

3.3 FONCTION LINÉAIRE

cours 27

Définition

Une fonction linéaire est une fonction de la forme

$$f(x) = ax + b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

Exemple

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + 4 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$h(x) = 5x = 5x + 0$$

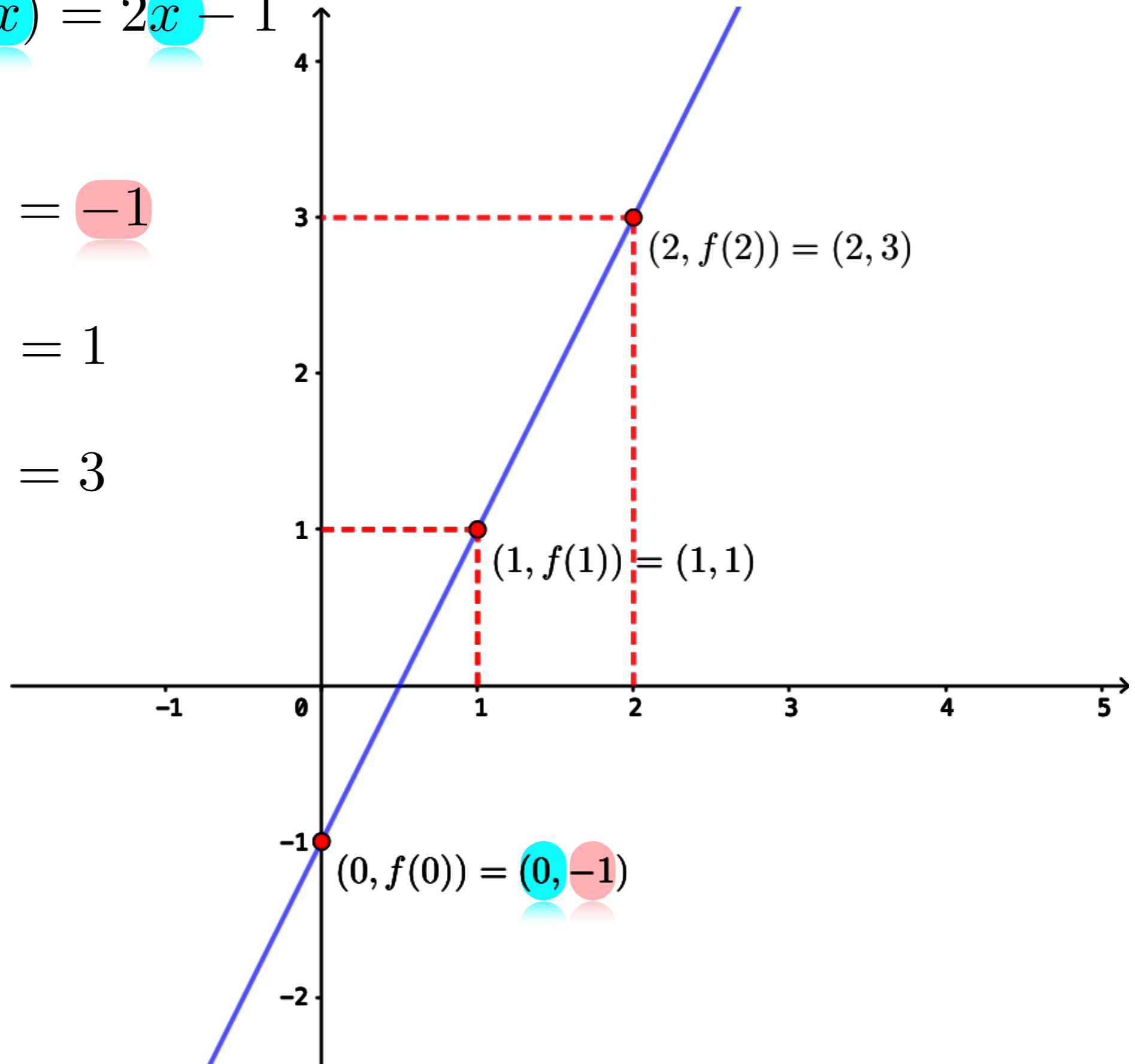
Example

$$f(x) = 2x - 1$$

$$f(0) = 2(0) - 1 = -1$$

$$f(1) = 2(1) - 1 = 1$$

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$



En évaluant une fonction linéaire en quelques valeurs de x , les points qu'on obtient dans le plan cartésien semblent tous être sur une même droite.

