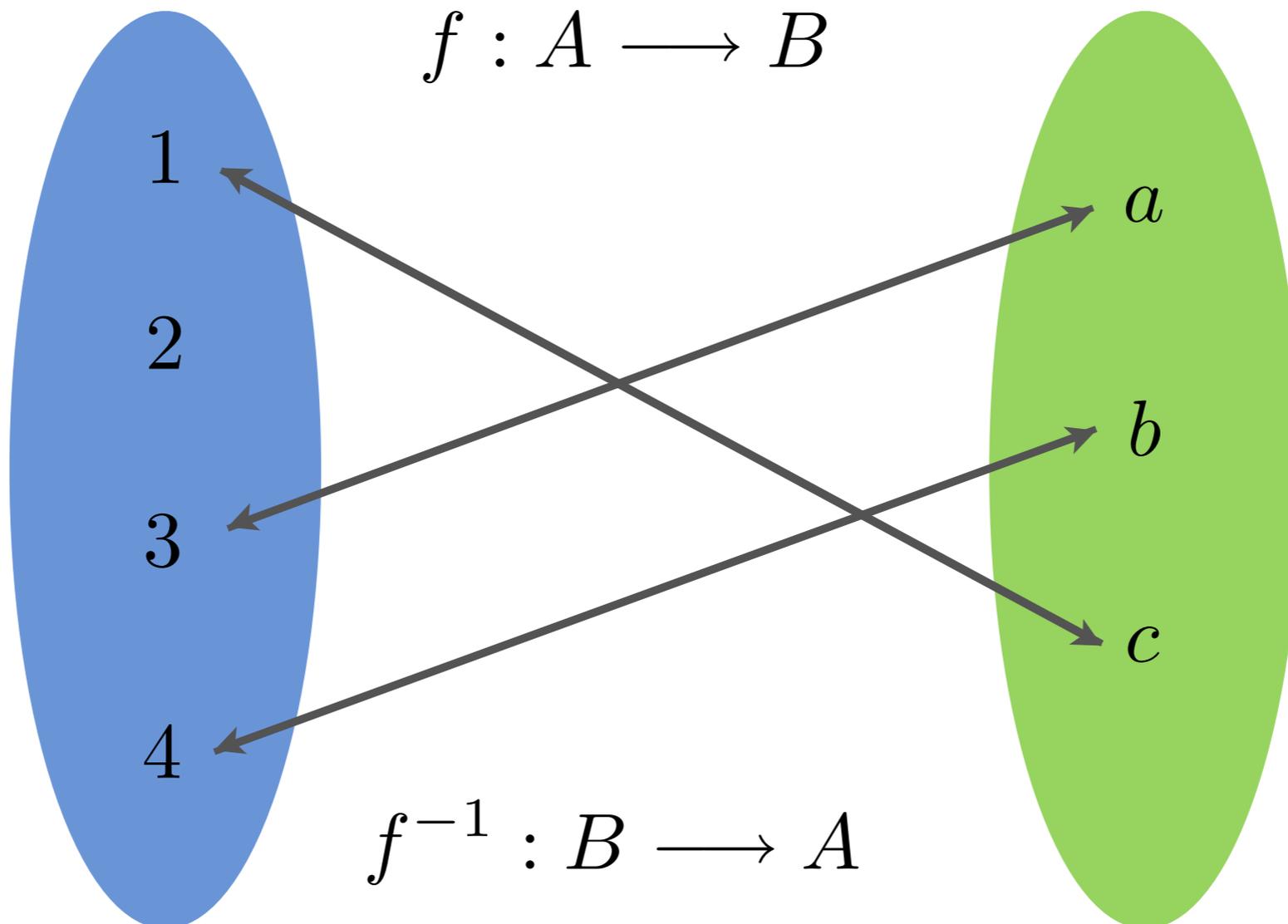


3 est en relation avec plus d'un élément de B

Parfois une fonction a la particularité que si l'on interchange

(Départ) A B (Arrivé)

