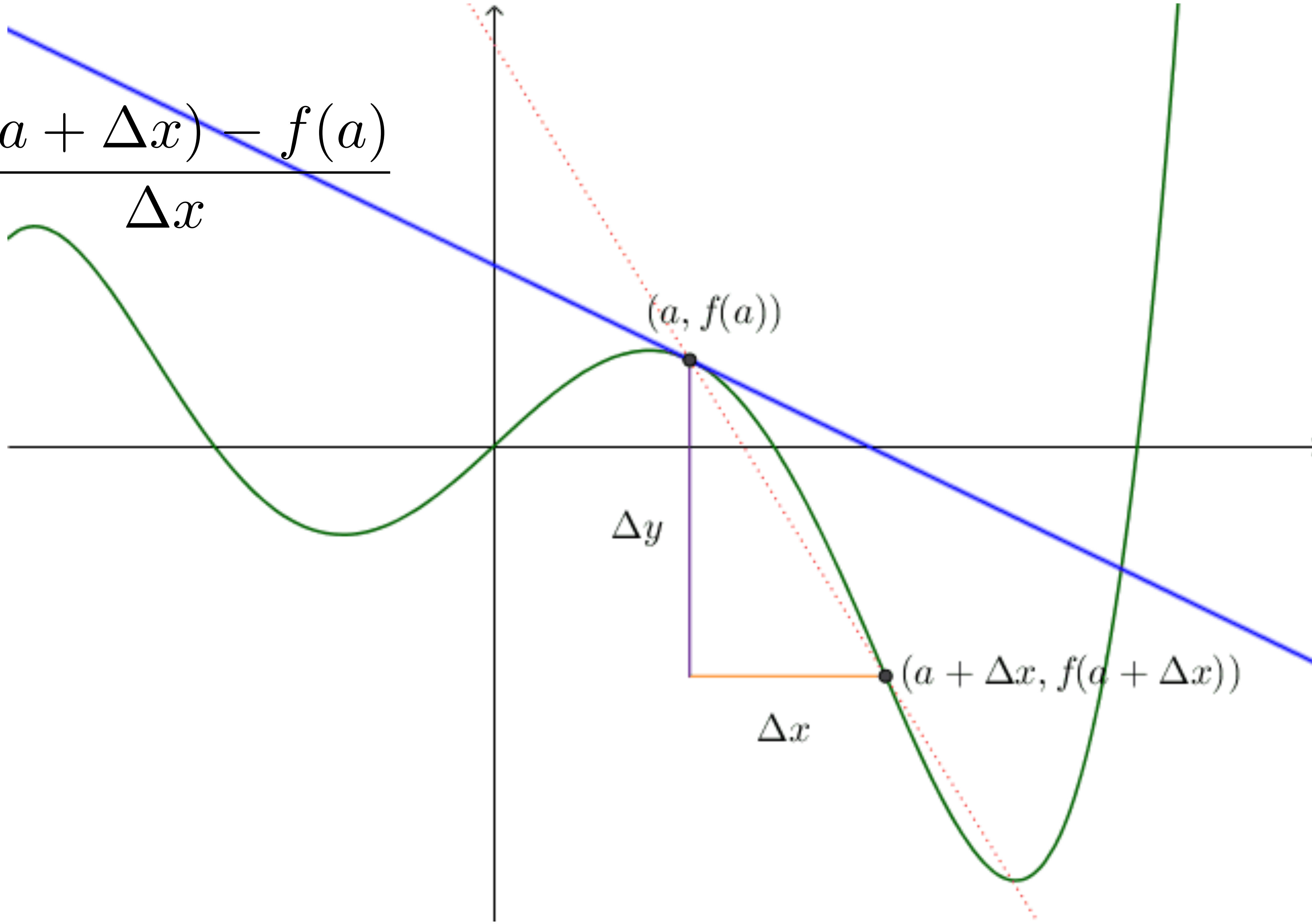
1.1 INTRODUCTION ET RÉVISION

cours 1

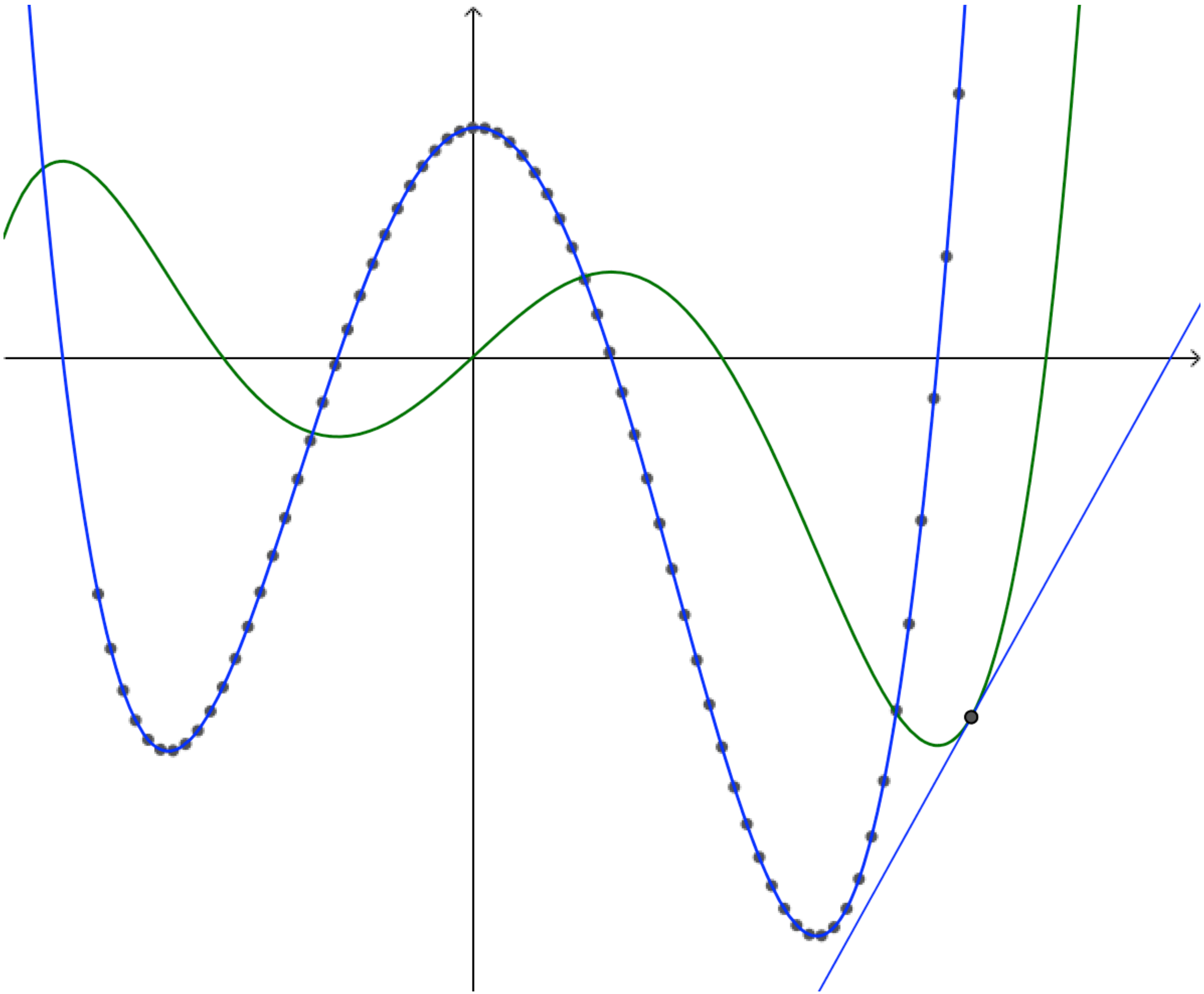
Aujourd'hui, nous allons voir

- Survol des cours calcul différentiel, calcul intégral et algèbre linéaire.
- Introduction des idées que nous verrons cette session.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$ = pente de



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Les règles de dérivations

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\frac{dg(x)}{dx} \quad = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$	
$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \sec^2 x$ $\quad$ $(\cot x)' = -\csc^2 x$ $(\sec x)' = \sec x \tan x$ $\quad$ $(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)'$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\text{arccot } x)'$ $(\text{arcsec } x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -(\text{arccsc } x)'$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Exemple $f(x) = \dfrac{3^x \sin(x^2)}{\ln x}$

$$f'(x) = \frac{(3^x \sin(x^2))' \ln x - (3^x \sin(x^2)) \ln x'}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{(3^{x\prime} \sin(x^2) + 3^x \sin(x^2)') \ln x - (3^x \sin(x^2)) \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{(3^x \ln 3 \sin(x^2) + 3^x \cos(x^2)(x^2)') \ln x - (3^x \sin(x^2)) \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{(3^x \ln 3 \sin(x^2) + 3^x \cos(x^2) 2x) \ln x - (3^x \sin(x^2)) \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

Faites les exercices suivants

Calculer le dérivée des fonctions suivantes:

1) $$f(x) = 4\tan^3(xe^x)$$

2) $$f(x) = \frac{\log_5(\sqrt{4x^7 - 3})}{\sin x}$$

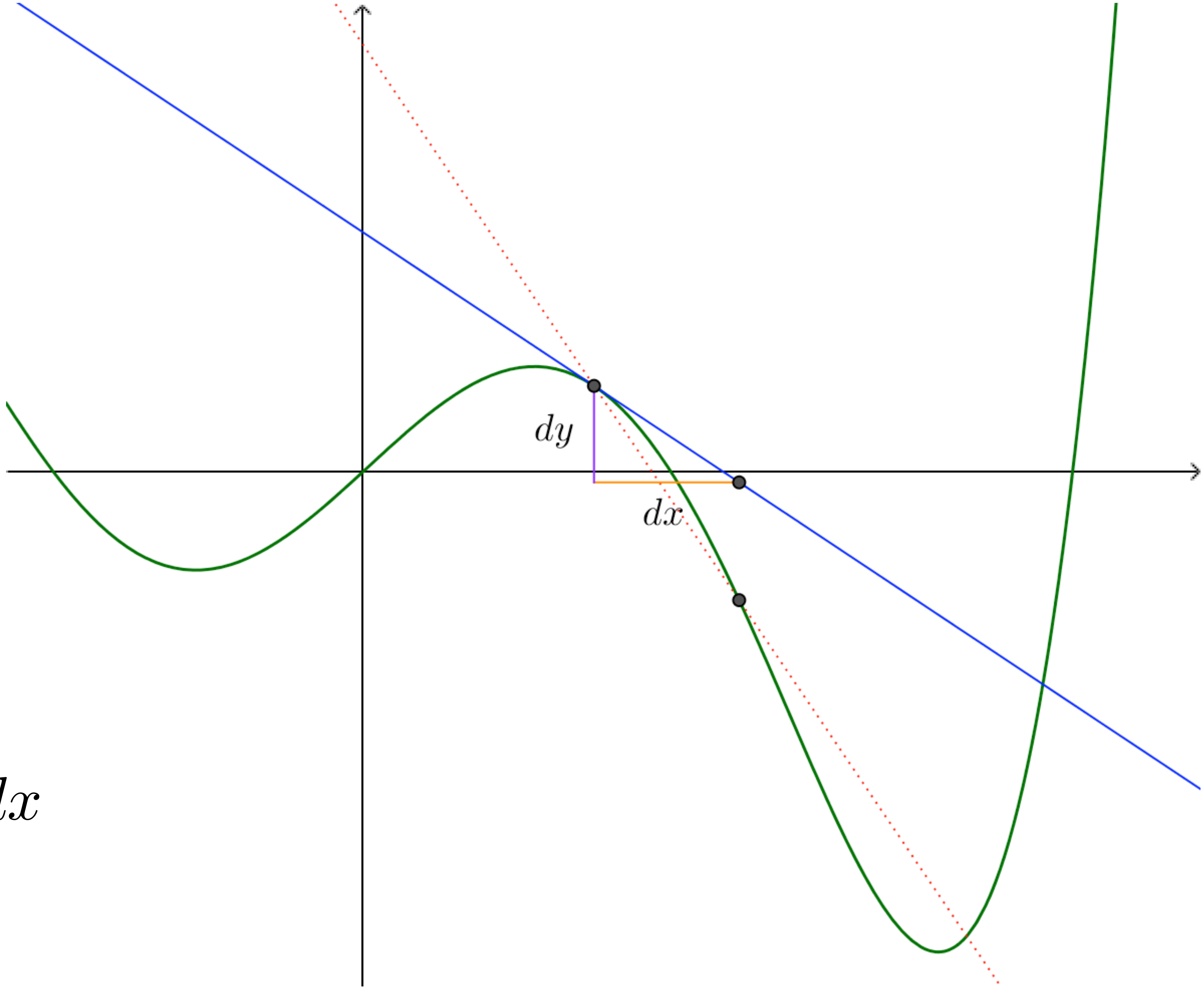
3) $$f(x) = 4^x \sqrt[5]{x^3} \sin x + \frac{\csc^3 x}{\log_6 \pi^2}$$

