

1.7 VECTEURS

cours 7

Les vecteurs sont des objets mathématiques qui modélisent plusieurs concepts dont, entre autres, les translations et les forces.

Les vecteurs géométriques sont composés de trois informations;

- Une longueur
- Une direction
- Un sens

On illustre habituellement un vecteur à l'aide d'une flèche

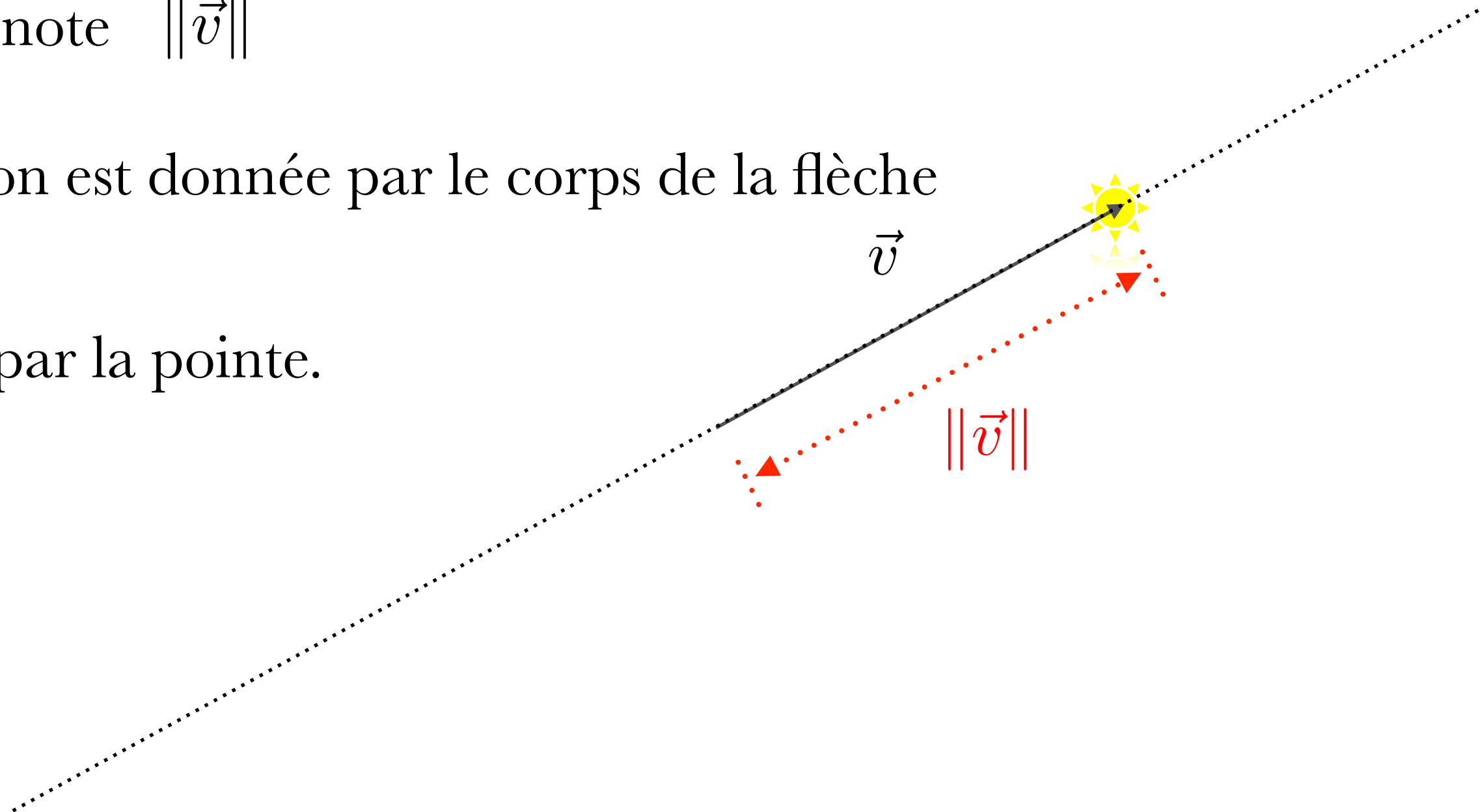
On note les vecteurs à l'aide d'une lettre avec une flèche au-dessus

La longueur de la flèche est la longueur du vecteur

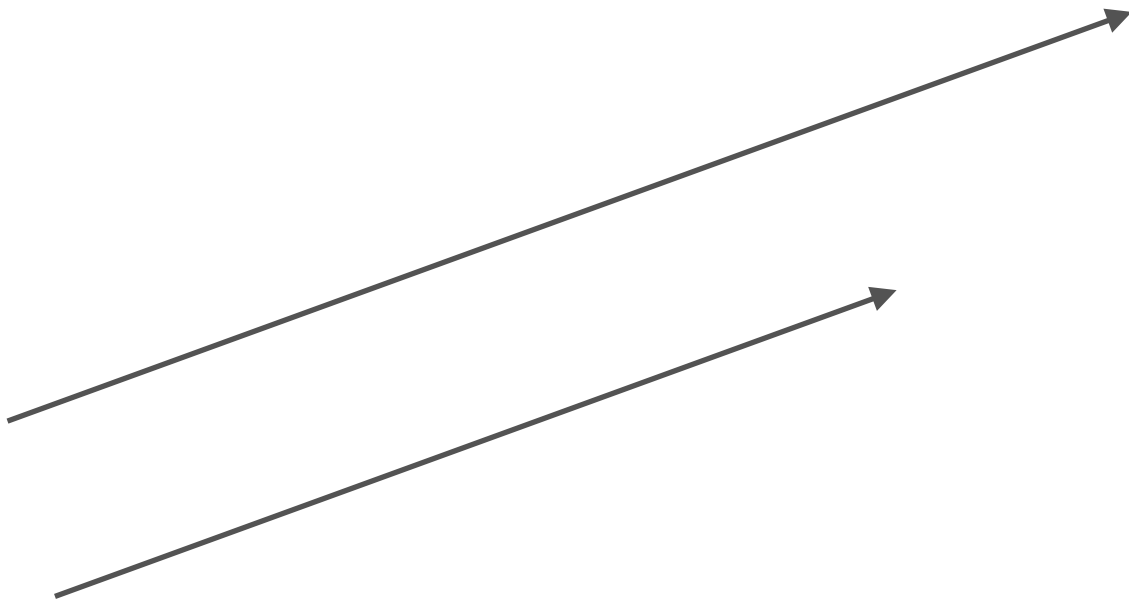
que l'on note $\|\vec{v}\|$

La direction est donnée par le corps de la flèche

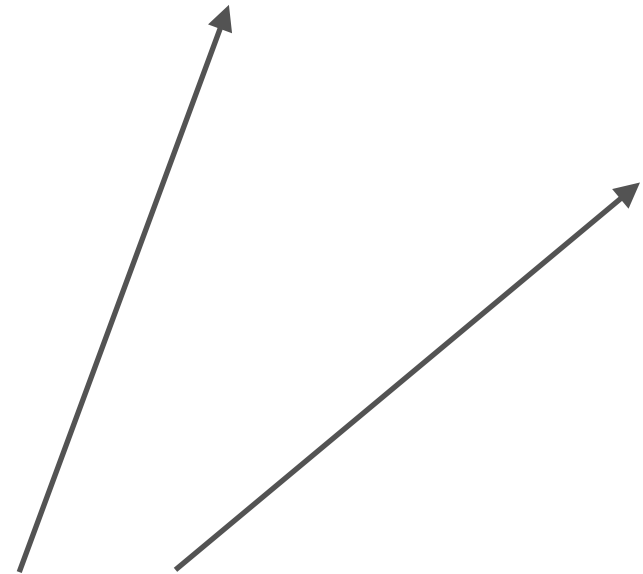
et le sens par la pointe.