$$f : A \longrightarrow B$$

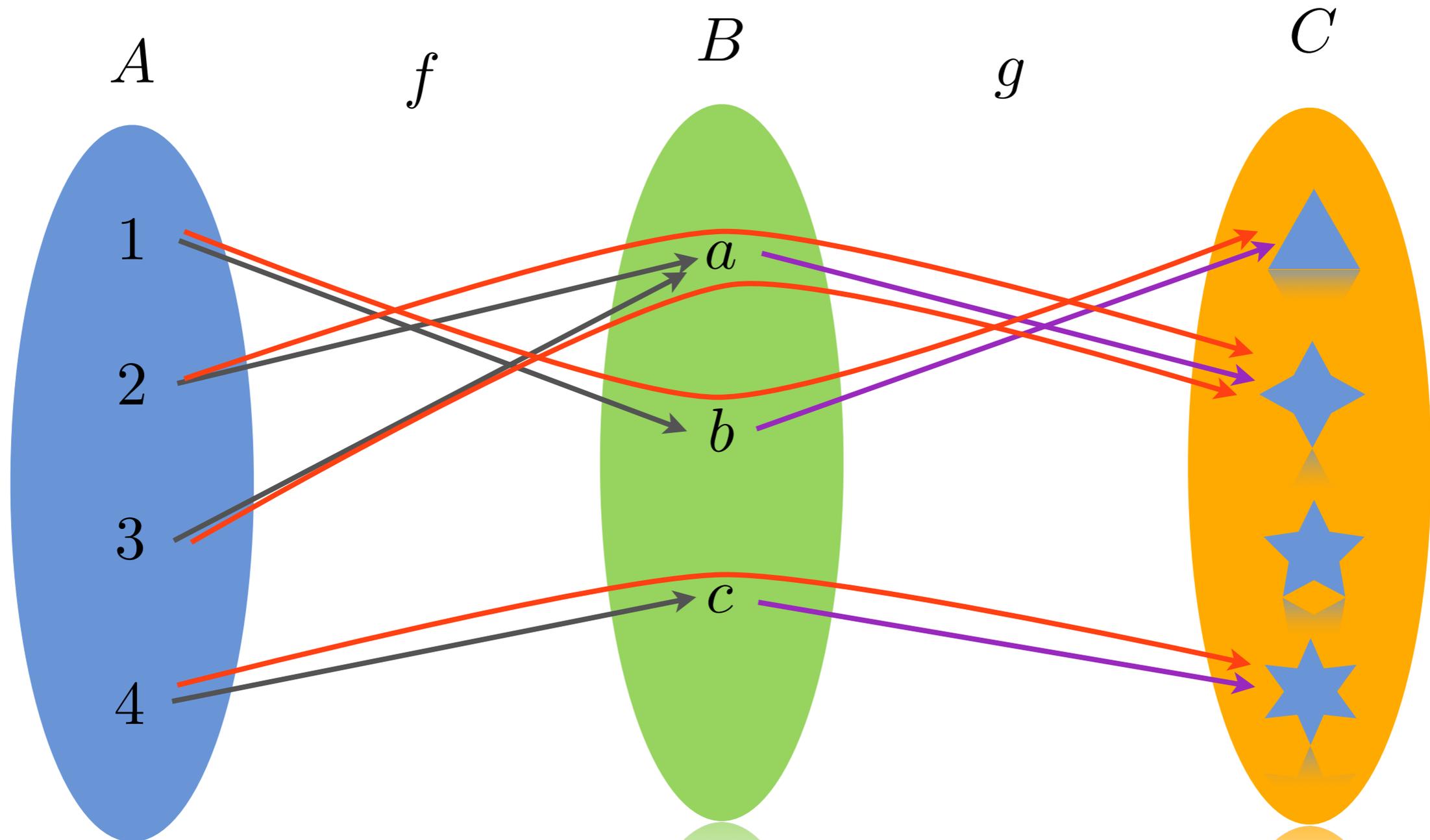


$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

on obtient aussi une fonction.

On nomme une telle fonction, la fonction inverse
ou la réciproque.

Si on a une fonction de A dans B et une fonction de B dans C
On peut construire une fonction de A dans C comme suit.



qu'on nomme la composition de fonction et qu'on note $g \circ f$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = \text{diamond}$$

Maintenant qu'on a vu le concept de fonction, regardons un cas particulier de fonction qui va particulièrement nous intéresser cette session.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

\mathbb{R}
(Départ)

\mathbb{R}
(Arrivé)

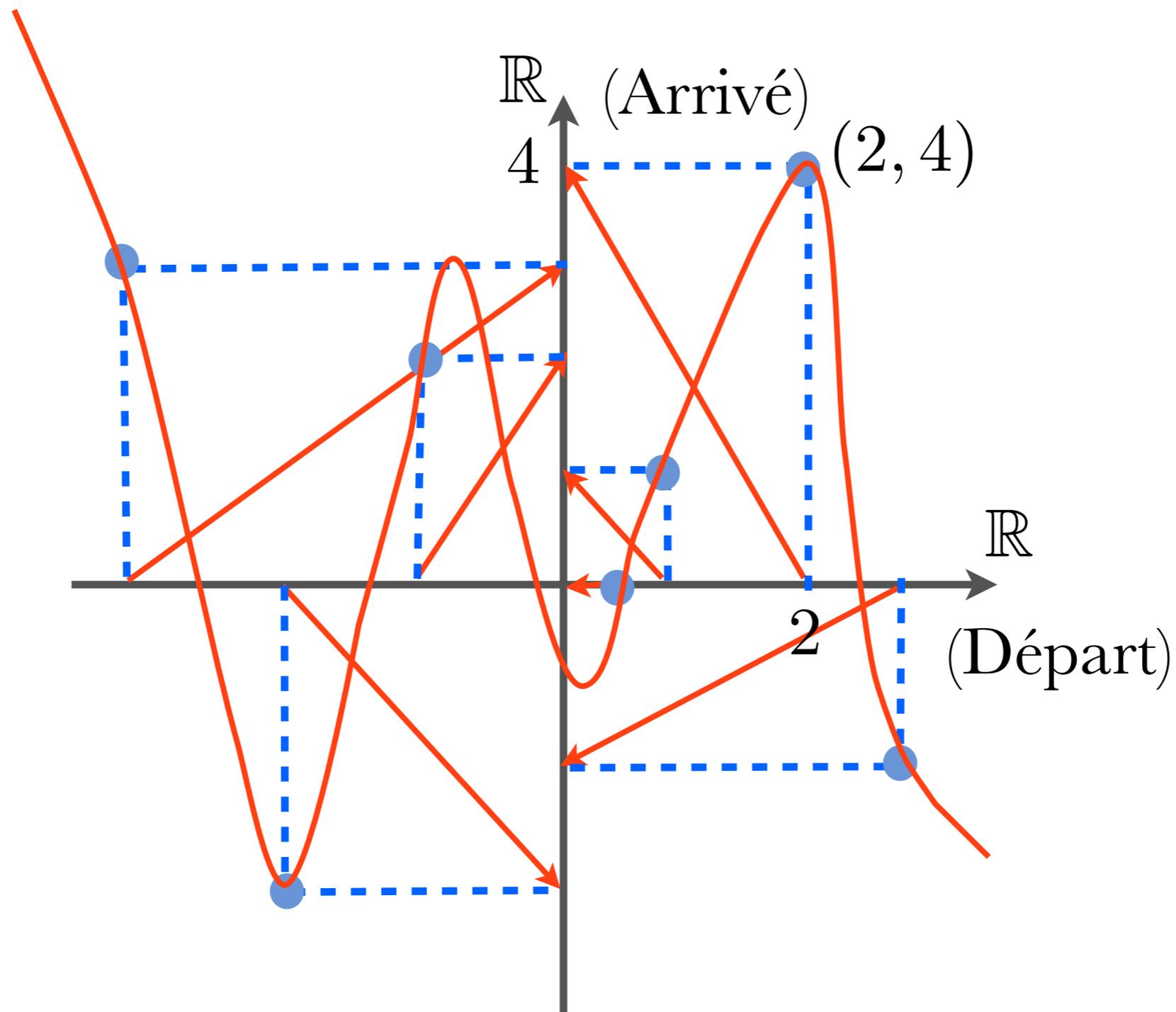
Petit problème:

Étant donné que les nombres réels sont dense, il va y en avoir des flèches!

Et notre modélisation va ressembler plutôt à ...

D'où le stratagème suivant.

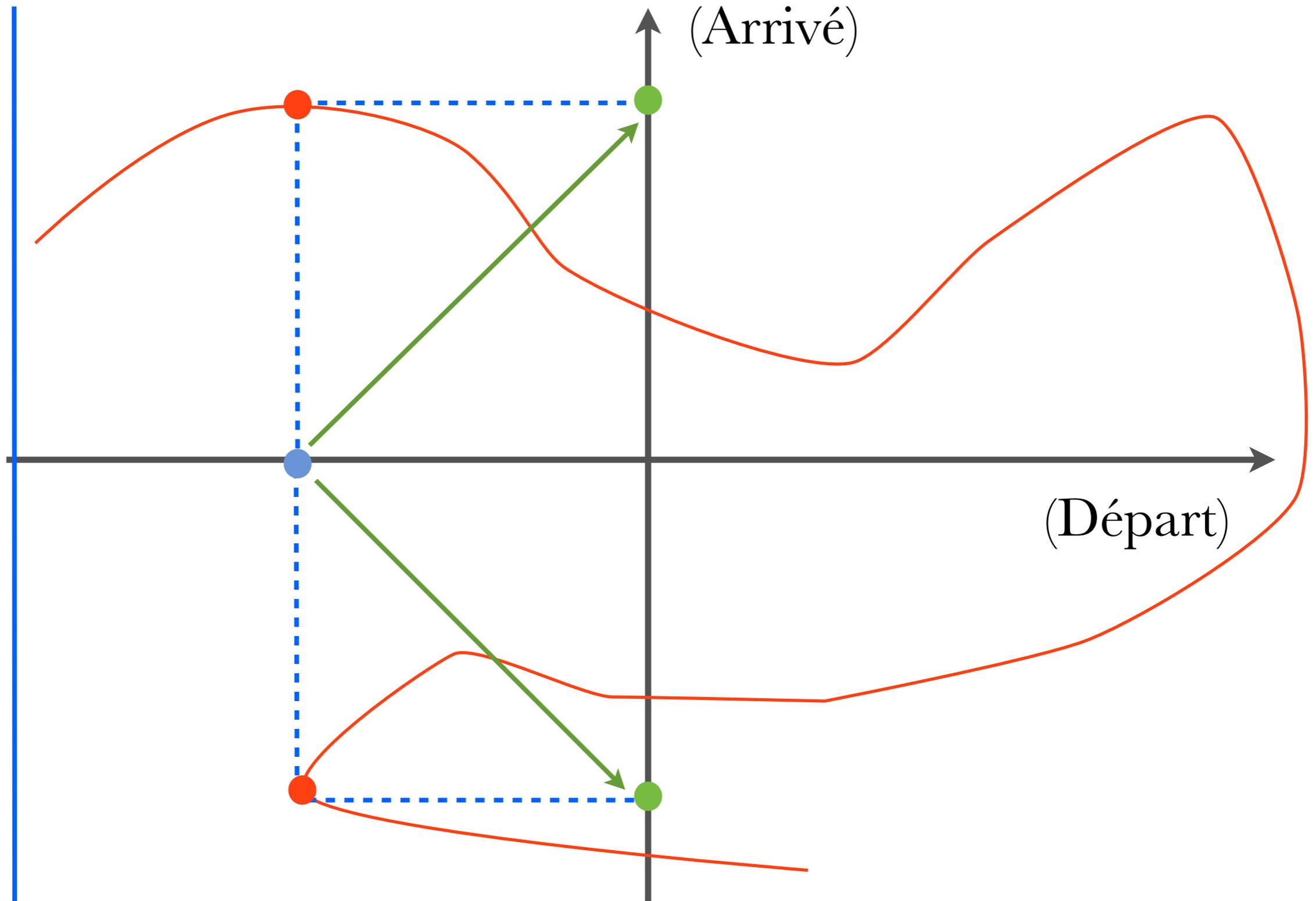
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



On a que

$(2, 4) \in f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on note cela plutôt $f(2) = 4$

Ici la relation suivante n'est pas une fonction, car ce nombre



est en relation avec deux nombres.

Bien qu'une fonction soit un ensemble de couples (a, b) telle que chaque a est en relation avec un unique b

on ne va pas les étudier sous cette forme aussi générale.

On va plutôt étudier les fonctions qui sont données à l'aide d'une règle.

Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

qu'on va noter plutôt comme suit

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

Example

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

$$f(0) = 3(0)^2 - 2(0) + 5 = 5$$

$$f(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 5 = 6$$

$$f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 5 = 10$$

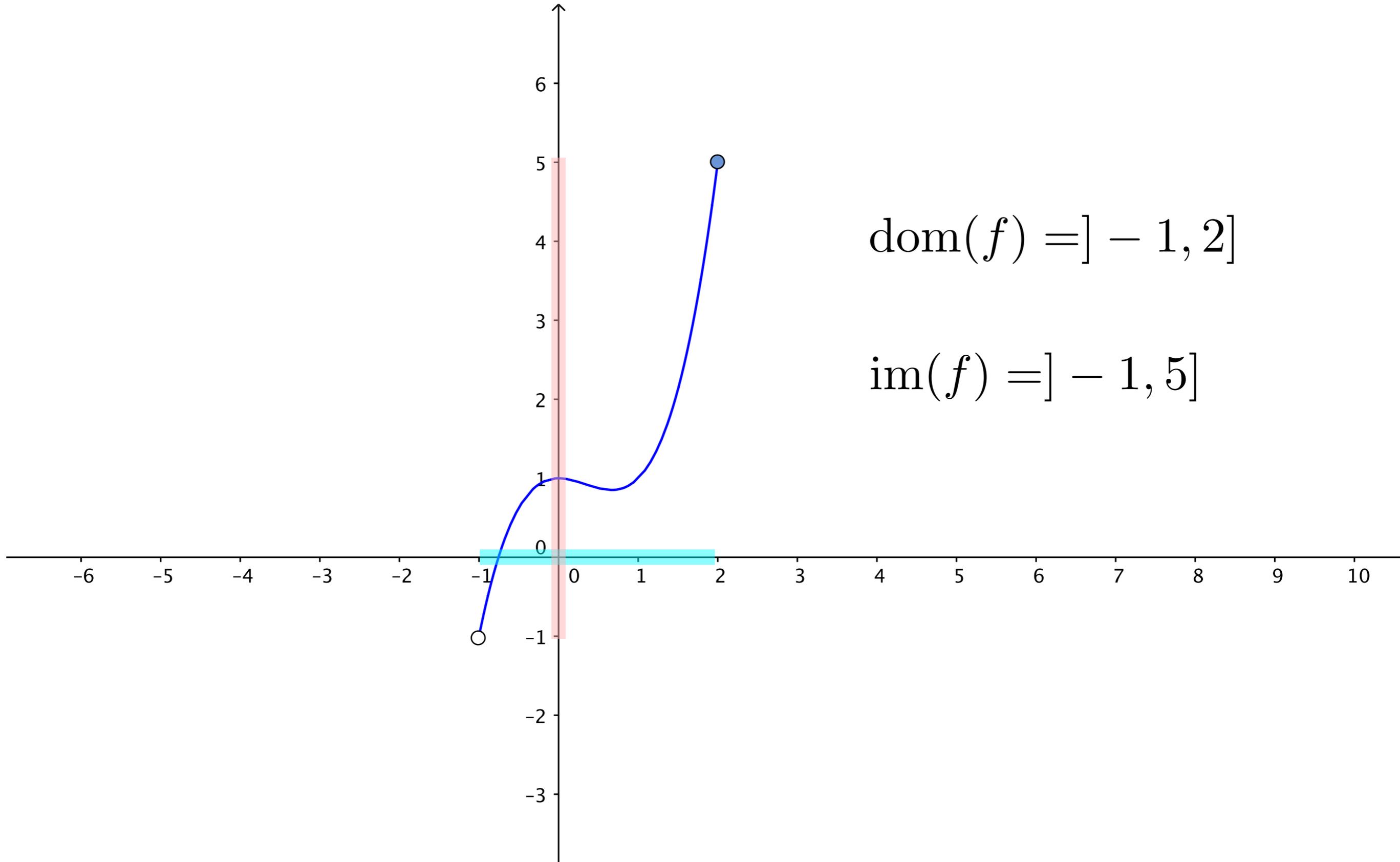
$$f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 5 = 13$$

Faites les exercices suivants

p.149 # 1 à 4

Dans ce qui suit, nous allons explorer graphiquement certaines caractéristiques des fonctions.