4) $$f(x) = \cot\left(\frac{4^{\cos(x^2+1)}}{\ln(\log_3(x))}\right)$$

différentielle

Lorsque $\Delta x \approx 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$



$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) dx$$

Le facteur multiplicatif qui permet de changer la longueur dx en la longueur dy.

Intégrale indéfinie

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{où} \qquad F'(x) = f(x)$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Propriétés

$$\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$$

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Techniques d'intégration.

Changement de variable

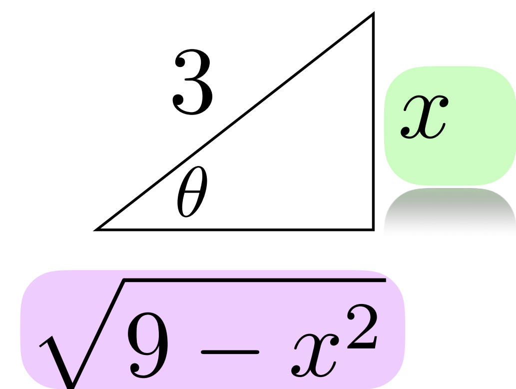
Exemple $$\int x\sin(x^2)\,dx = \int x\sin(u)\frac{du}{2x}$$

$$u = x^2$$
$$du = 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

Exemple $$\int \frac{1}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$x = 3\sin\theta$$
$$dx = 3\cos\theta\, d\theta$$



$$= \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3^3\cos^3\theta} = \frac{1}{9}\int \sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$$

$$= \frac{1}{9}\tan\theta + C = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}\tan\theta + C$$

$$\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3 = 3^3\cos^3\theta$$

Technique d'intégration

Par partie $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Exemple $$\int x \cos x \; dx$$

$$u = x \qquad dv = \cos x \; dx$$

$$du = dx \qquad v = \sin x$$

$$= x \sin x - \int \sin x \; dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

Fractions partielles

Exemple $$\int \frac{3x+1}{(x-2)(2x+3)}dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2x+3}dx$$

$$= \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$

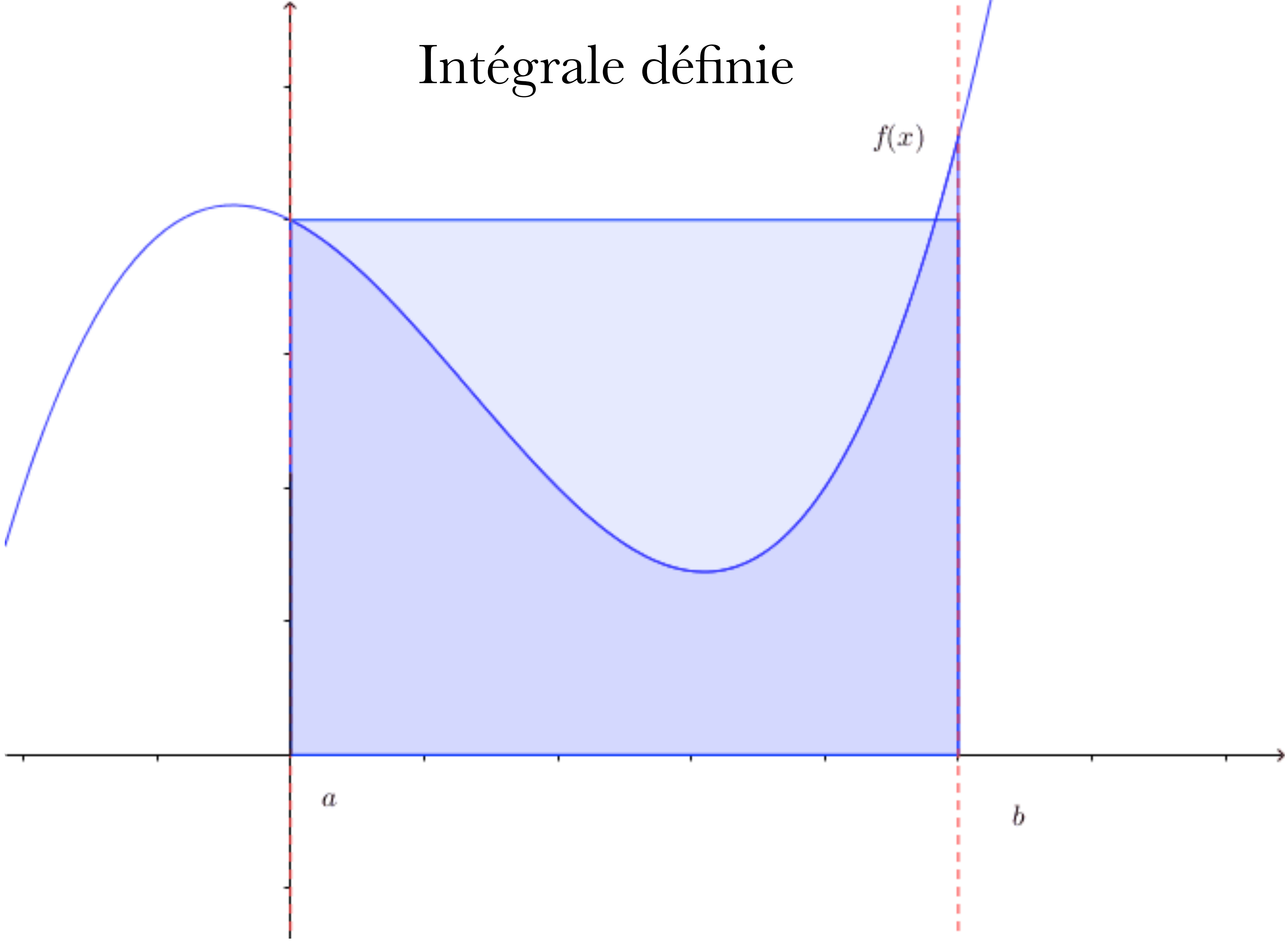
$$\frac{3x+1}{(x-2)(2x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+3} = \frac{A(2x+3)+B(x-2)}{(x-2)(2x-3)}$$

$$= \frac{(2A+B)x + (3A-2B)}{(x-2)(2x-3)}$$

$$\begin{cases} 2A + B & = 3 \\ 3A - 2B & = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-7} = 1 \qquad B = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Intégrale définie



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i$$

Théorème fondamental du calcul.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Faites les exercices suivants

Calculer les intégrales suivantes:

1) $$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\ dx$$

2) $$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ dx$$

3) $$\int x^2 e^{4x}\ dx$$

4) $$\int \cos(\ln x)\ dx$$

5) $$\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x}\ dx$$

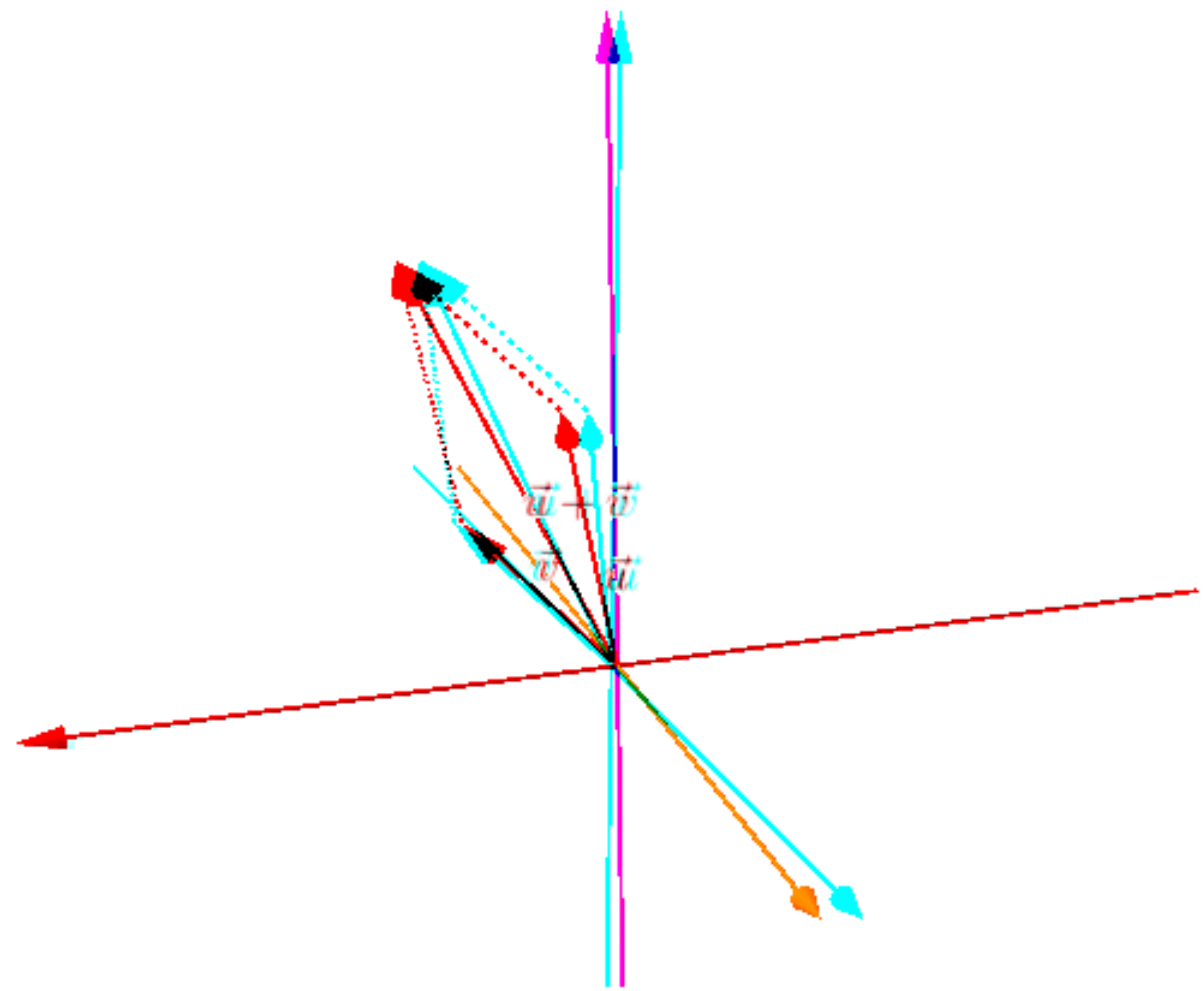
6) $$\int e^{e^{e^{e^x}}} e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x\ dx$$