Le sont-ils vraiment?

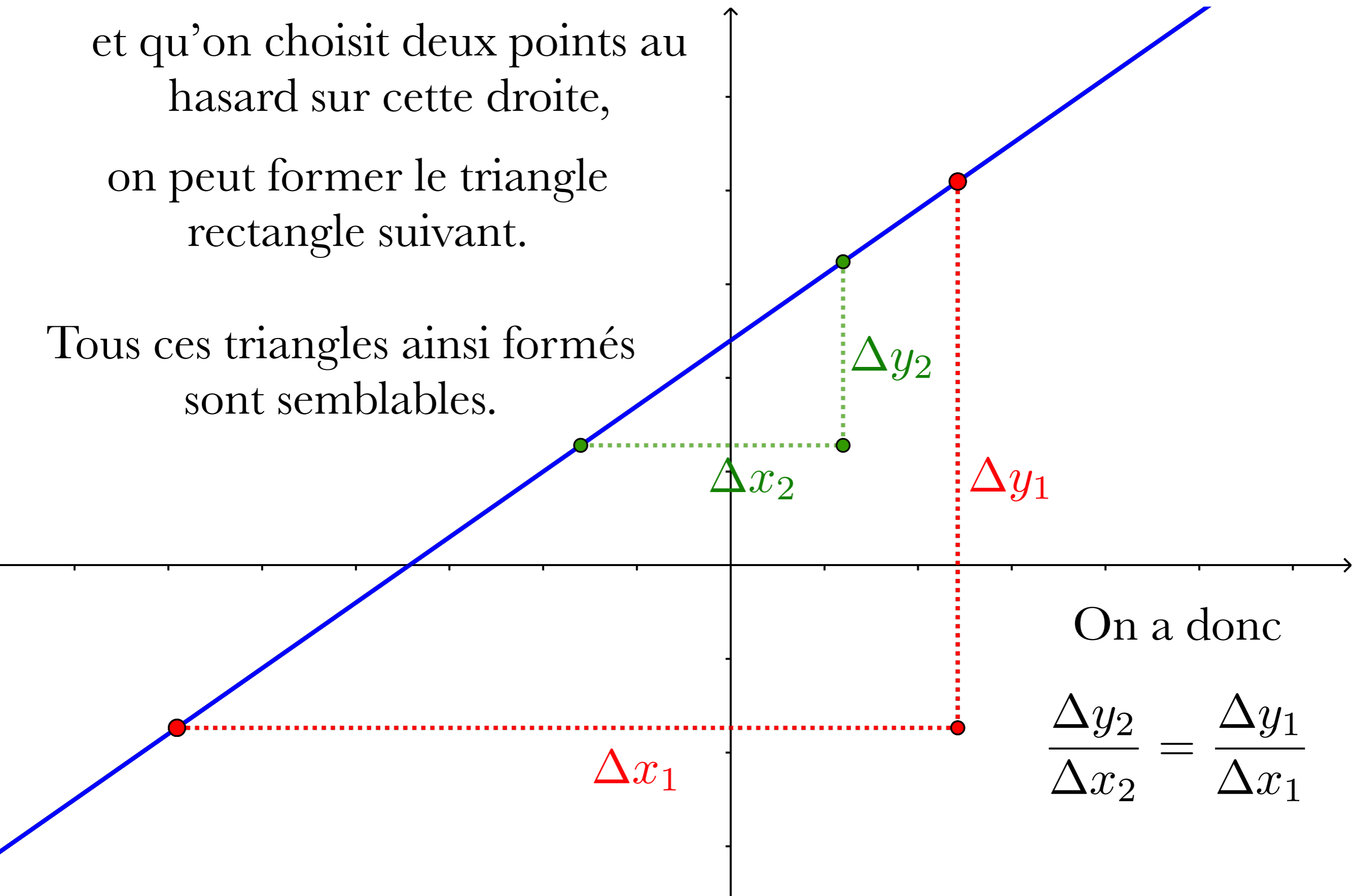
Si oui, comment s'assurer que ce sera toujours le cas, peu importe les points, choisis.