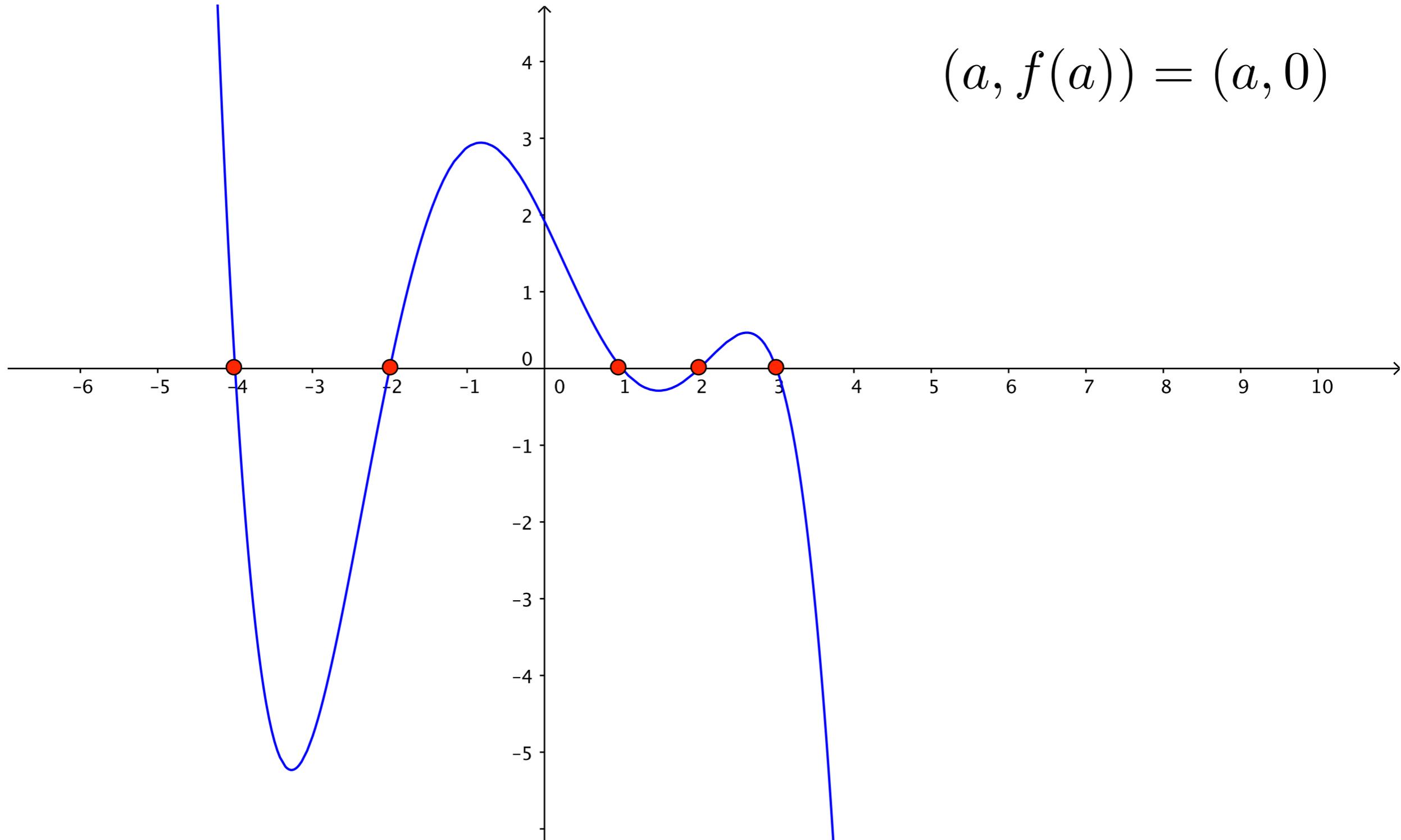
Domaine et image



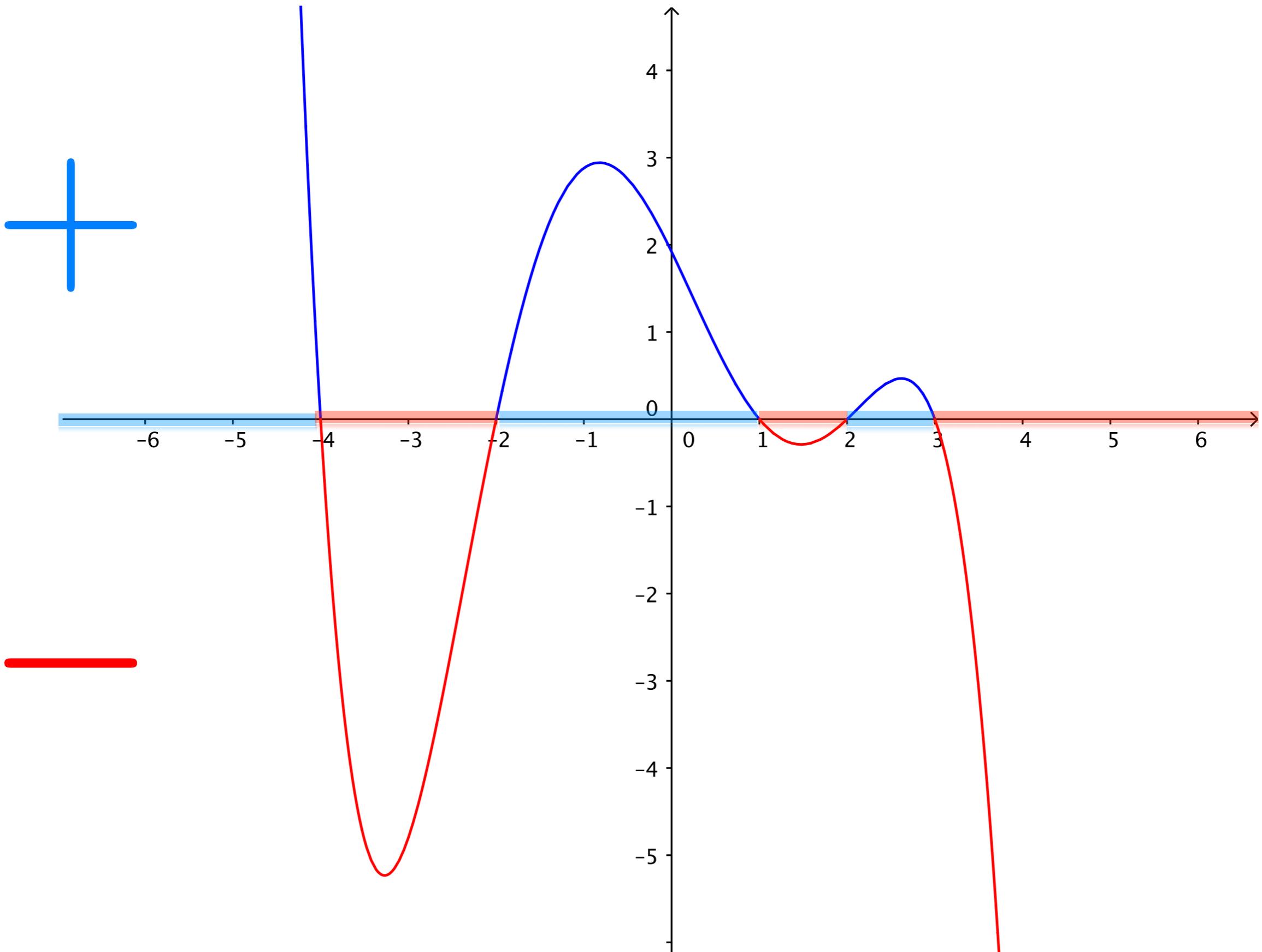
Zéros d'une fonction

$$f(x) = 0$$