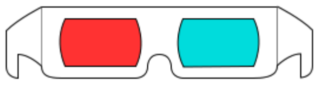
$$\vec{u} = (a, b, c) \qquad \vec{v} = (d, e, f)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$k\vec{u} = (ka, kb, kc)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + d, b + e, d + f)$$

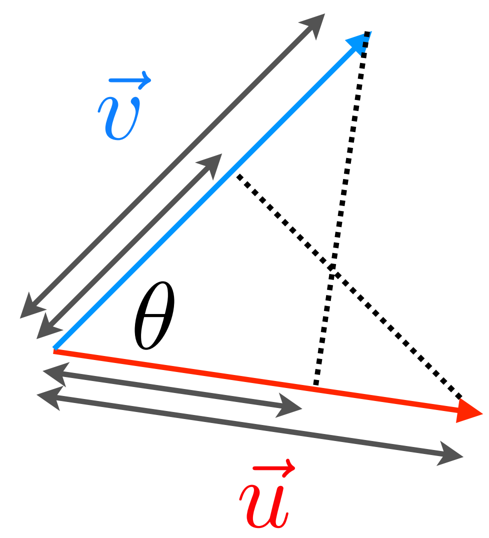




Produit scalaire

$$\vec{u} = (a, b, c) \qquad\qquad \vec{v} = (d, e, f)$$

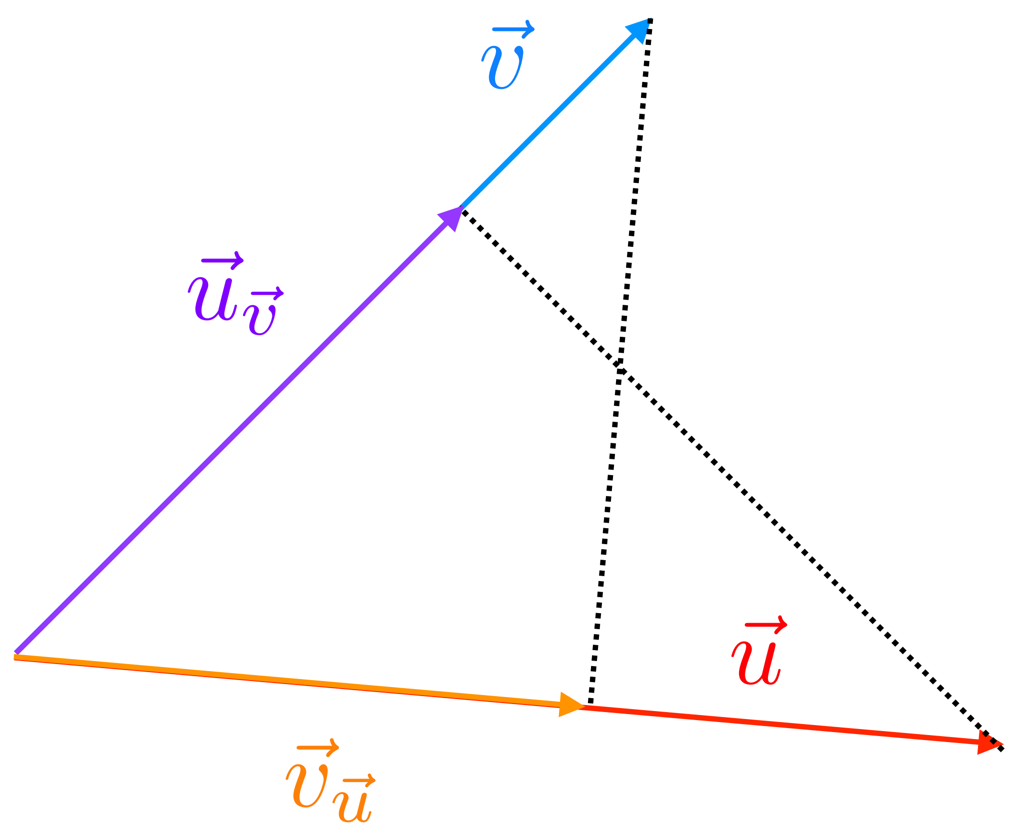
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + df \quad = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$



$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Projection orthogonale

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \qquad\qquad \vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$



Produit vectoriel

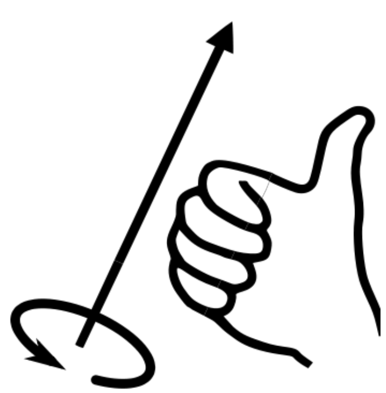
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u} \qquad\qquad \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$$

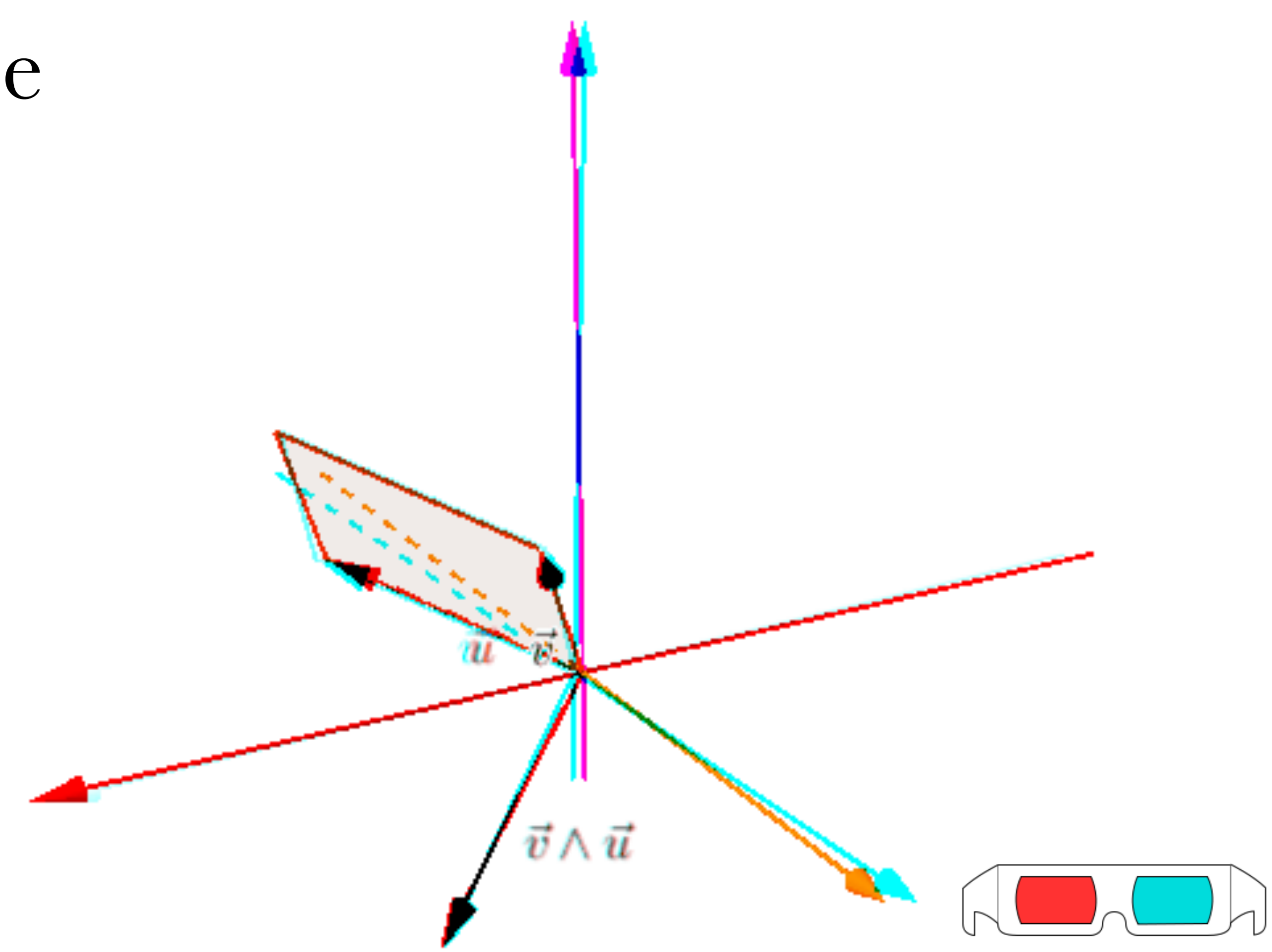
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$$

$$= \text{aire du parallélogramme}$$

Sens donné par la règle de la main droite



$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$



Remarque: J'utilise le symbole $\wedge$ pour le produit vectoriel.

Or il serait mieux d'utiliser la notation $\vec{u} \times \vec{v}$

pour le produit vectoriel (cross product).