Si l'on prend une droite dans le plan cartésien

et qu'on choisit deux points au hasard sur cette droite,

on peut former le triangle rectangle suivant.

Tous ces triangles ainsi formés sont semblables.



On a donc

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

Pour vérifier que tous les points du graphe de la fonction

$$f(x) = ax + b$$

forment une droite, il suffit de vérifier que pour toute paire de points,

$$(x_1, f(x_1)) \quad (x_2, f(x_2))$$

on a que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est constant

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_2) - f(x_1) \\ &= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \end{aligned}$$

$$f(x) = ax + b$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 + \cancel{b} - ax_1 - \cancel{b}}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2 - x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}} = a$$

Exemple

Considérons la fonction $f(x) = 3x - 2$

$$f(0) = 3(0) - 2 = -2 \quad (0, -2)$$

$$f(1) = 3(1) - 2 = 1 \quad (1, 1)$$

$$f(2) = 3(2) - 2 = 4 \quad (2, 4)$$

Pour les points

$(1, 1)$ et $(0, -2)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 - 1}{0 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Pour les points

$(1, 1)$ et $(2, 4)$

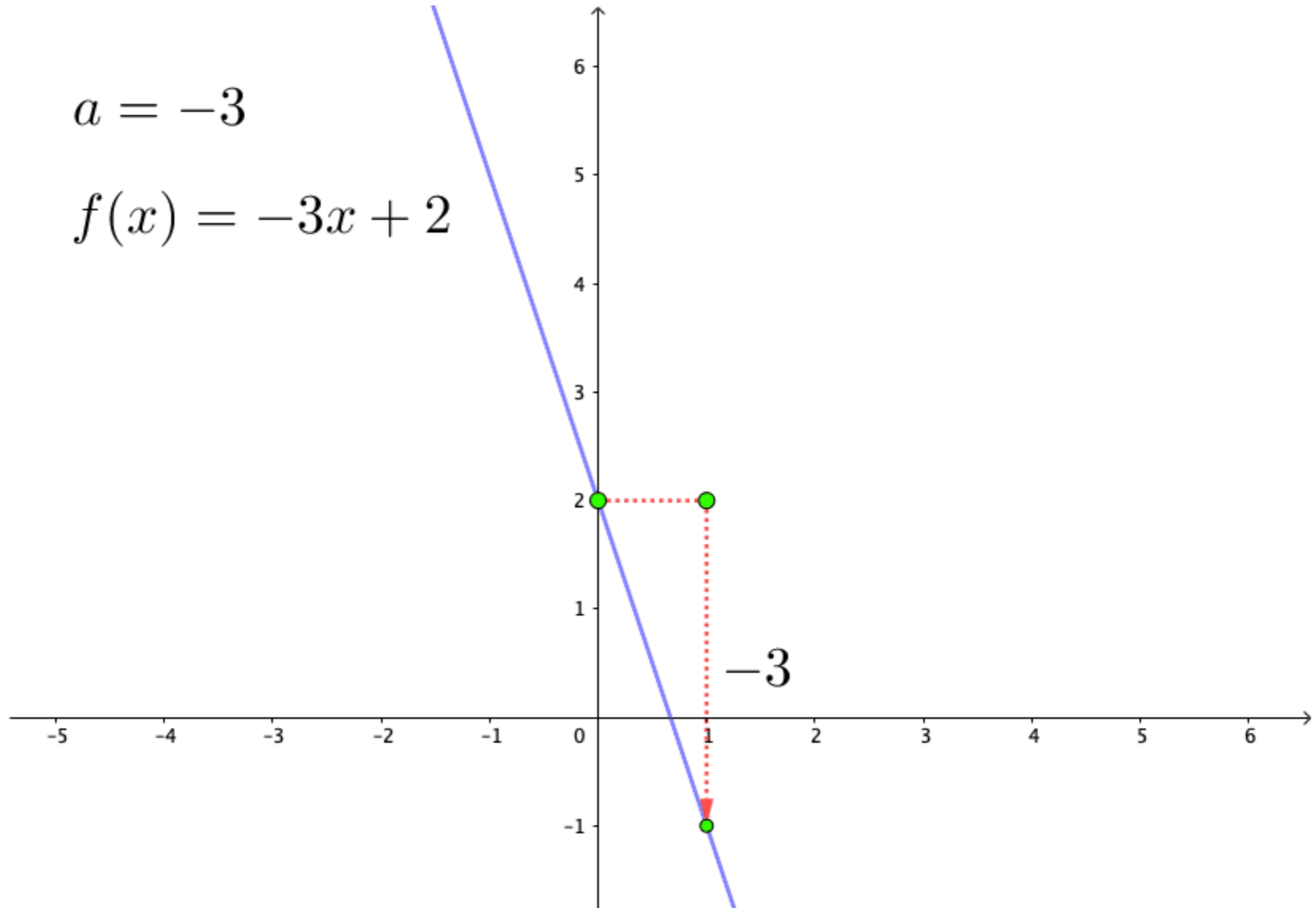
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