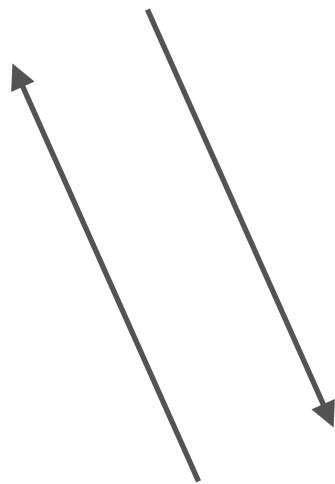
Pas la même longueur



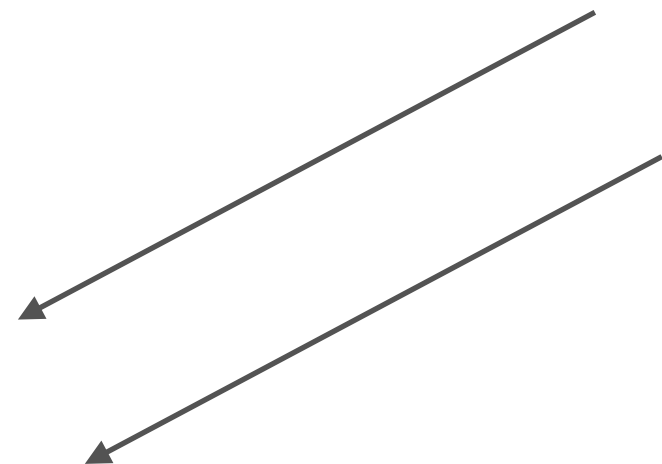
Pas la même direction



Pas le même sens



Vecteurs égaux

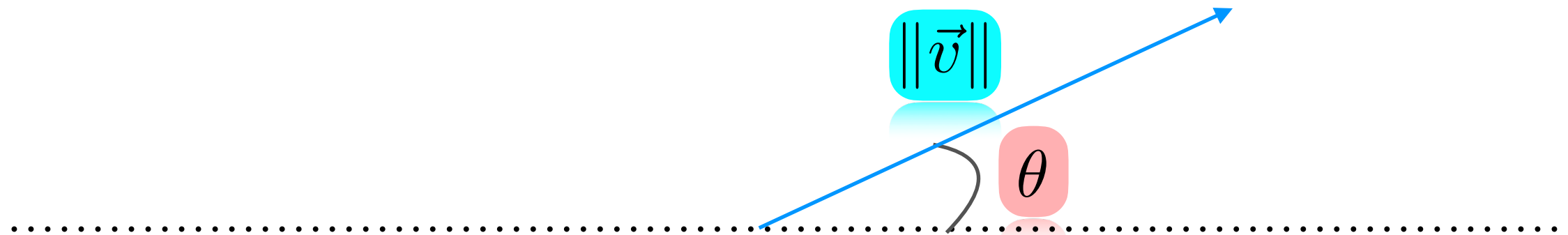


Forme polaire d'un vecteur

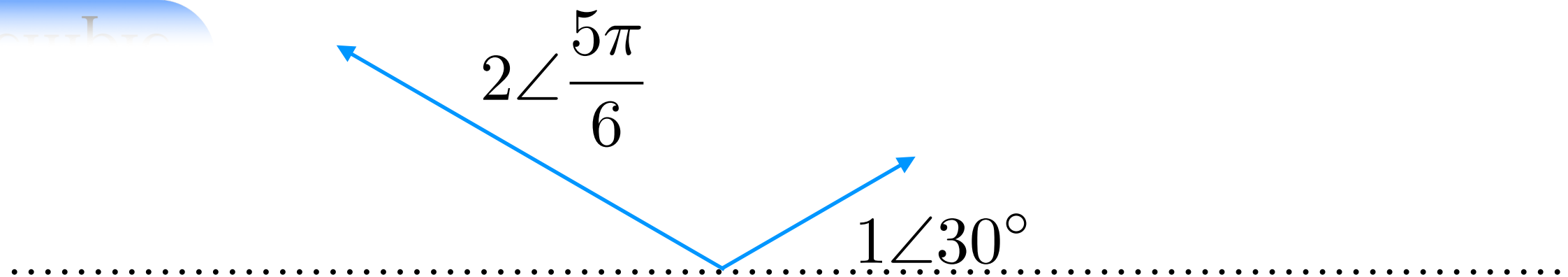
$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta$$

La longueur du vecteur

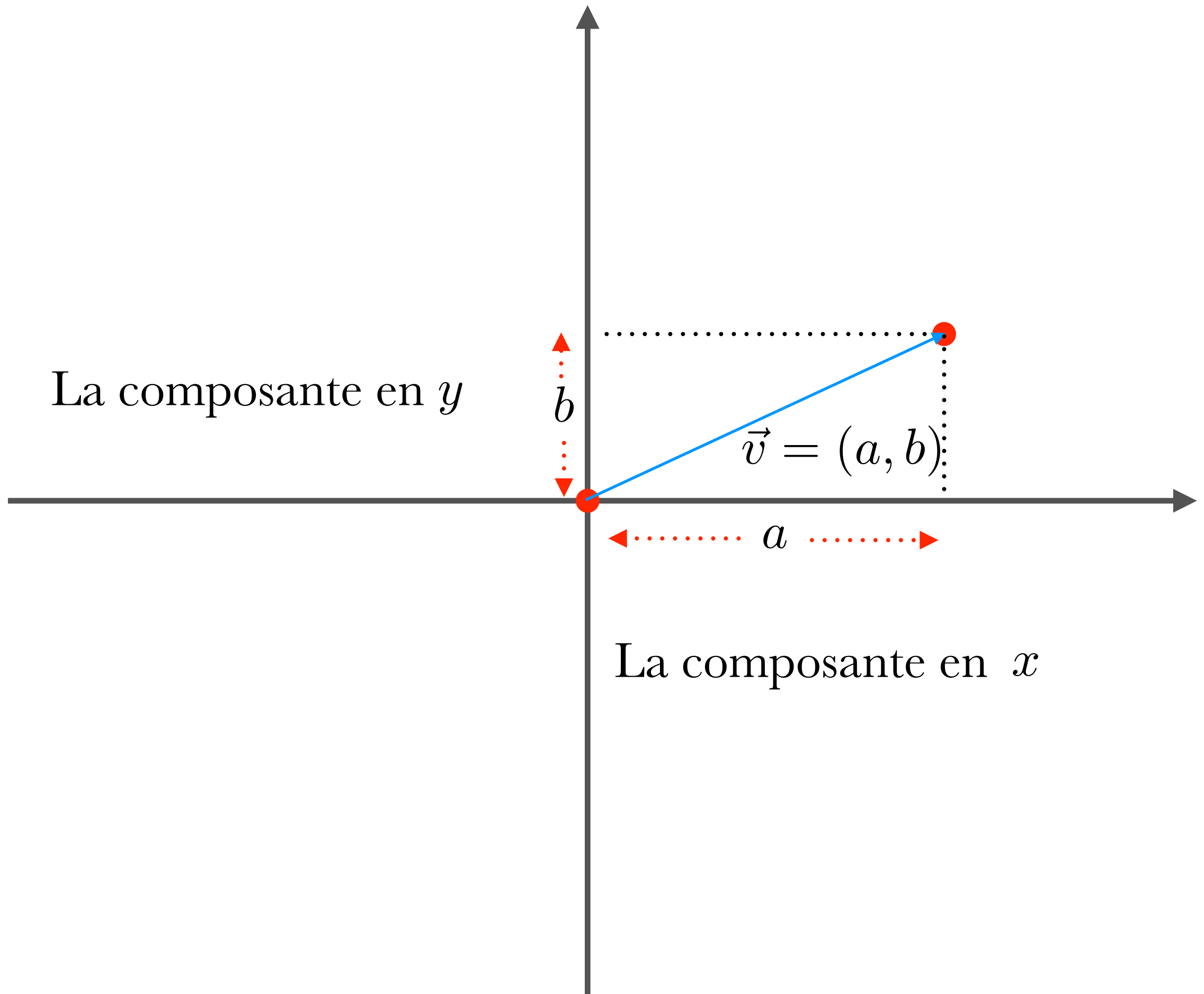
L'angle qu'il fait avec l'horizontale.