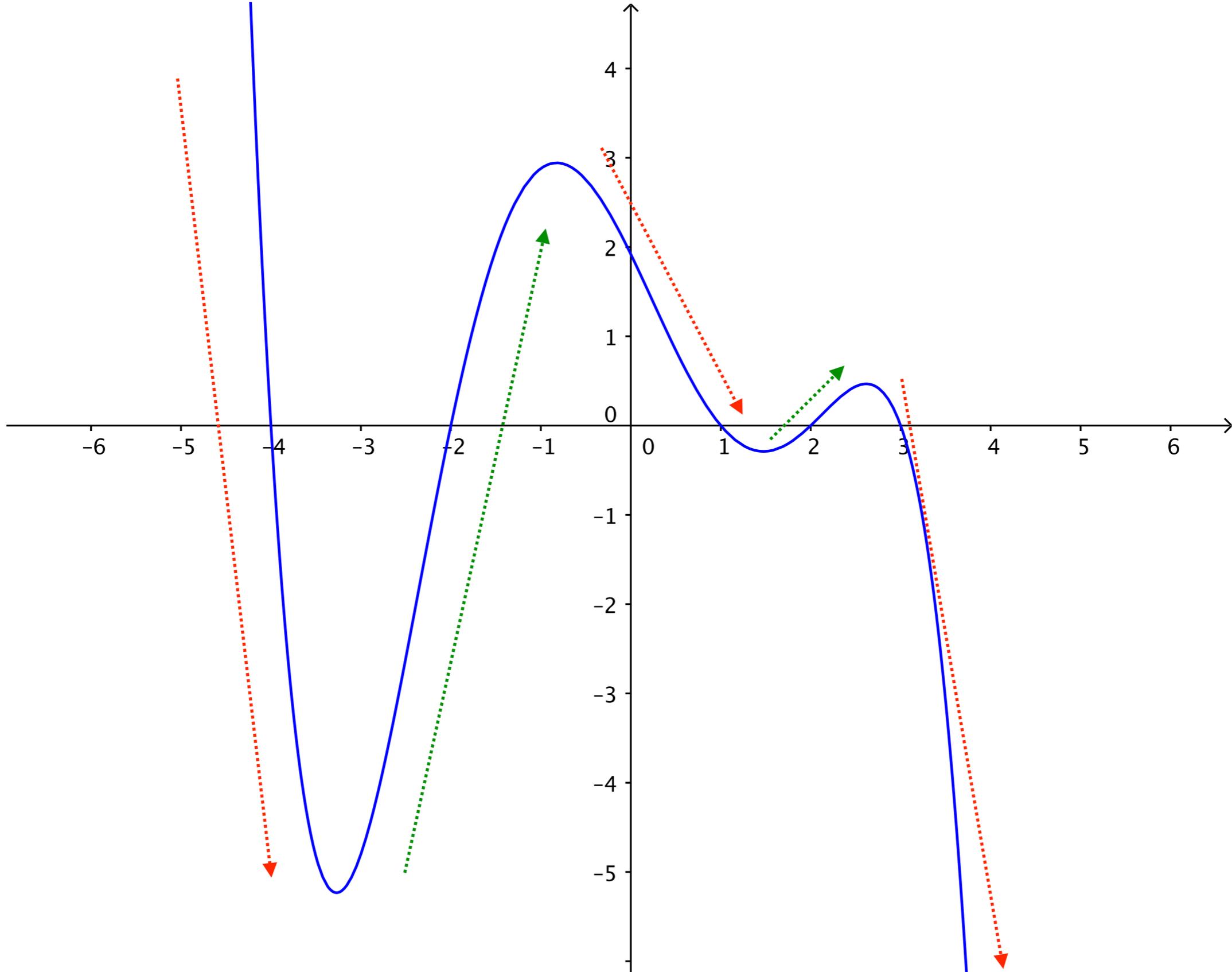
$$(a, f(a)) = (a, 0)$$



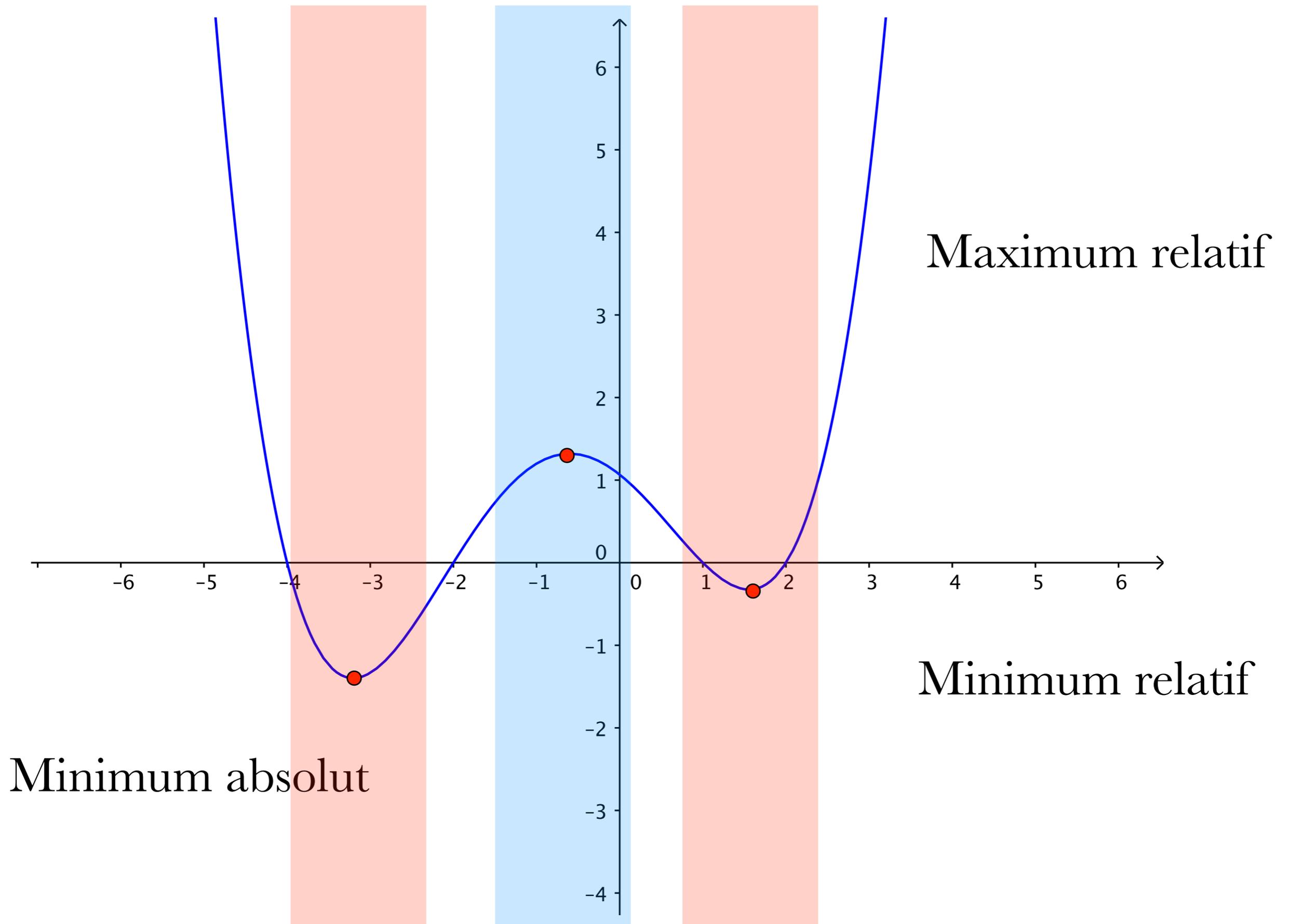
Signe d'une fonction



Croissance et décroissance