Puisque $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est toujours la même valeur peu importe les points,

si on prend deux points de sorte que $\Delta x = 1$ alors $\Delta y = a$

$$a = -3$$

$$f(x) = -3x + 2$$



On peut donc aisément voir que la fonction

$$f(x) = ax + b$$

sera croissante si $a > 0$,

sera décroissante si $a < 0$

et sera constante si $a = 0$

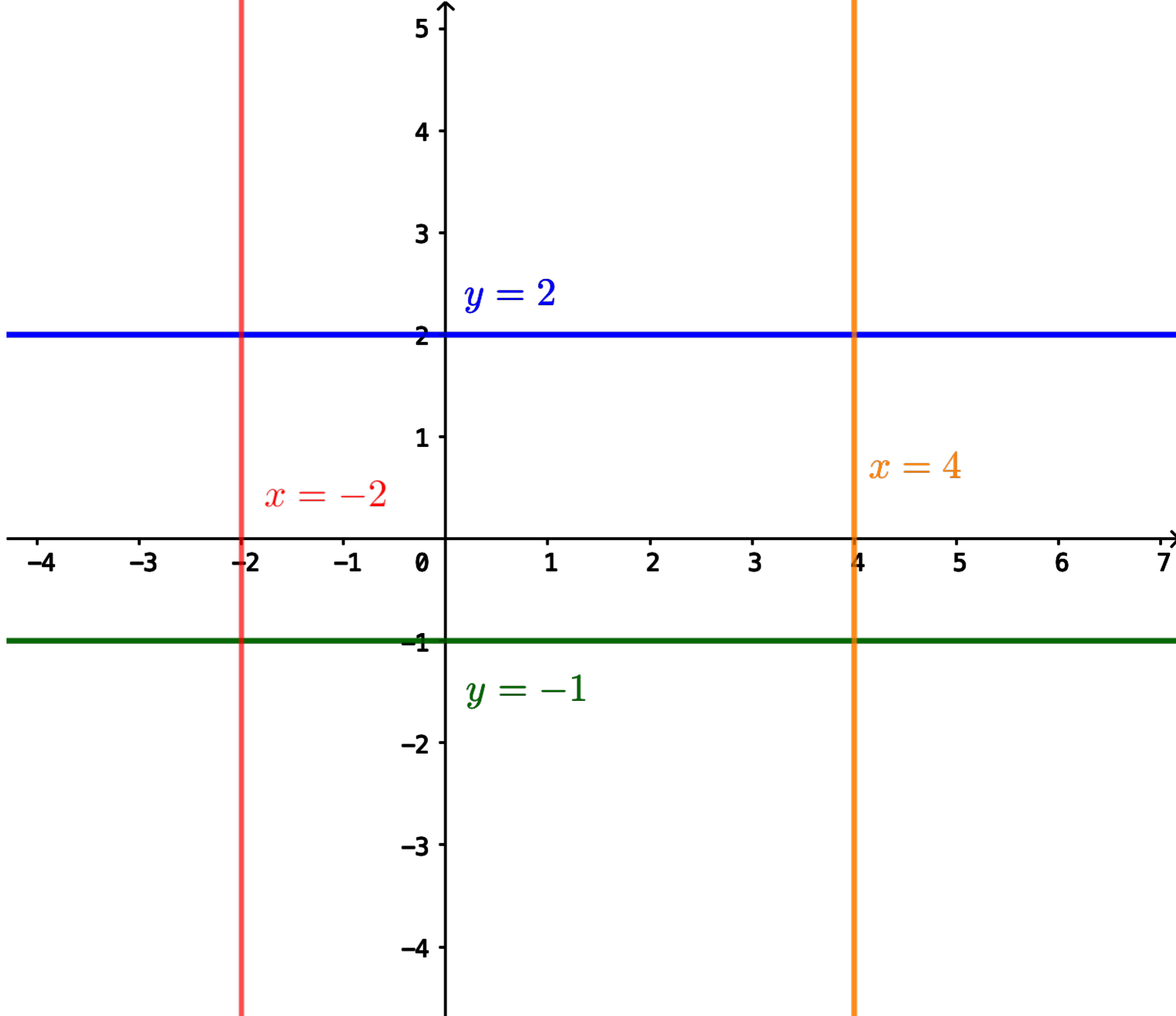
On vient de voir que toutes les fonctions de la forme