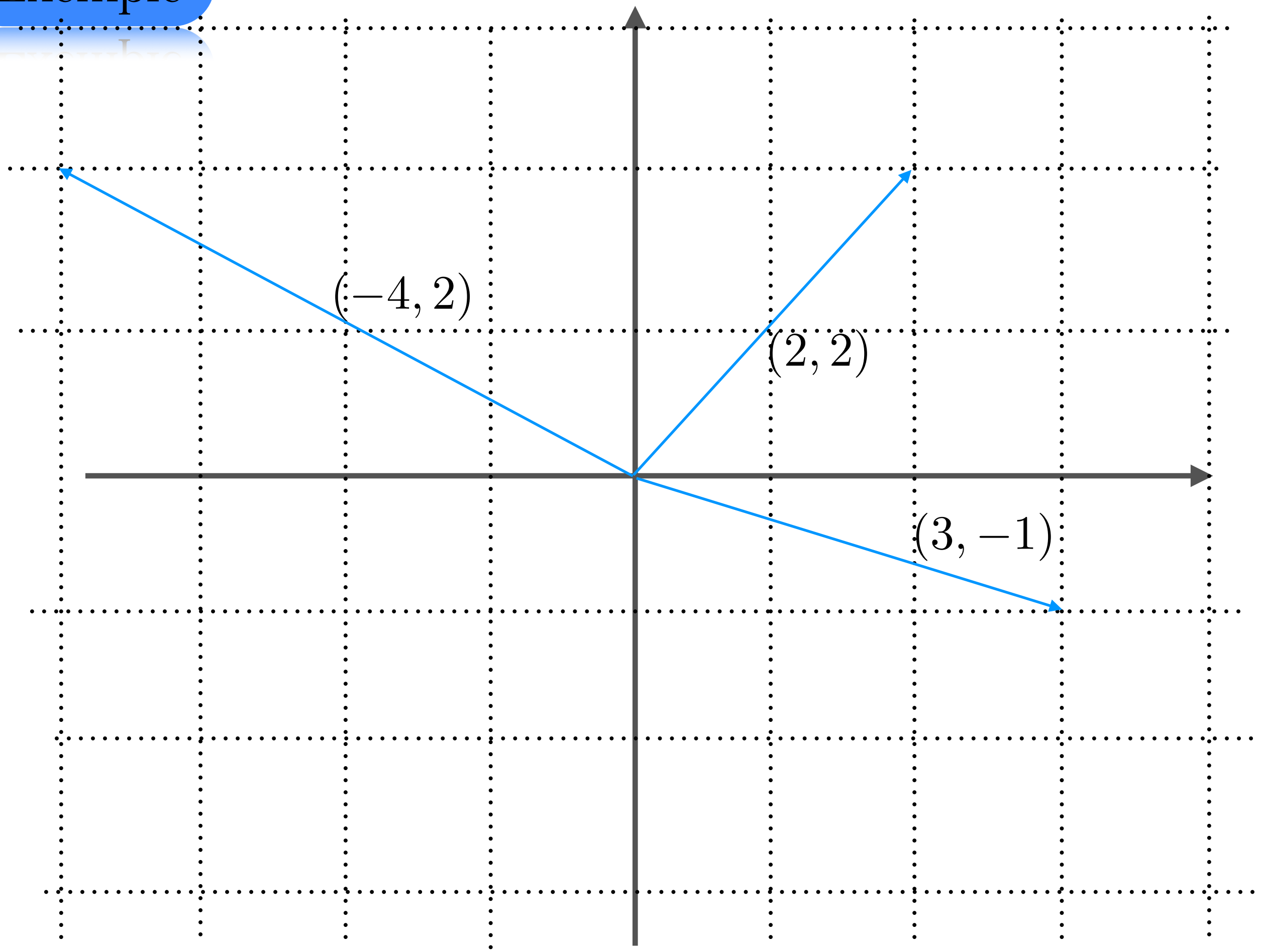
Exemple



Forme cartésienne d'un vecteur



Example



Faites les exercices suivants

60 et 61

Passage de la forme cartésienne à la forme polaire

Par pythagore

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

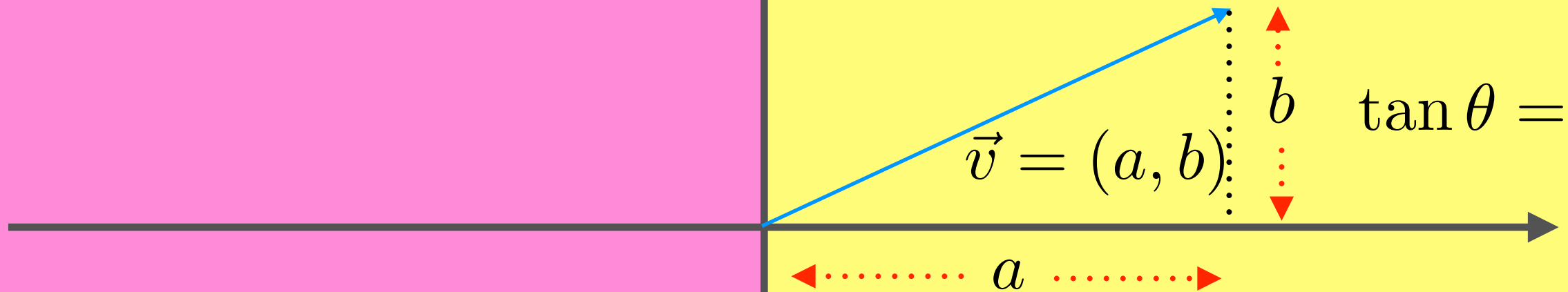
$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\vec{v} = (a, b)$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} + \pi$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} + 180^\circ$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$



Example

$$\vec{u} = (-1, -\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

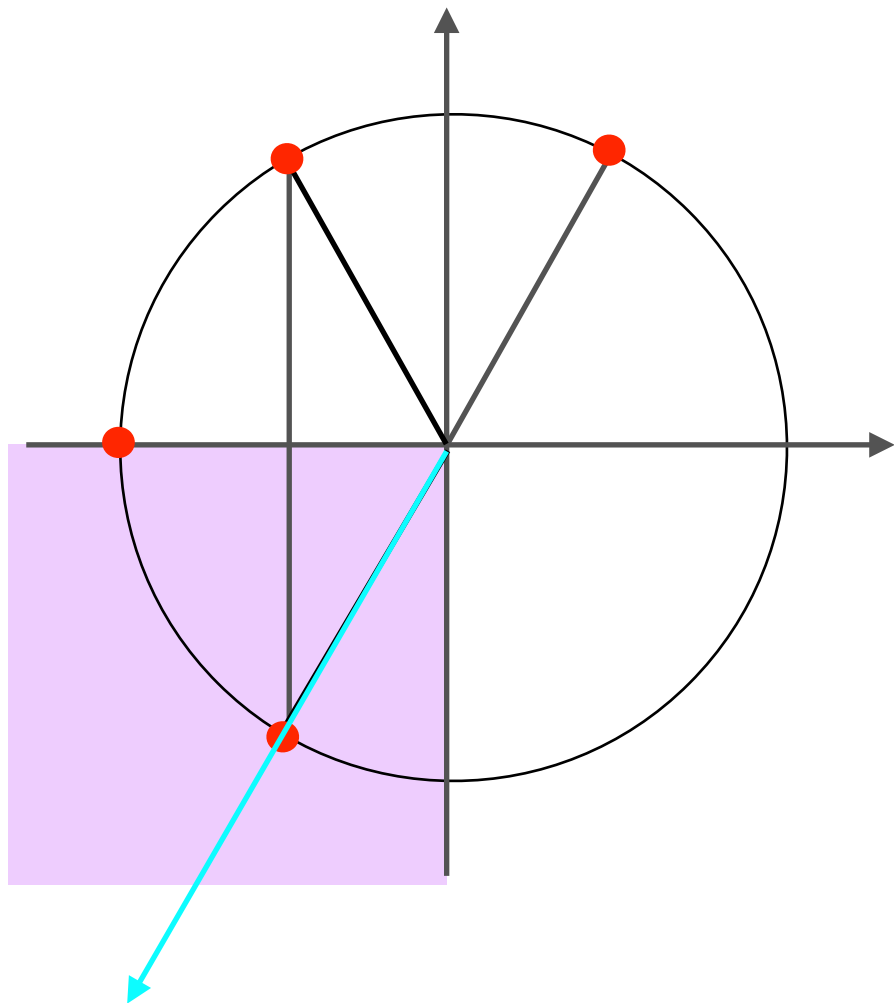
$$\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1}$$

$$\theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$\vec{u} = 2 \angle \frac{4\pi}{3}$$