Extrémums



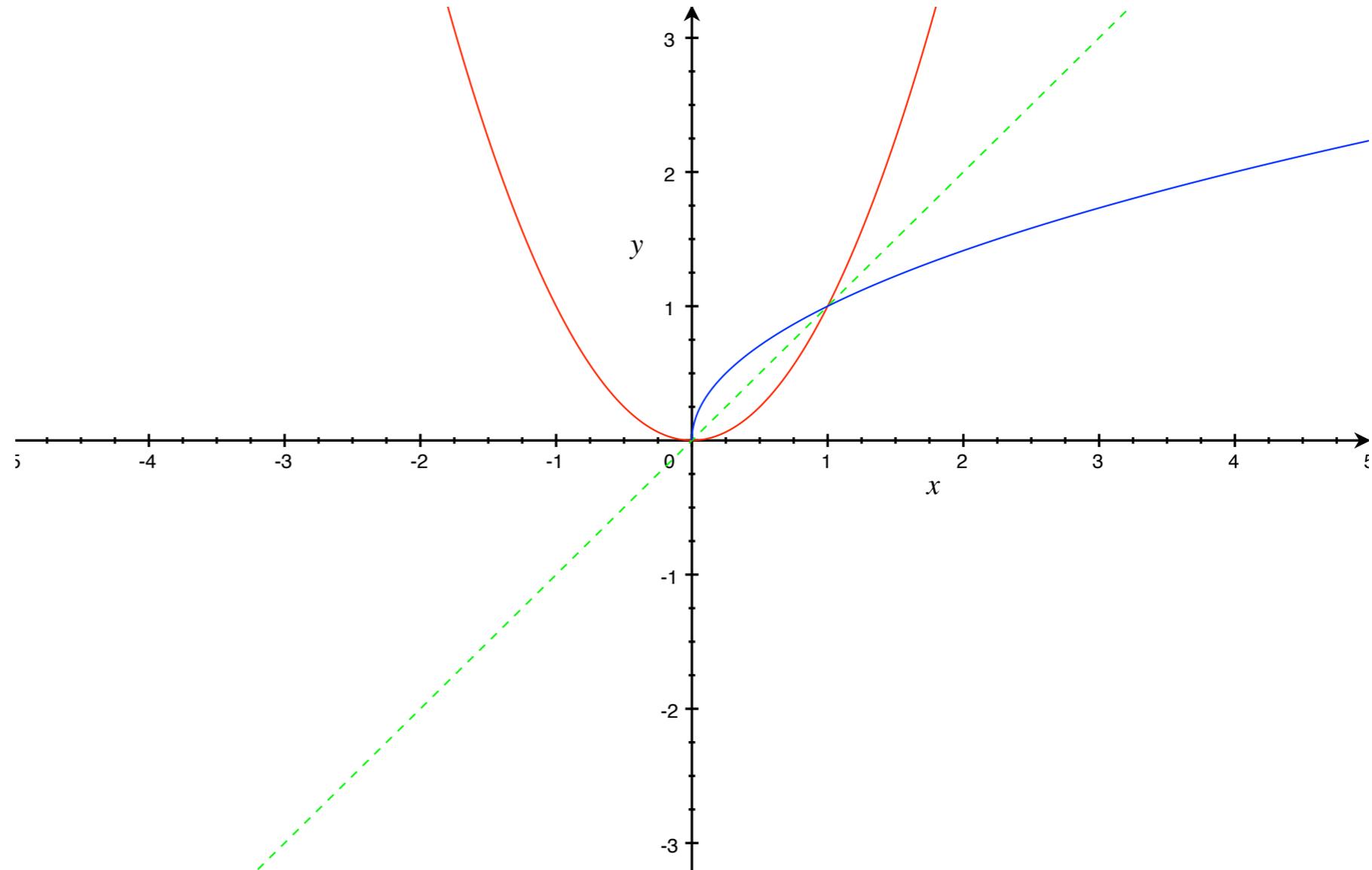
On a vu qu'une fonction inverse interchangeait le rôle de l'ensemble de départ et celui d'arrivé.