$$f(x) = ax + b$$

sont des droites.

Inversement est-ce que toutes les droites dans le plan peuvent être vues comme une fonction de cette forme?

Non, les droites verticales ne sont pas des fonctions.



Faites les exercices suivants

p.196 # 1 à 4

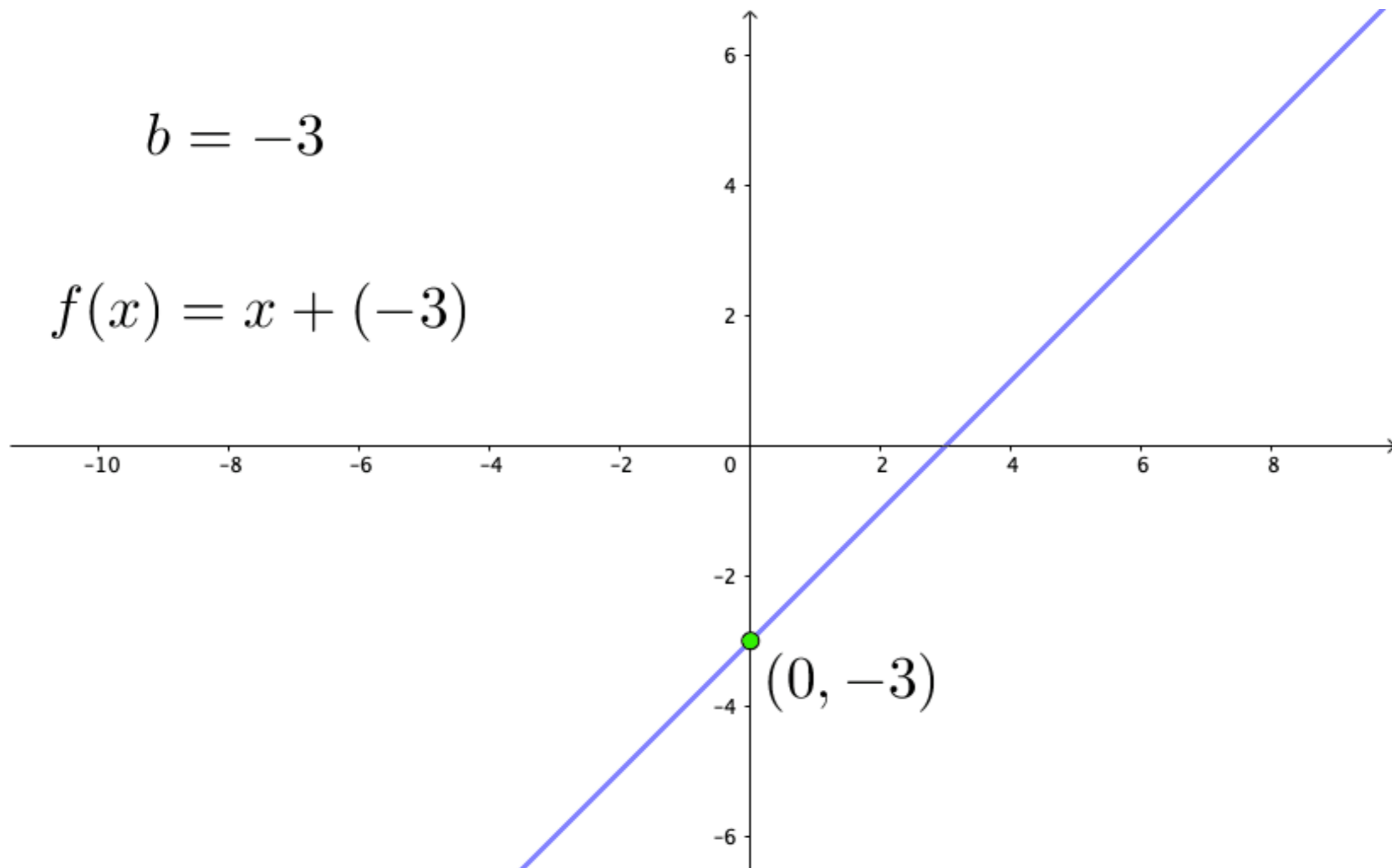
L'ordonnée à l'origine est la valeur de la fonction lorsque $x = 0$