En fait le produit extérieur (qui n'est pas le produit vectoriel) noté

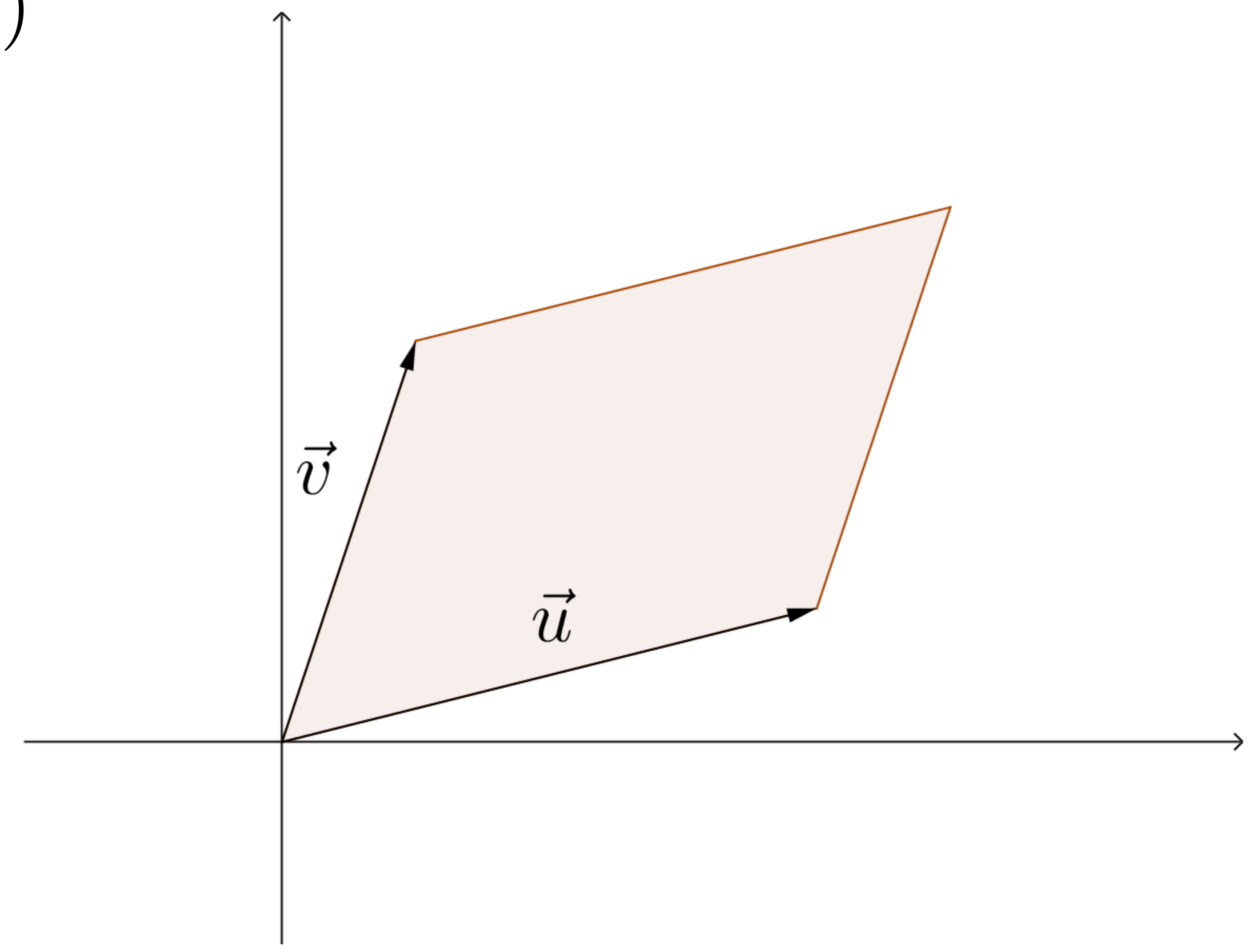
$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

est un bi-vecteur ayant

1. une grandeur (l'aire du parallélogramme) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$
2. un sens (l'orientation de l'aire du parallélogramme)
3. une direction (le plan définit par les deux vecteurs)

déterminant

$\vec{u} = (a, b) \qquad \vec{v} = (c, d)$



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

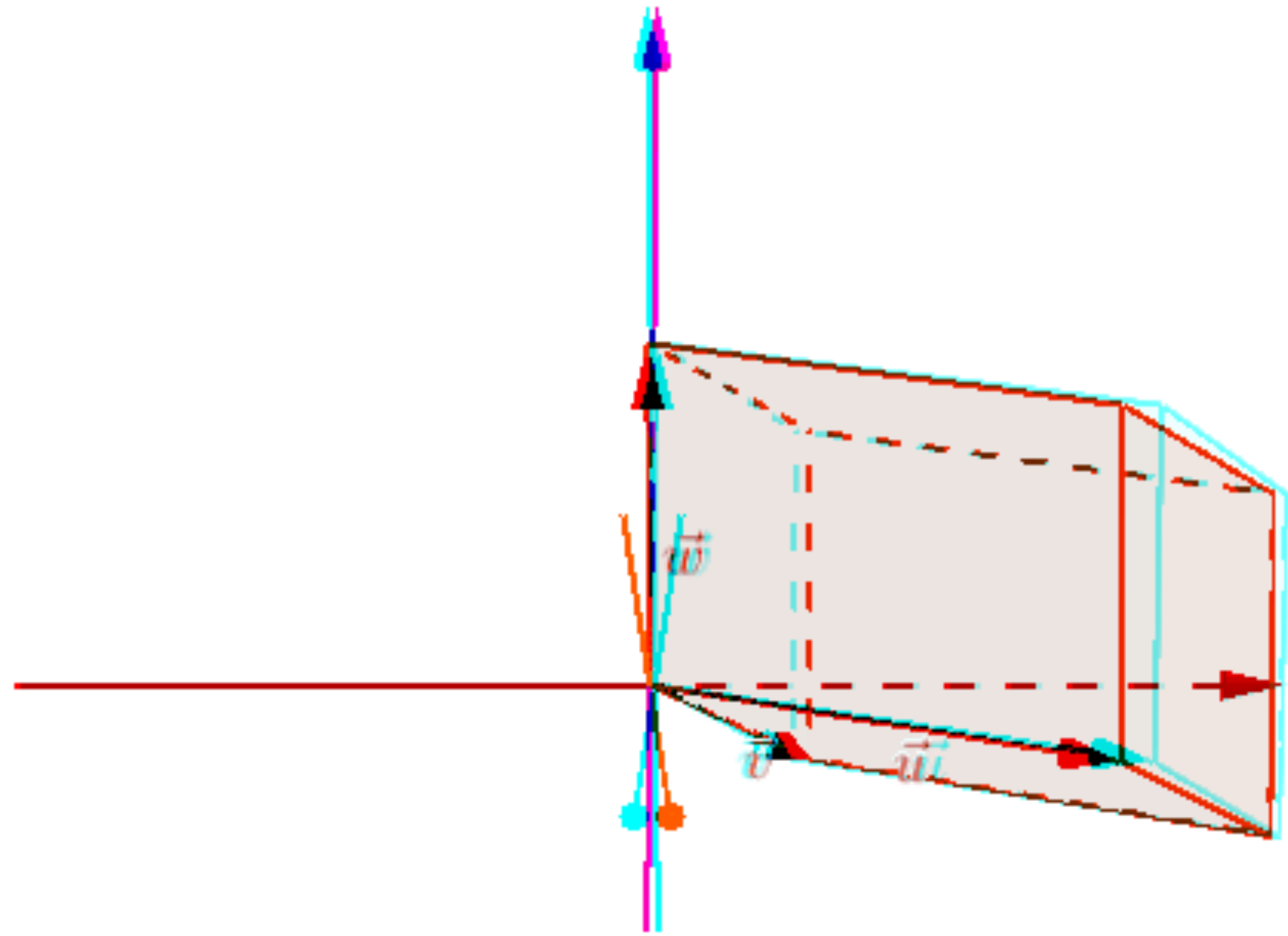
= Aire du parallélogramme

déterminant

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$



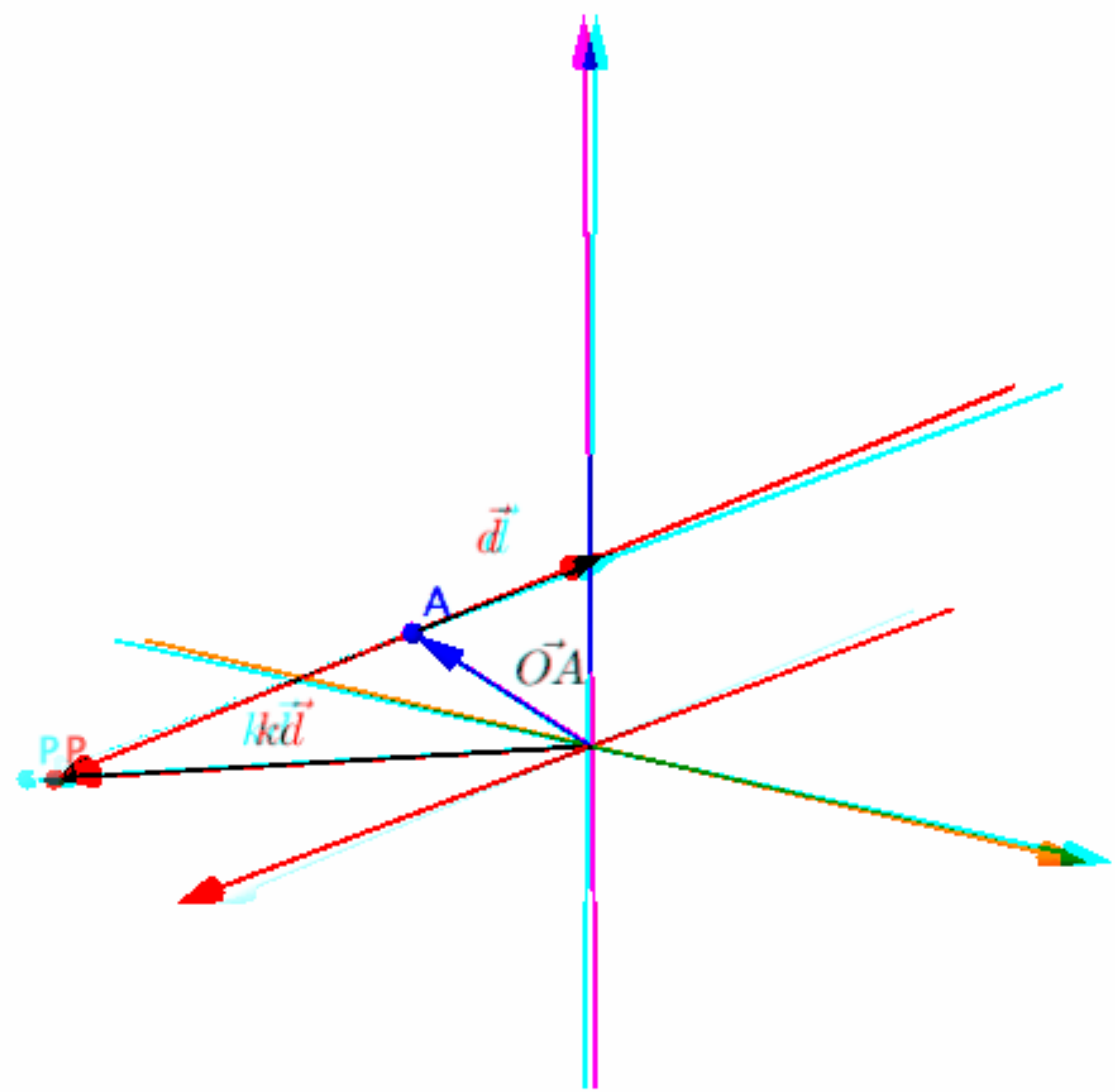
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