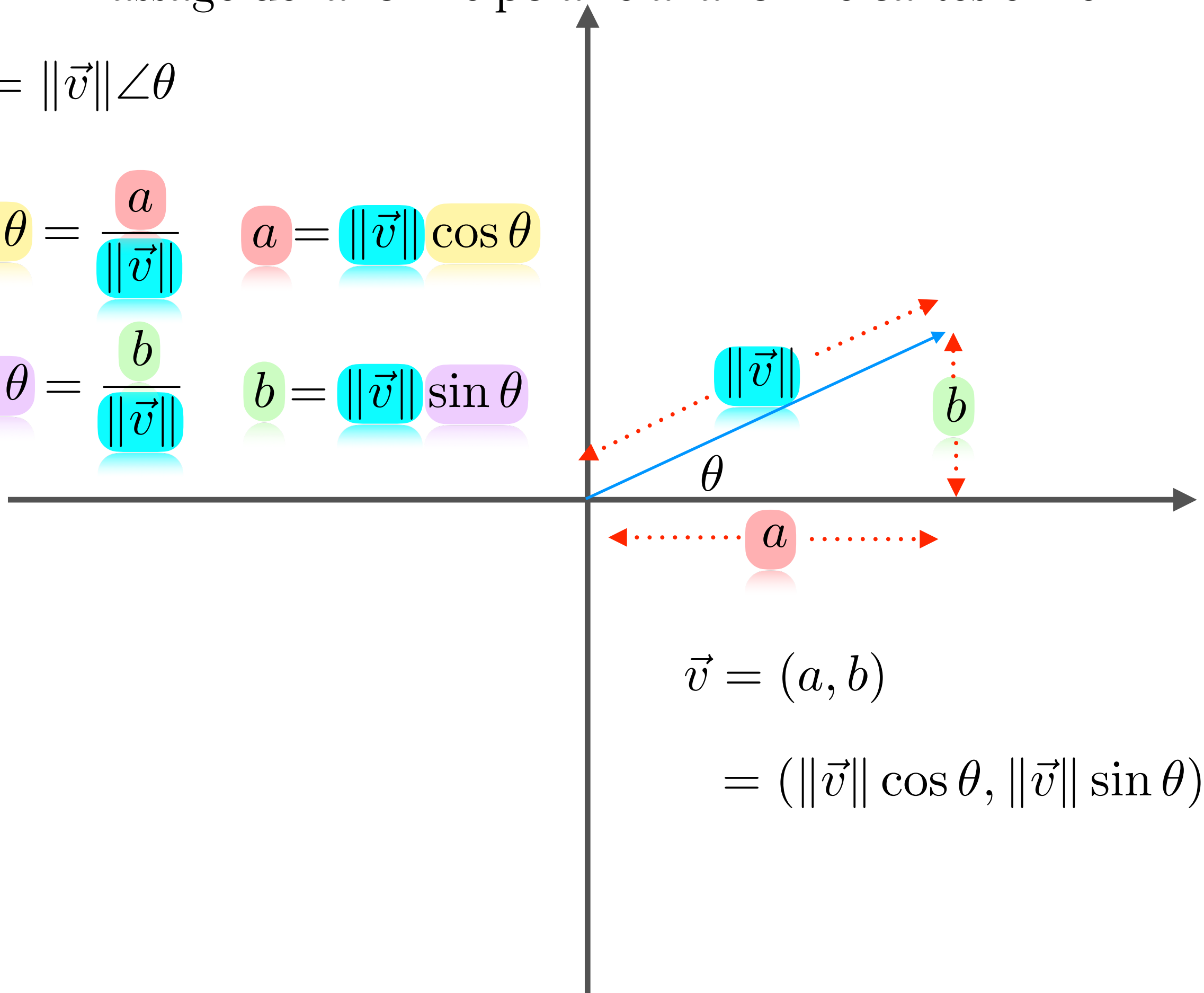


Passage de la forme polaire à la forme cartésienne

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\|\vec{v}\|} \quad a = \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\|\vec{v}\|} \quad b = \|\vec{v}\| \sin \theta$$



$$\vec{v} = (a, b)$$

$$= (\|\vec{v}\| \cos \theta, \|\vec{v}\| \sin \theta)$$

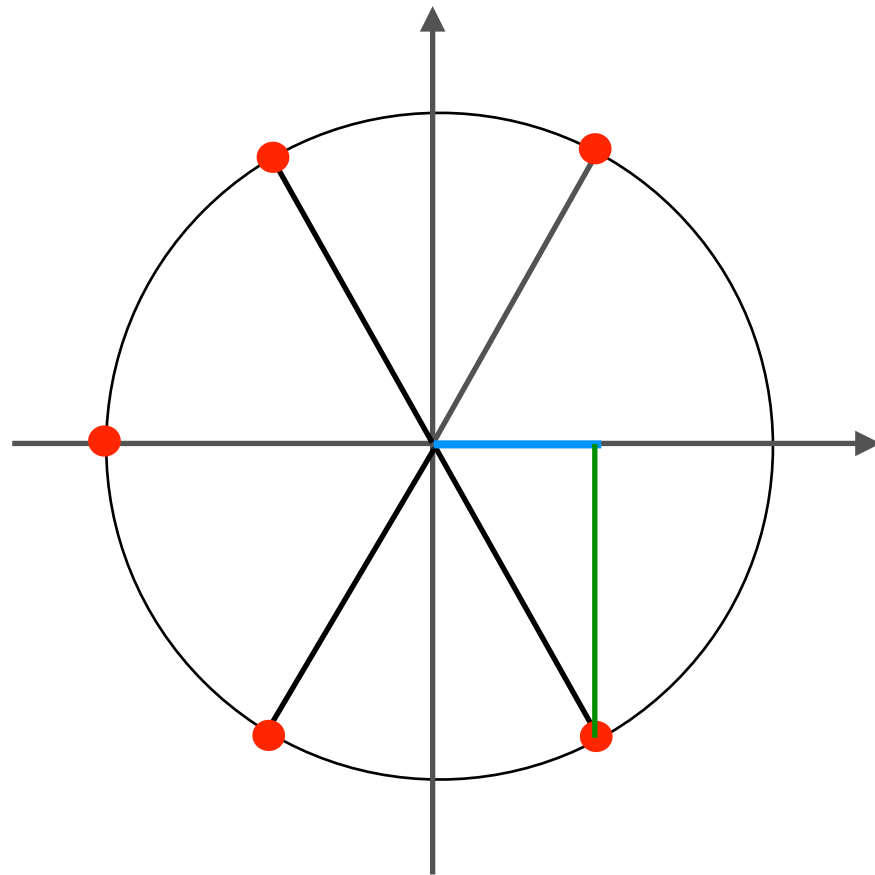
Example

$$\vec{v} = 5 \angle \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{v} = \left(5 \times \frac{1}{2}, 5 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$$



Faites les exercices suivants

62 et 63

Multiplication par un scalaire

$$k\vec{v}$$

Le mot scalaire provient de l'anglais « scale », qu'on peut traduire par échelle. La multiplication d'un vecteur par un scalaire a pour effet de changer l'échelle du vecteur.

$$\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$$

Il est temps de mentionner qu'il existe un vecteur particulier

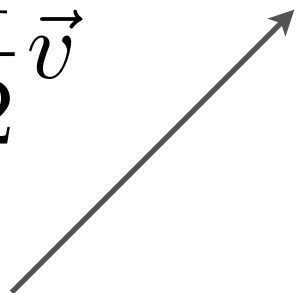
$$\vec{0}$$

qui a la particularité d'avoir une longueur nulle mais il ne possède ni direction ni sens.