$$f(x) = ax + b \qquad f(0) = a(0) + b = b$$

Géométriquement, ça correspond à l'endroit où la droite croise l'axe des y.

$$b = -3$$

$$f(x) = x + (-3)$$



Si l'on veut trouver l'équation d'une droite lorsqu'on connaît deux points

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

On commence par trouver la pente

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

et l'on trouve l'ordonnée à l'origine en remplaçant un des deux points dans la fonction

$$y_1 = ax_1 + b \quad \implies \quad b = ax_1 - y_1$$

Exemple

Trouver la fonction linéaire qui passe par les points

$$(-2, 7) \text{ et } (5, 2)$$

$$a = \frac{7 - 2}{-2 - 5} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$$

$$f(x) = -\frac{5}{7}x + b$$

$$7 = -\frac{5}{7}(-2) + b = \frac{10}{7} + b$$

$$\implies b = 7 - \frac{10}{7} = \frac{49 - 10}{7} = \frac{39}{7}$$

$$f(x) = -\frac{5}{7}x + \frac{39}{7}$$

Faites les exercices suivants

p.199 # 1 à 3

Pour vérifier si un point appartient à une droite, il suffit de vérifier s'il satisfait à l'équation

Exemple

$$f(x) = 3x - 1$$

Le point $(1, 2)$ appartient à cette droite car $2 = 3(1) - 1$

par contre, le point $(2, 3)$ n'appartient pas à cette droite, car

$$3 \neq 3(2) - 1$$

Donc si l'on cherche à trouver le point d'intersection de deux droites,

$$f(x) = ax + b \qquad g(x) = cx + d$$

il faut trouver les couples (x, y) qui satisfont aux deux équations.

C'est-à-dire qu'il faut résoudre un système d'équations

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

Deux droites seront parallèles si elles ont la même pente

Exemple

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 7$$

sont parallèles

Deux droites seront perpendiculaires si le produit de leurs pentes donne -1

Exemple

$$f(x) = 2x - 7 \quad g(x) = -\frac{x}{2} + 4$$

$$2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

Faites les exercices suivants

p.204 #1, 2 et 6

Devoir:

p. 206 # 1 à 16