= Volume du parallélépipède

Équation vectorielle d'une droite

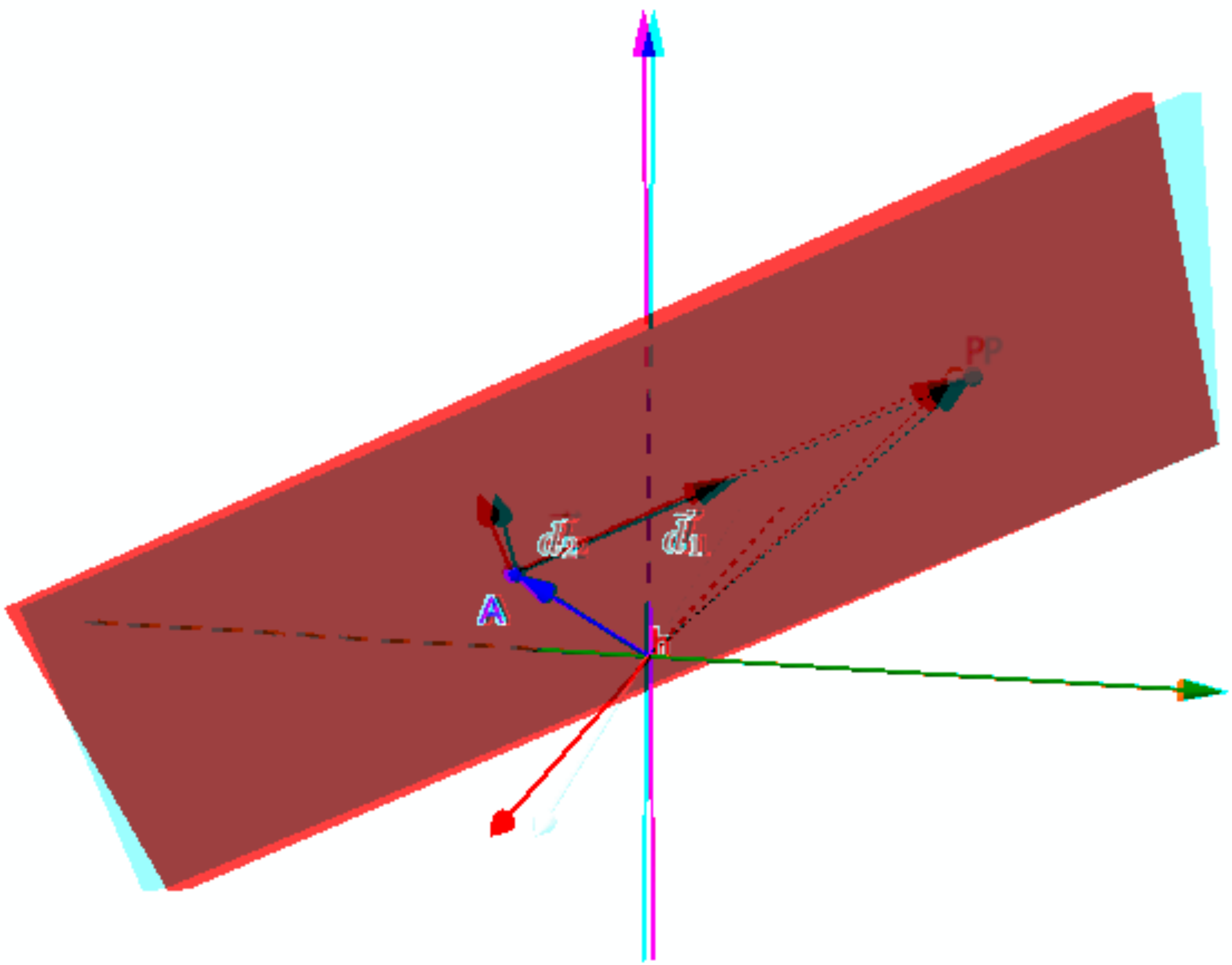
$$\vec{OP} = \vec{OA} + k\vec{d}$$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(d_1, d_2, d_3)$$



Équation vectorielle d'un plan.

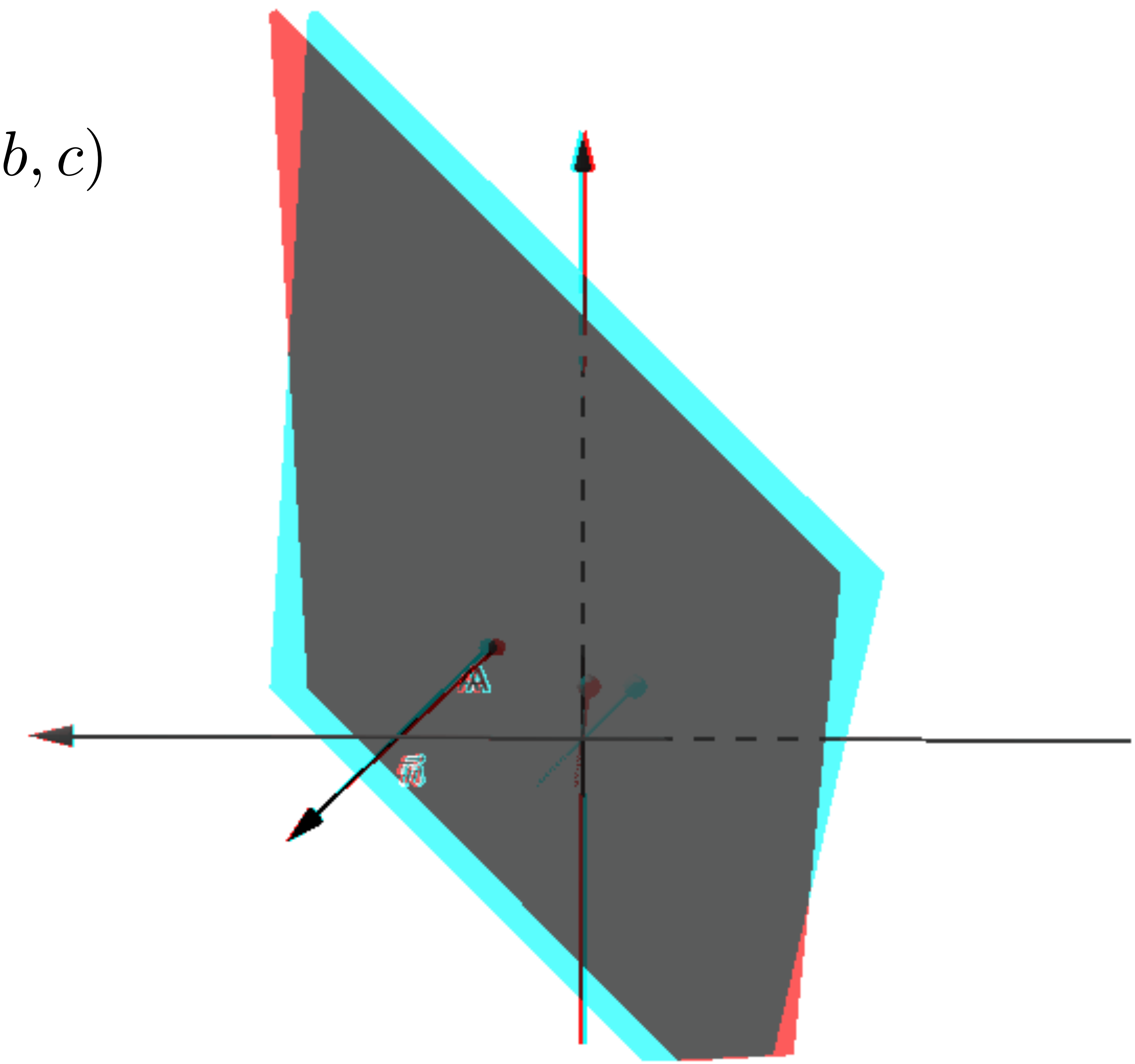
$$\vec{OP} = \vec{OA} + k\vec{d_1} + t\vec{d_2}$$



Équation normale du plan.

$$ax + by + cz = d$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$



En calcul différentiel et intégral, on a beaucoup étudié les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

En algèbre linéaire on a commencé à explorer des fonctions qui ont des ensembles de départ et d'arrivé autre que $\mathbb{R}$.

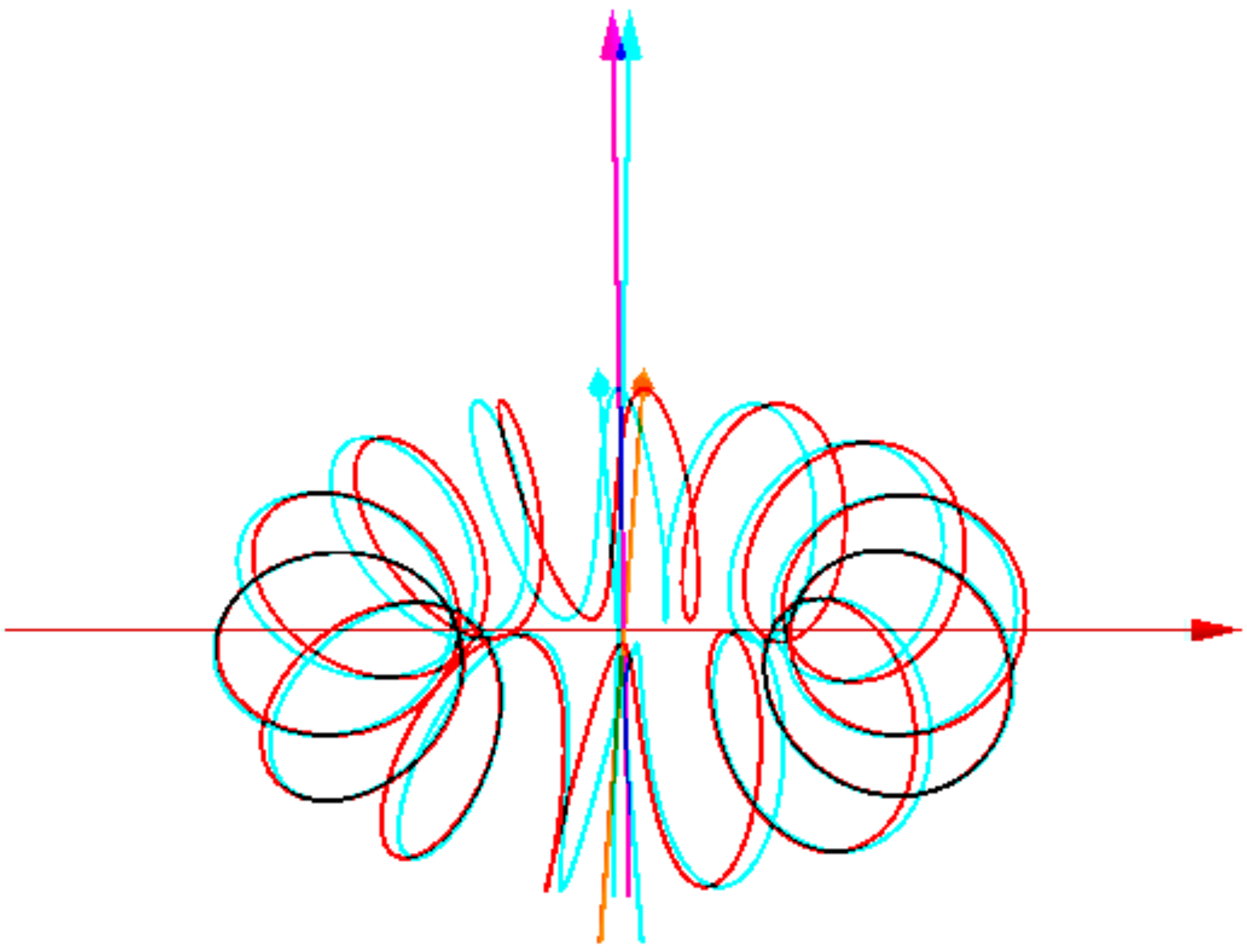
(transformation linéaire) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Ce cours-ci est la continuité de cette exploration.