Regardons la fonction

$$f(x) = x^2$$

sa fonction inverse est

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



Fonction vs équation.

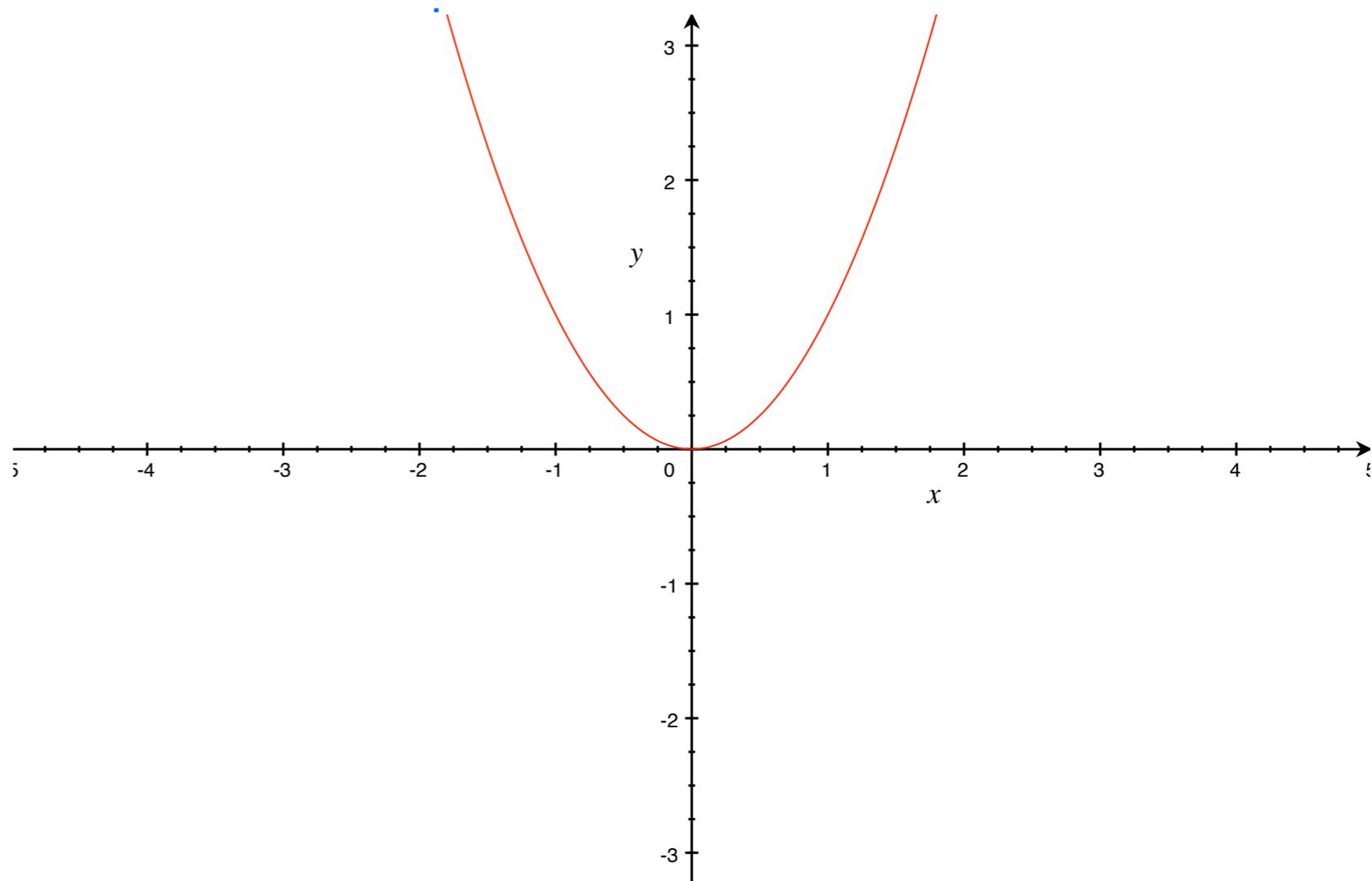
Malheureusement, les deux concepts sont souvent confondus.

Une équation est une relation, mais pas nécessairement une fonction.

Par exemple:

$$x^2 + y^2 = 9$$

mais elle n'est pas une
fonction.



Par contre l'équation

$$y = x^2$$

est une fonction et c'est pourquoi on peut écrire: $f(x) = x^2$

Devoir:

p.180 # 1 à 8