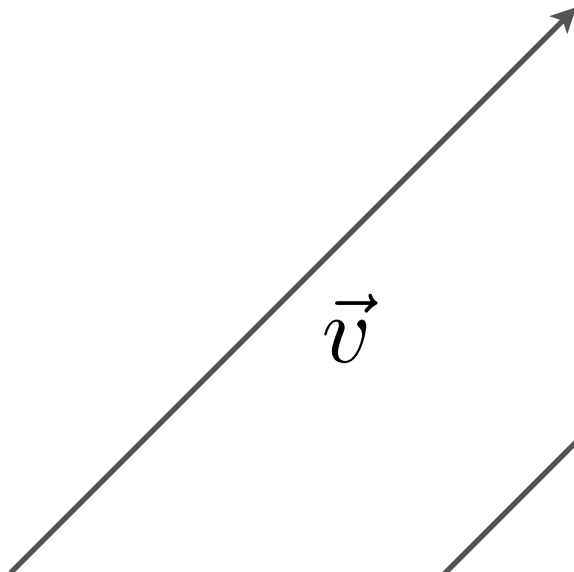
Si le scalaire est négatif, le sens du vecteur est changé.

Example

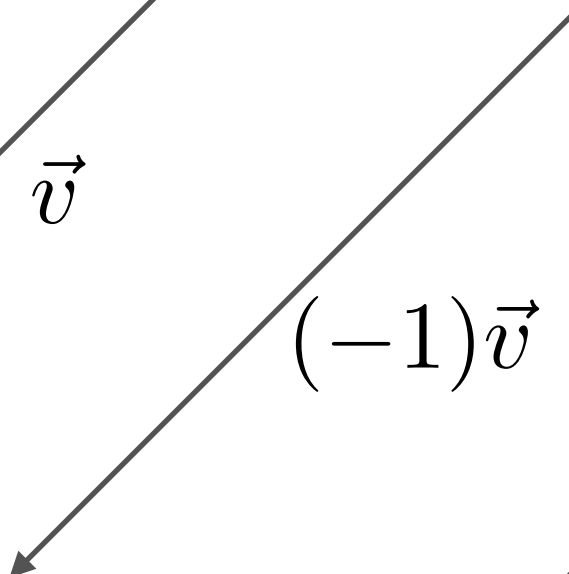
$$\frac{1}{2}\vec{v}$$



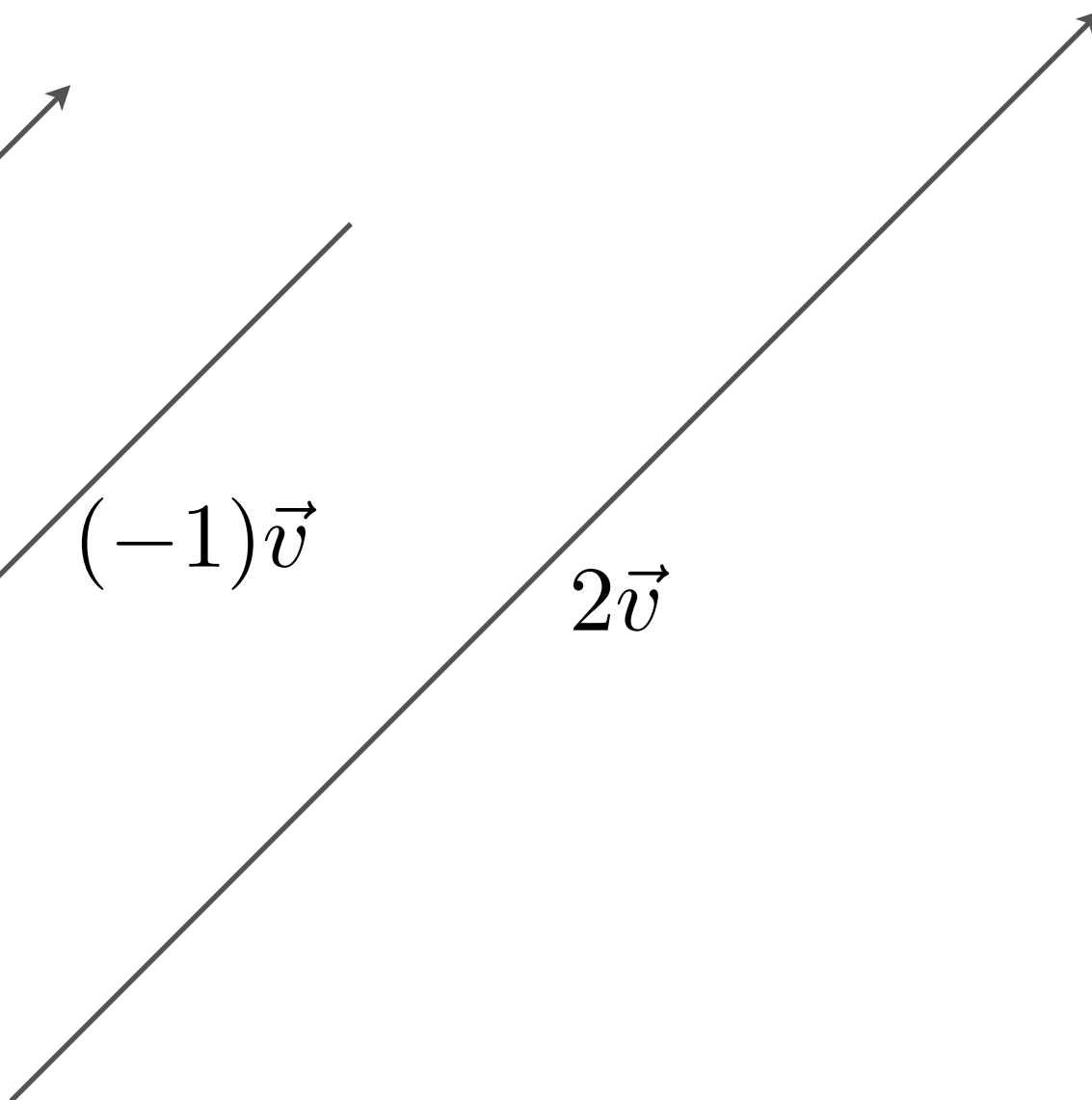
$$\vec{v}$$



$$(-1)\vec{v}$$



$$2\vec{v}$$



En polaire

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta$$

$$k\vec{v} \begin{cases} = \lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \angle \theta & \text{si } k > 0 \\ = \lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \angle (\theta + \pi) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

En cartésien

$$\vec{v} = (a, b) = (\|\vec{v}\| \cos \theta, \|\vec{v}\| \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{si } k > 0 \quad k\vec{v} &= (\lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \cos \theta, \lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \sin \theta) \\ &= (k \lvert \vec{v} \rvert \cos \theta, k \lvert \vec{v} \rvert \sin \theta) = (ka, kb) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } k < 0 \quad k\vec{v} &= (\lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \cos(\theta + \pi), \lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \sin(\theta + \pi)) \\ &= (-\lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \cos \theta, -\lvert k \rvert \lvert \vec{v} \rvert \sin \theta) \\ &= (k \lvert \vec{v} \rvert \cos \theta, k \lvert \vec{v} \rvert \sin \theta) = (ka, kb) \end{aligned}$$

Example

$$3\vec{v} = 3 \left(5 \angle \frac{5\pi}{3} \right) = 15 \angle \frac{5\pi}{3}$$