Cette session, nous allons regarder trois types de fonction

1) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

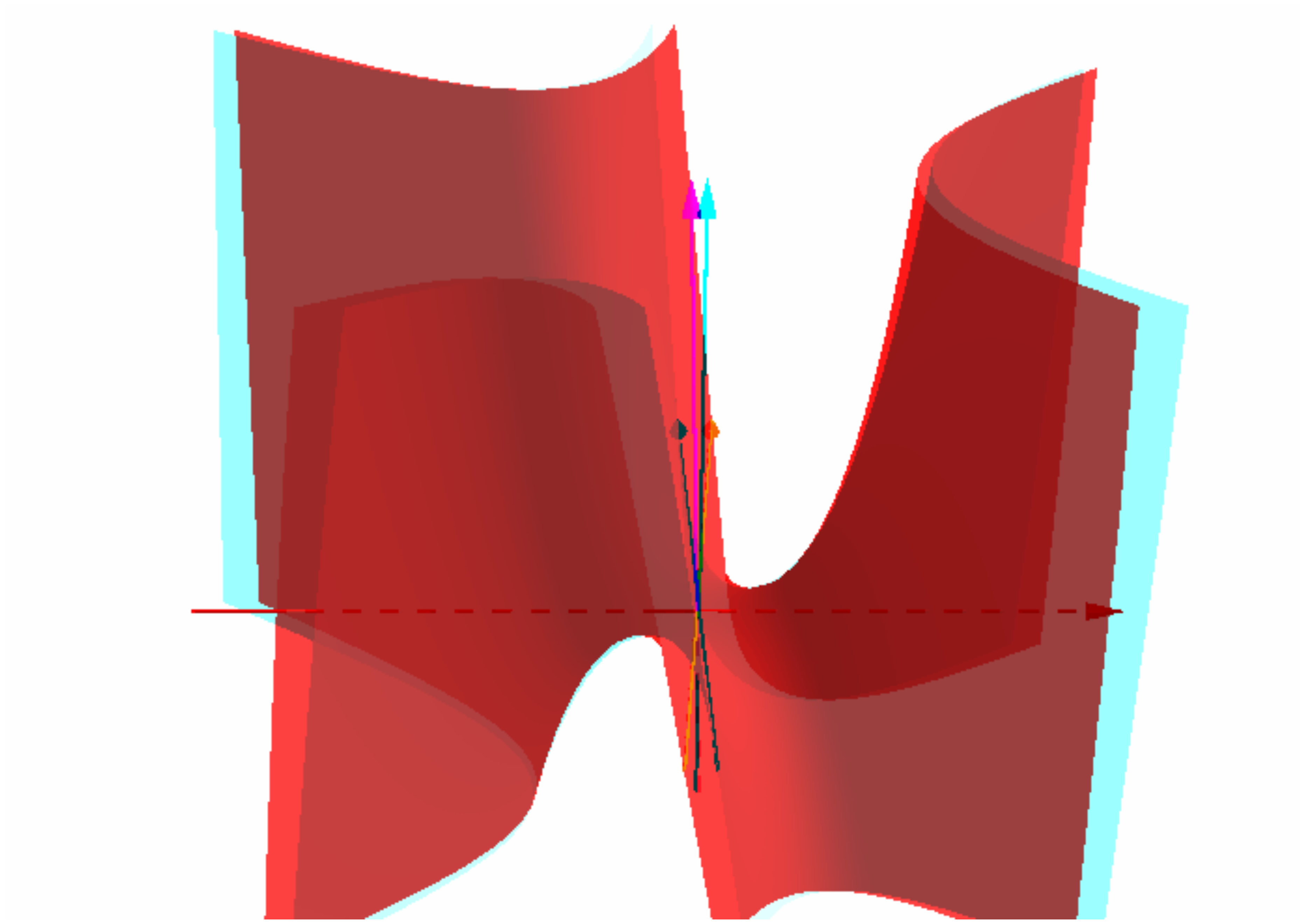
Plus particulièrement $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ les courbes dans l'espace

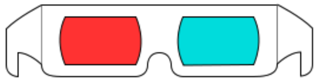


Cette session, nous allons regarder trois types de fonction

2) $$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Plus particulièrement $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions à deux variables.



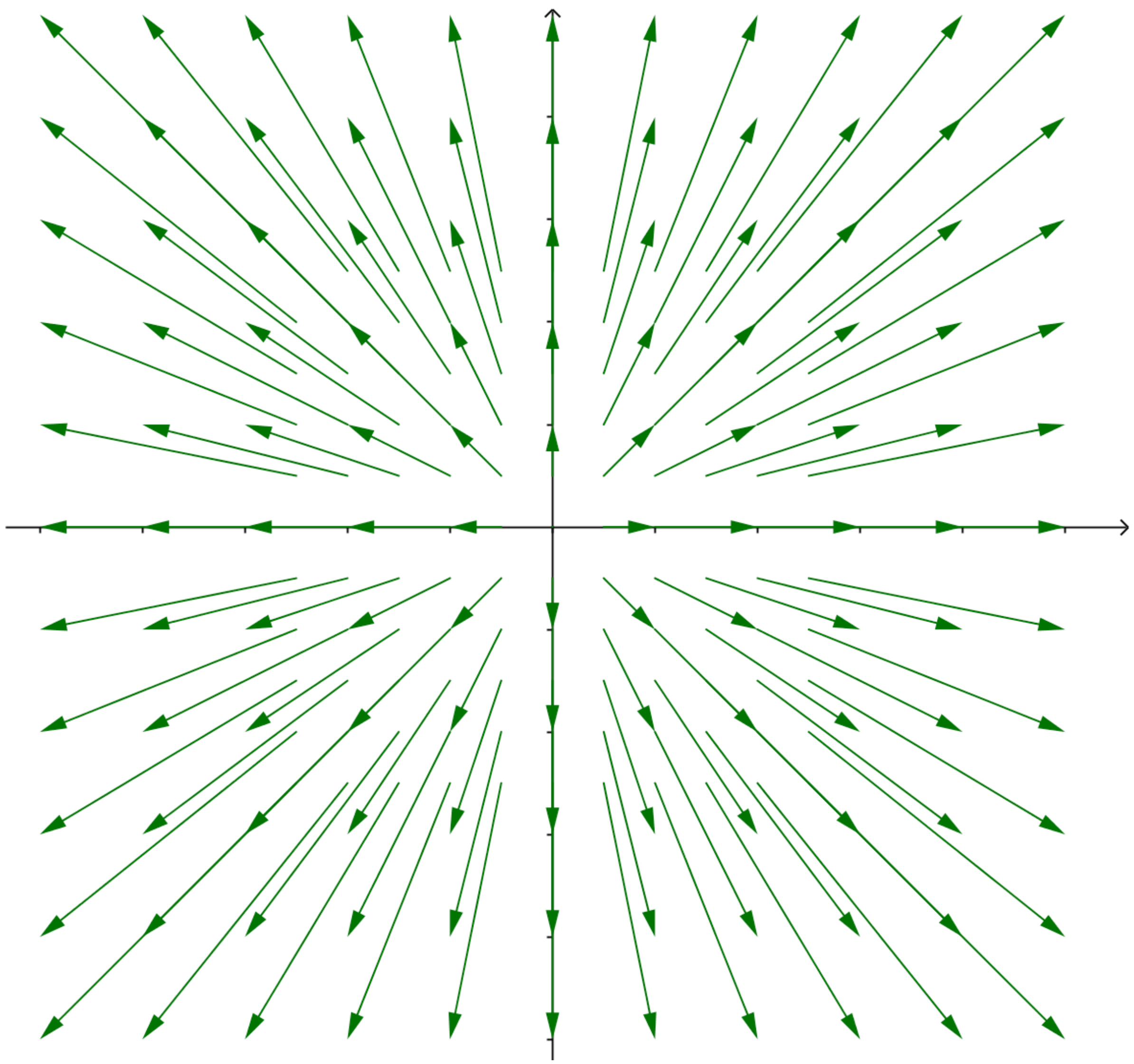


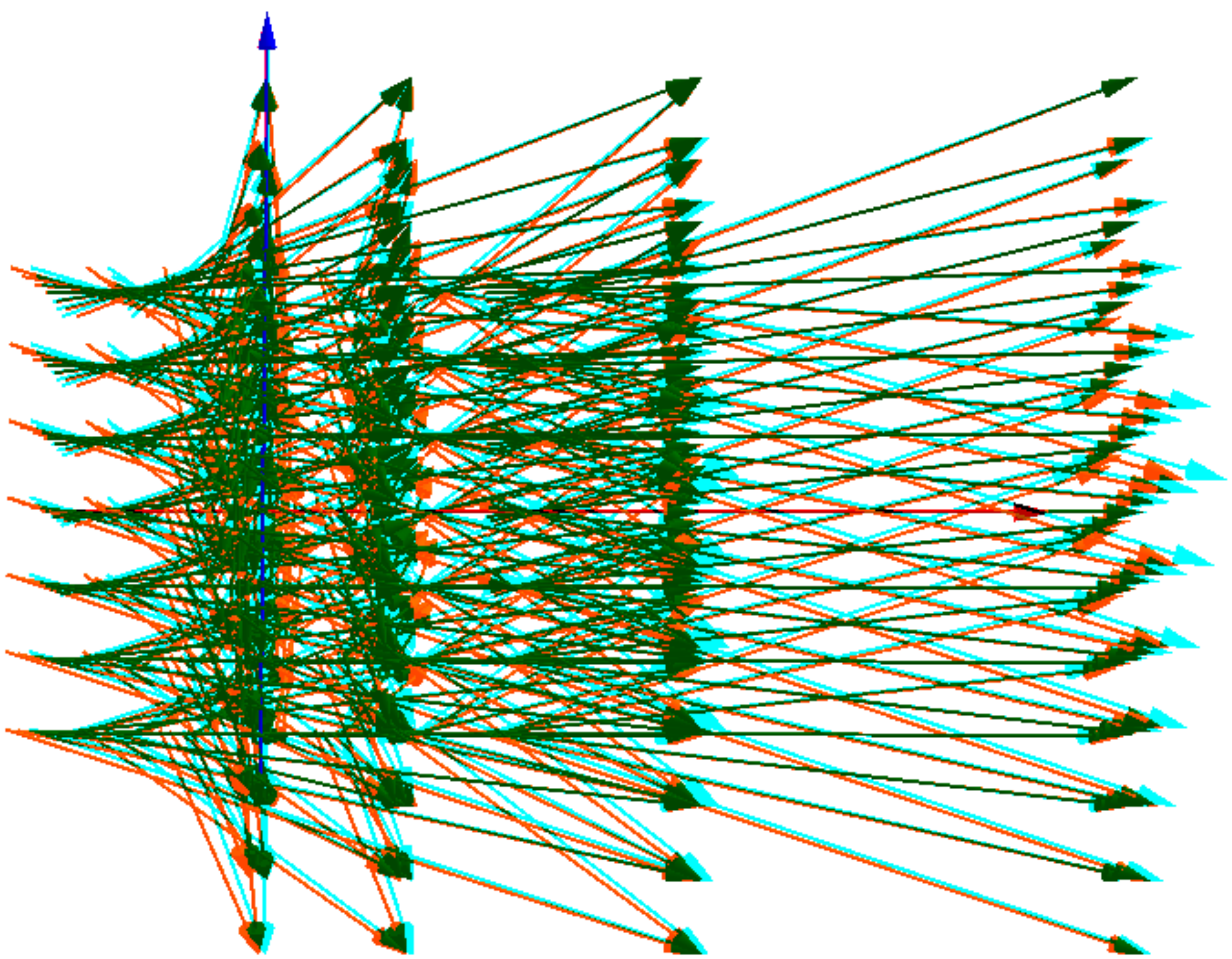
Cette session, nous allons regarder trois types de fonction

3) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Les champs de vecteurs

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

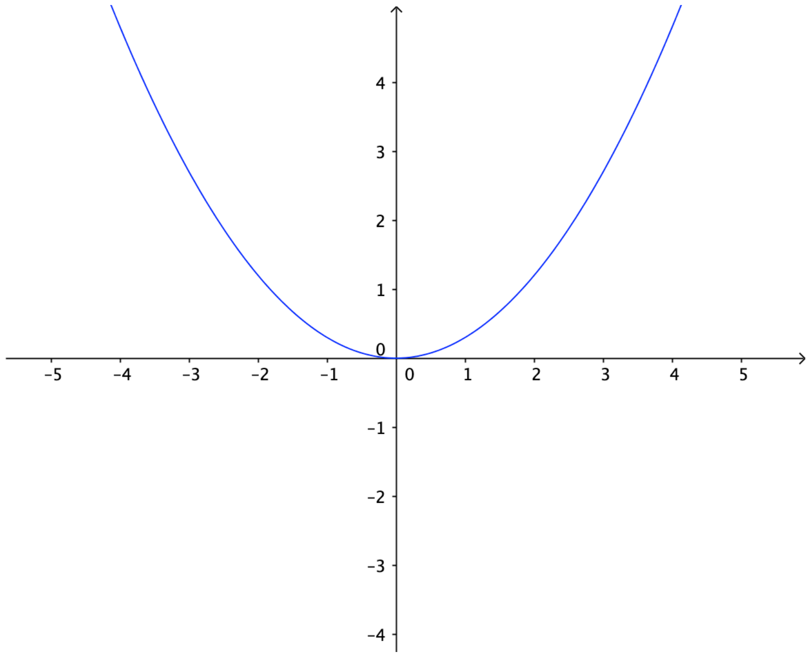
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

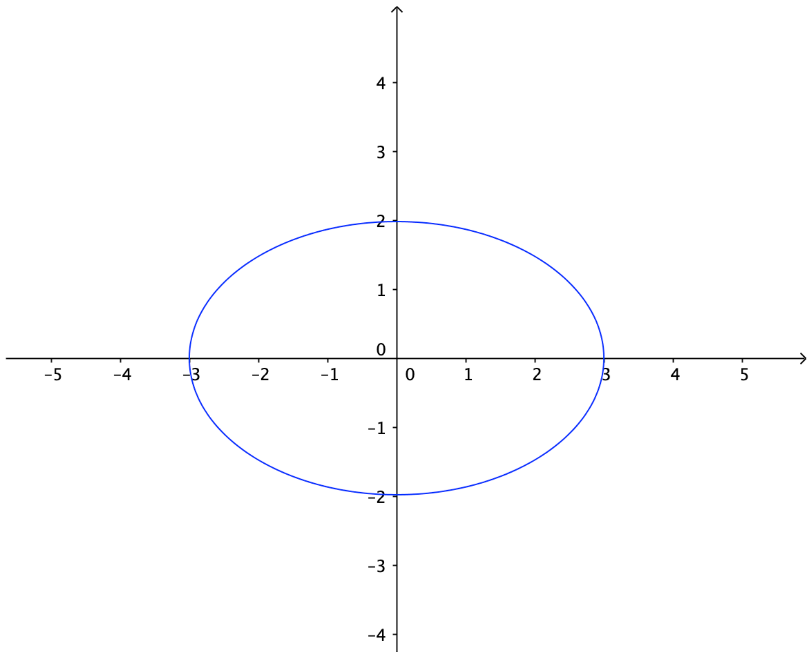


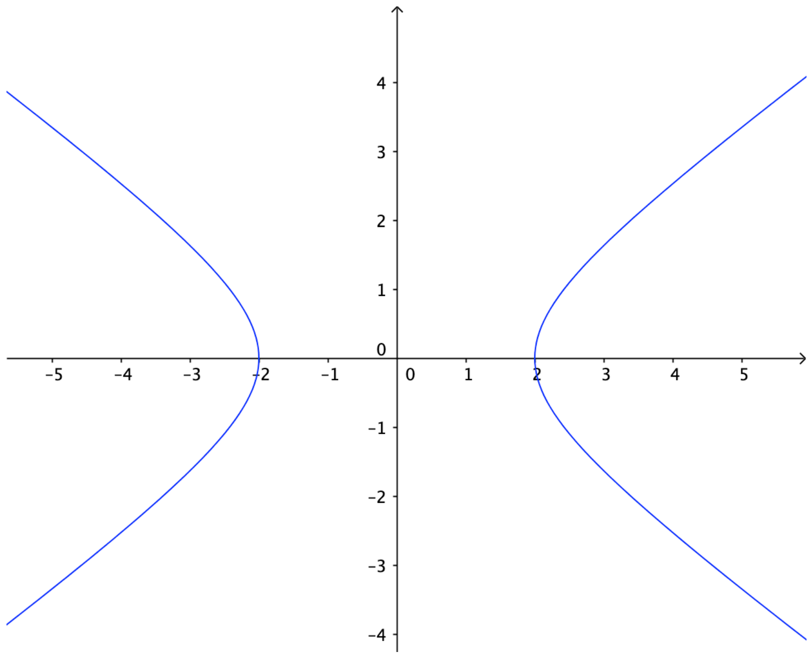


On a vu que l'ensemble des points satisfaisant une équation à deux variables donne une courbe dans le plan.