Example

$$\begin{aligned} -2\vec{v} &= -2 \left(2 \angle \frac{7\pi}{6} \right) = 4 \angle \left(\frac{7\pi}{6} + \pi \right) \\ &= 4 \angle \frac{13\pi}{6} = 4 \angle \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Example

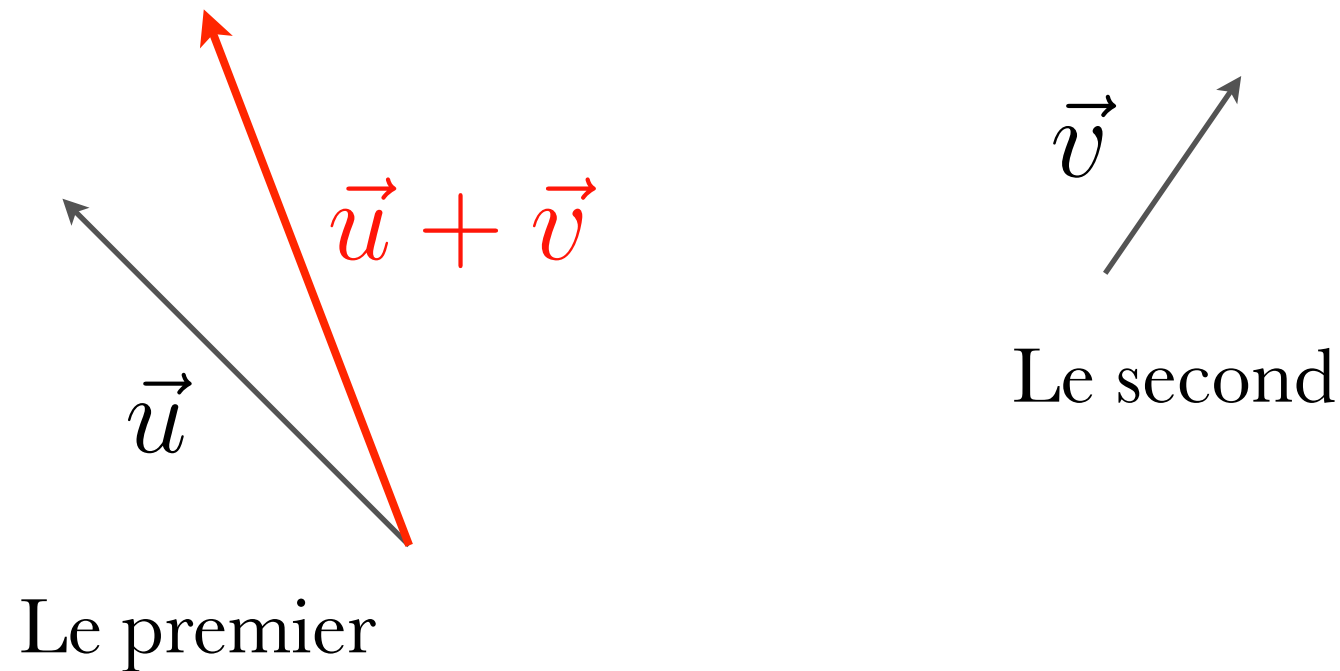
$$5\vec{v} = 5(1, -2) = (5, -10)$$

Example

$$\frac{-1}{3}\vec{v} = \frac{-1}{3}(-9, 12) = (3, -4)$$

Somme de deux vecteurs

1. On prend deux vecteurs.
2. On fait coïncider la fin du premier avec le début du second.
3. La somme est le vecteur qui a le même point de départ que le premier et le même point d'arrivée que le second.



Exemple

Quels sont la longueur et l'angle du vecteur somme de ces deux vecteurs?

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

loi des cosinus

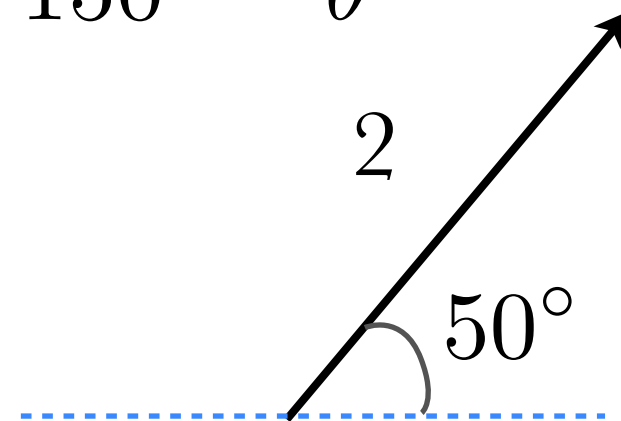
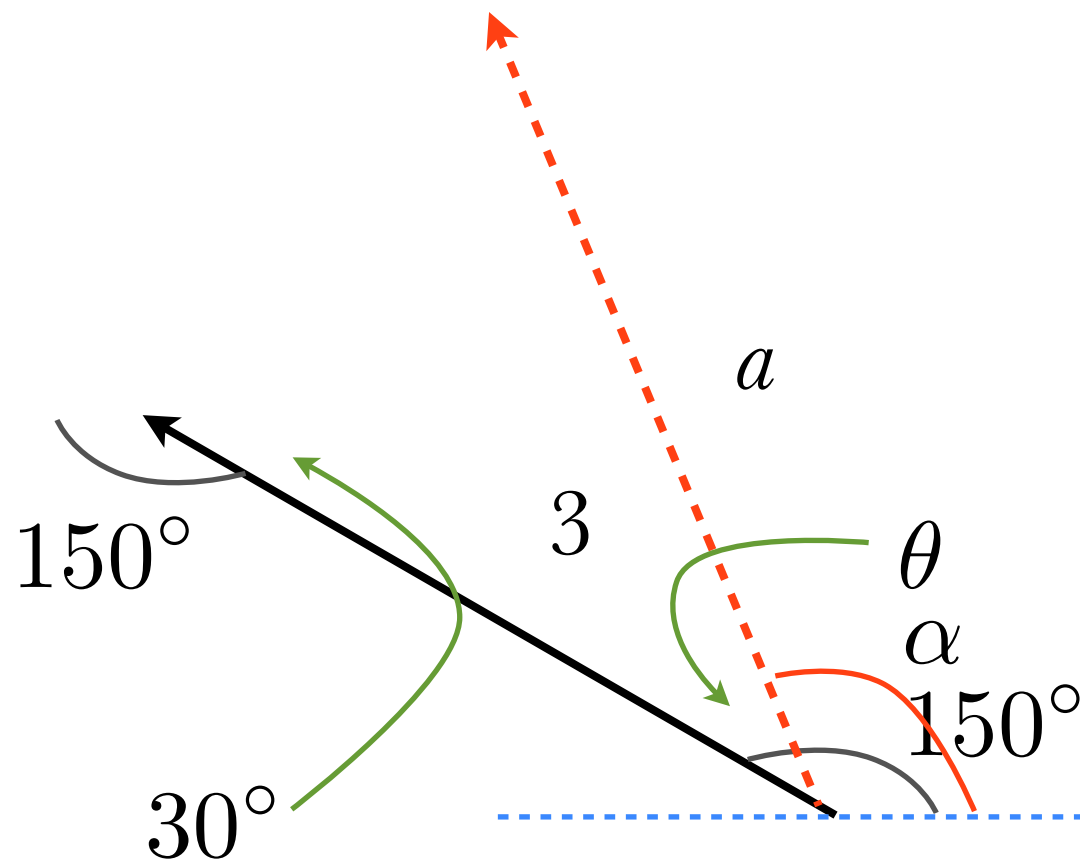
$$a = \sqrt{4 + 9 - 12 \cos(80^\circ)}$$

$$\frac{\sin \theta}{2} = \frac{\sin(80^\circ)}{a}$$

loi des sinus

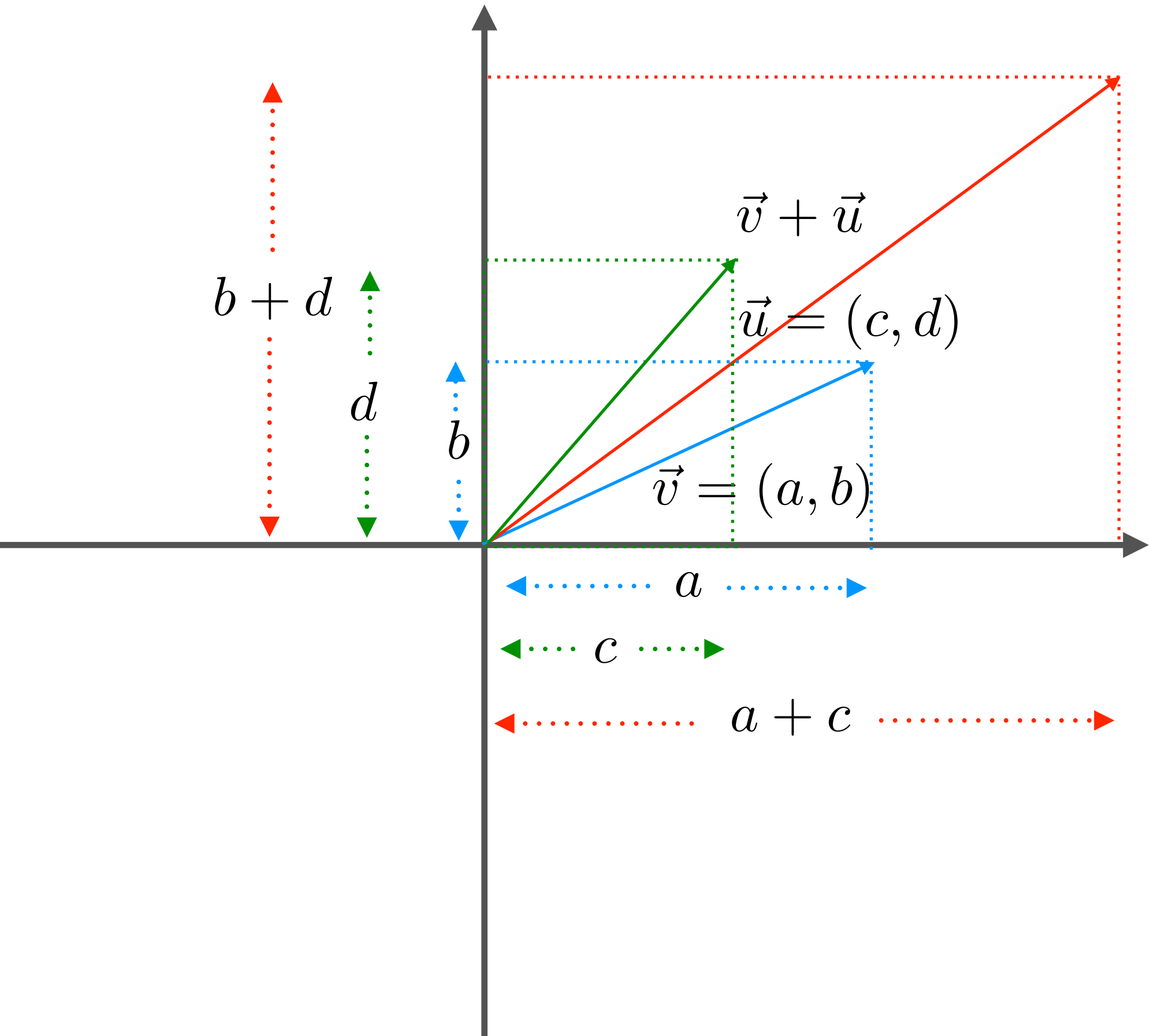
$$\theta = \arcsin \left(\frac{2 \sin(80^\circ)}{a} \right)$$

$$\alpha = 150^\circ - \theta$$



angle alterne-interne

$\vec{v} + \vec{u} = (a + c, b + d)$

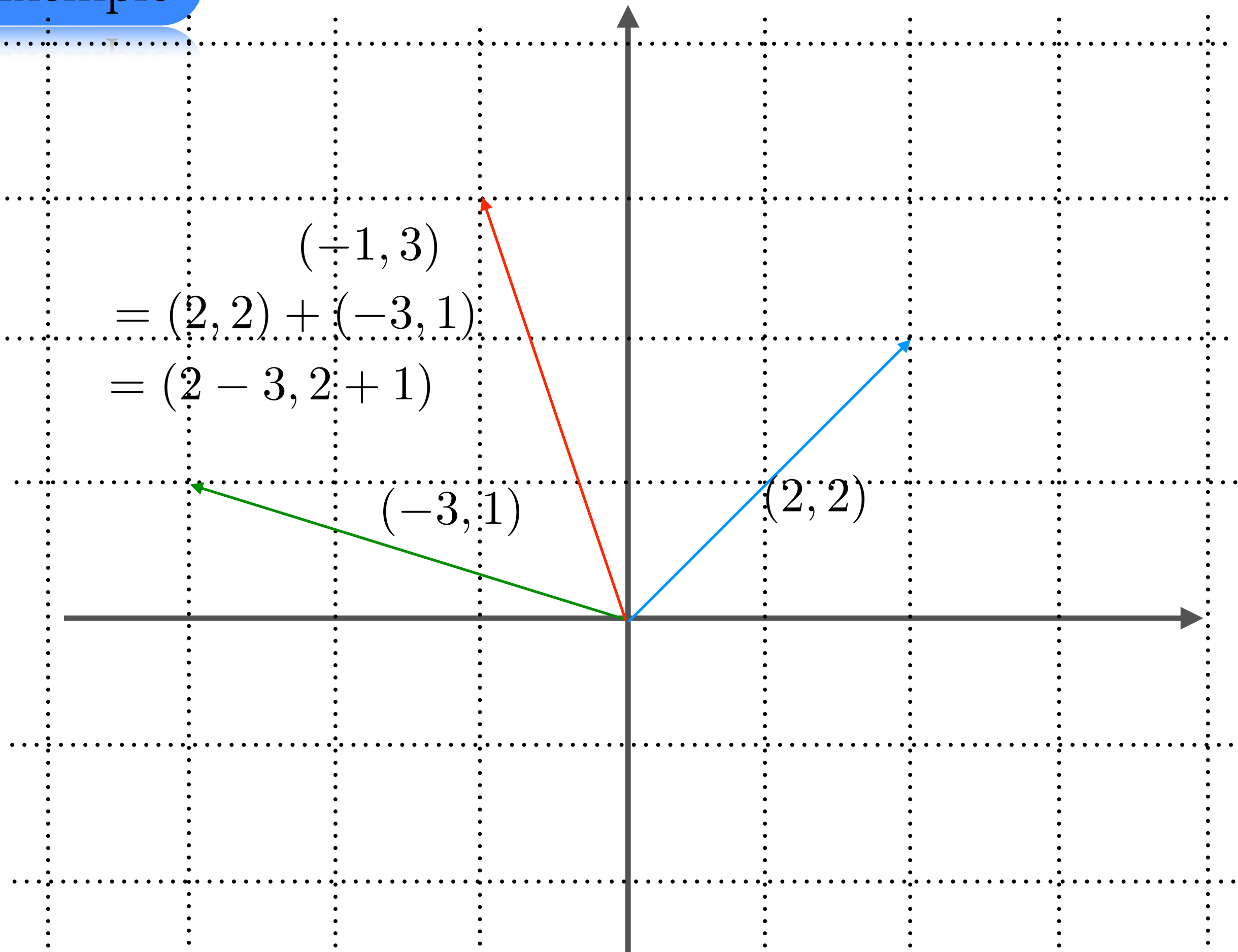


Example

$$\begin{aligned} & (-1, 3) \\ &= (2, 2) + (-3, 1) \\ &= (2 - 3, 2 + 1) \end{aligned}$$

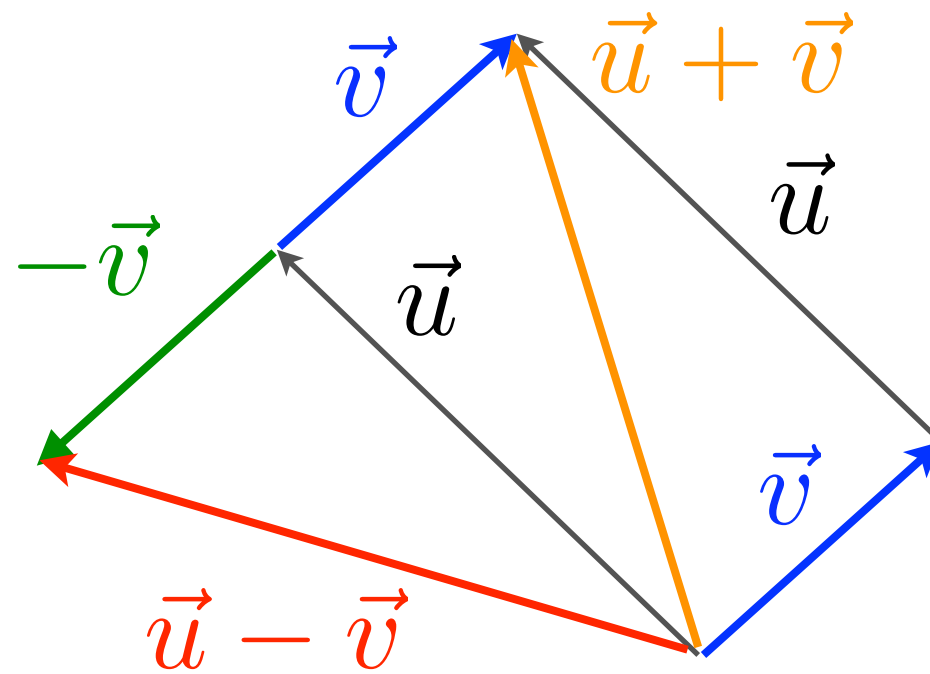
$(-3, 1)$

$(2, 2)$



Soustraction de vecteurs

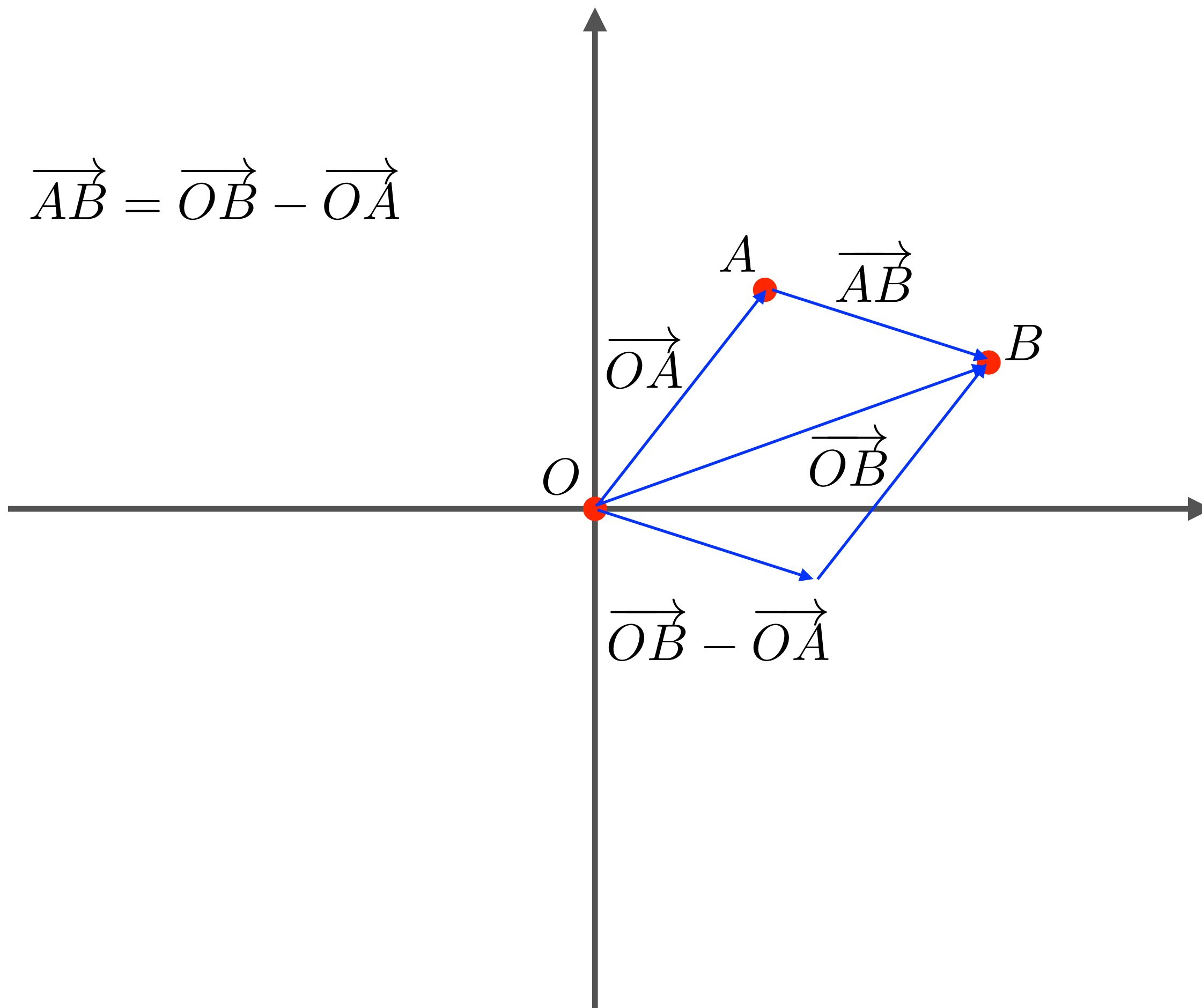
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Faites les exercices suivants

64 et 65

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



Exemple

Trouver le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour les points

$$A(2, -1) \quad \text{et} \quad B(0, -3)$$

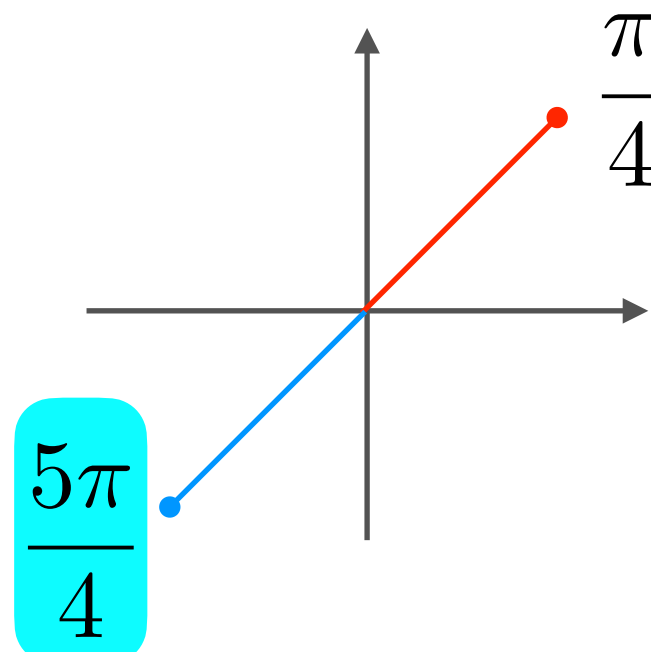
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, -3) - (2, -1) = (0 - 2, -3 + 1) \\ &= (-2, -2)\end{aligned}$$

Sous la forme polaire on a

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\tan \theta = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{8} \angle \frac{5\pi}{4}$$



Faites les exercices suivants

66

Devoir:

60 à 66