Par exemple les coniques







parabole

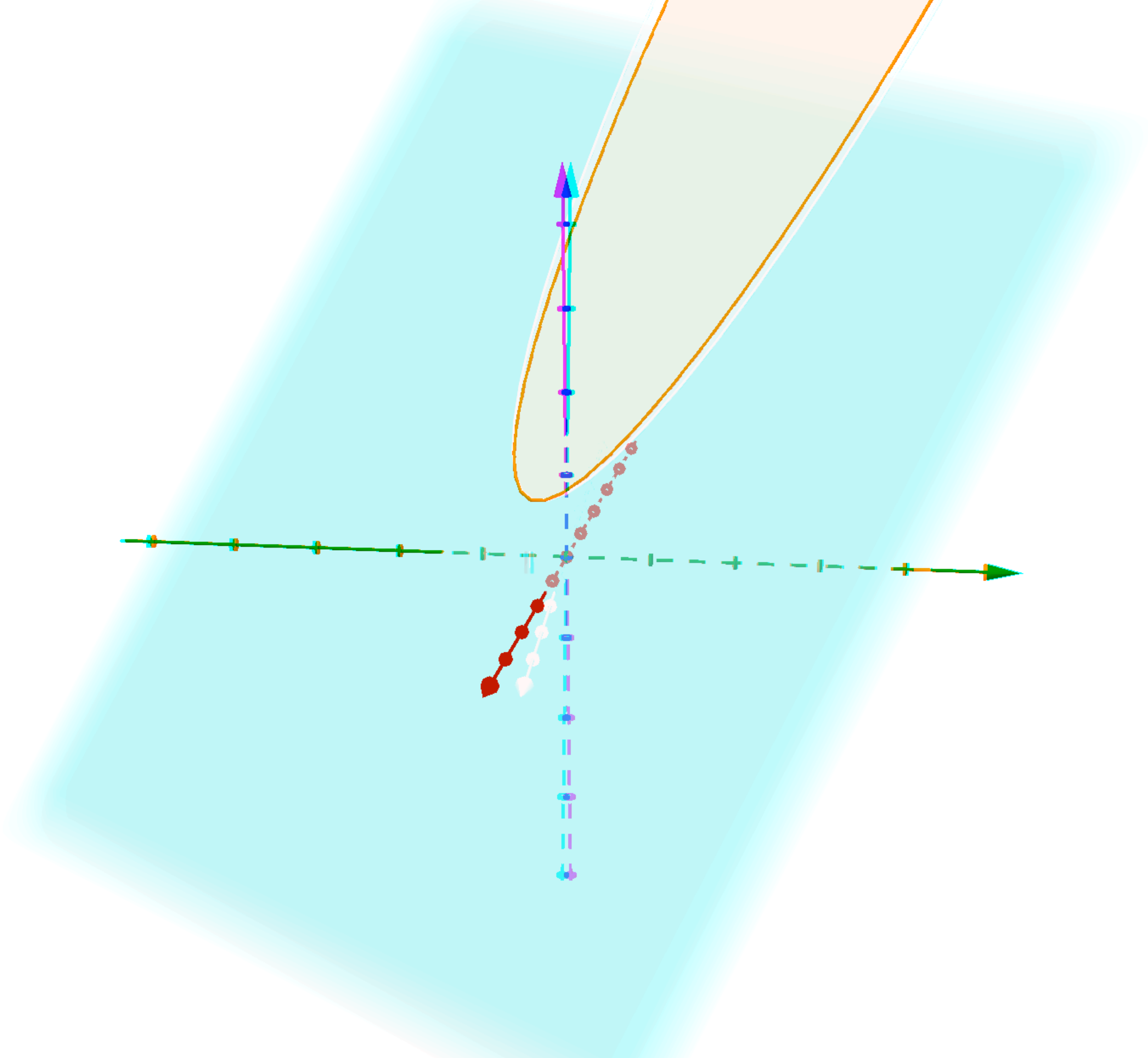
$$y = ax^2$$

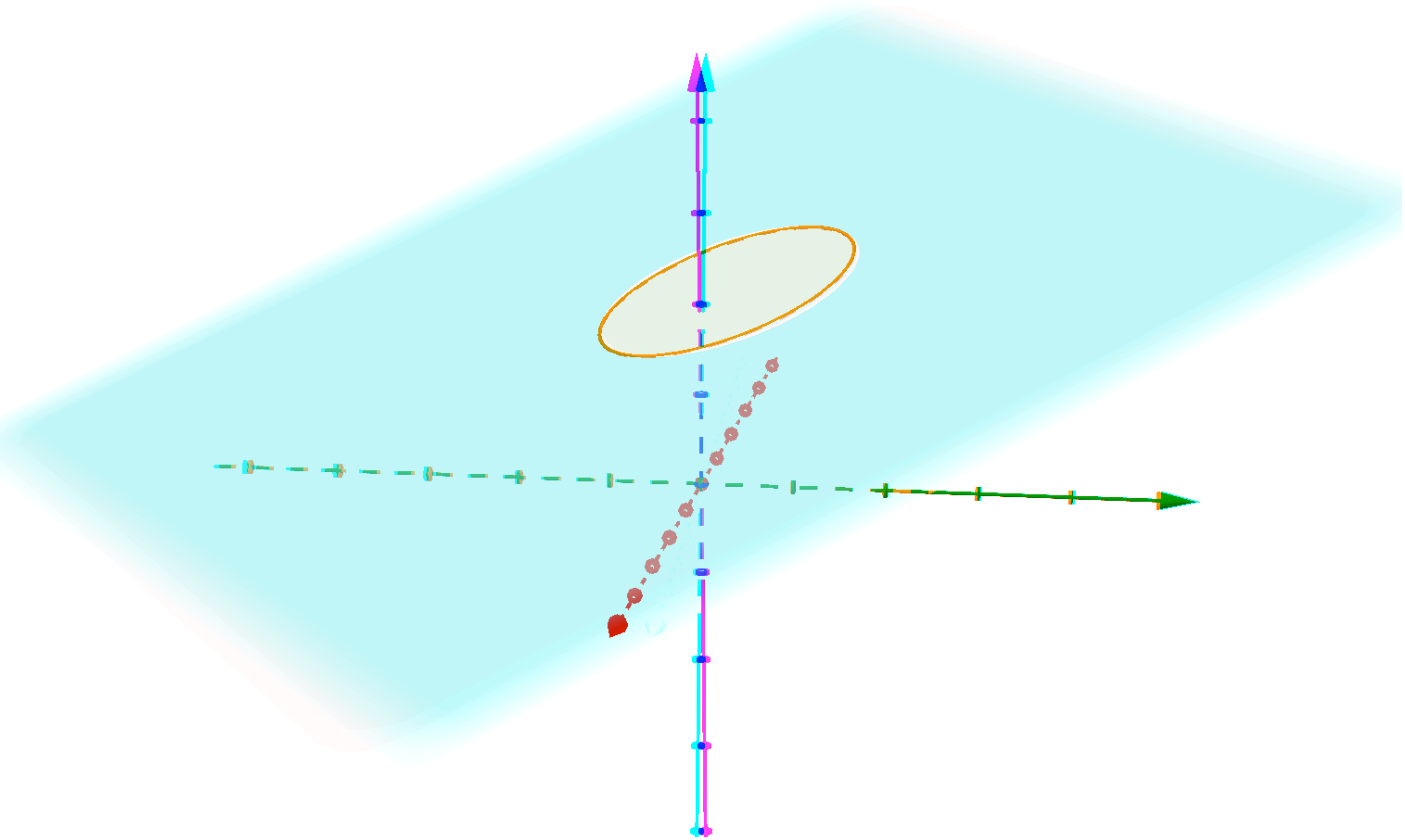
ellipse

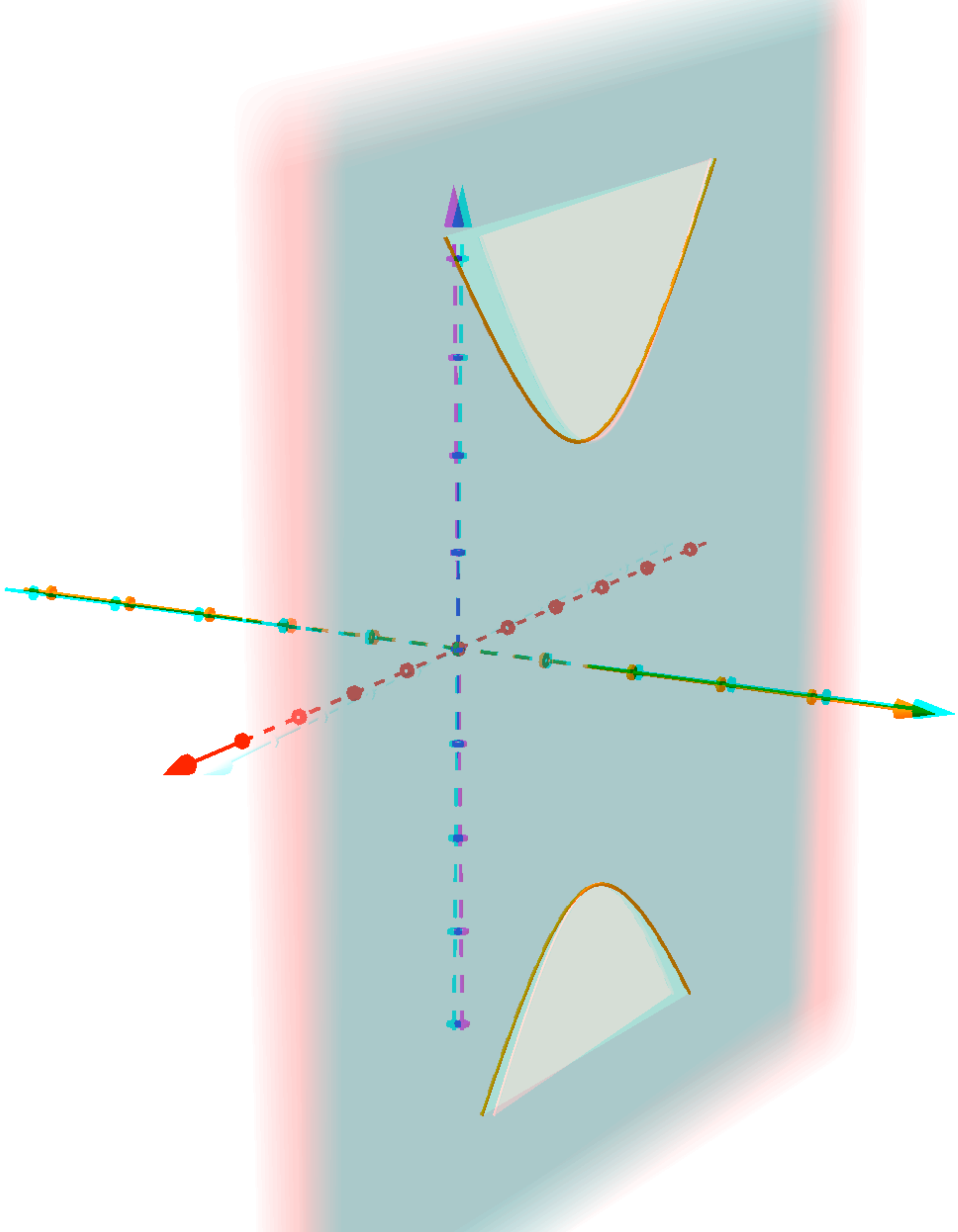
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hyperbole

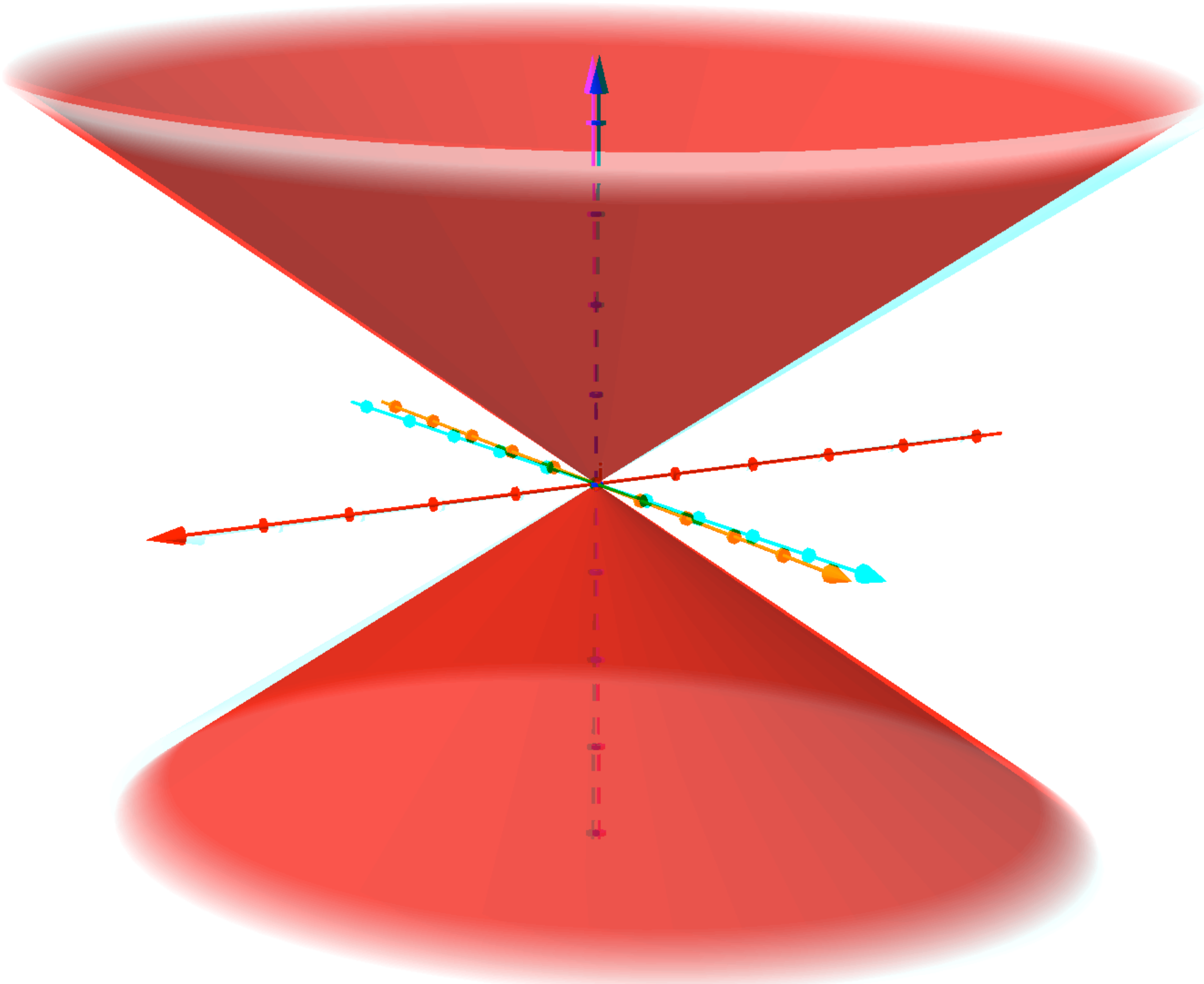
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$







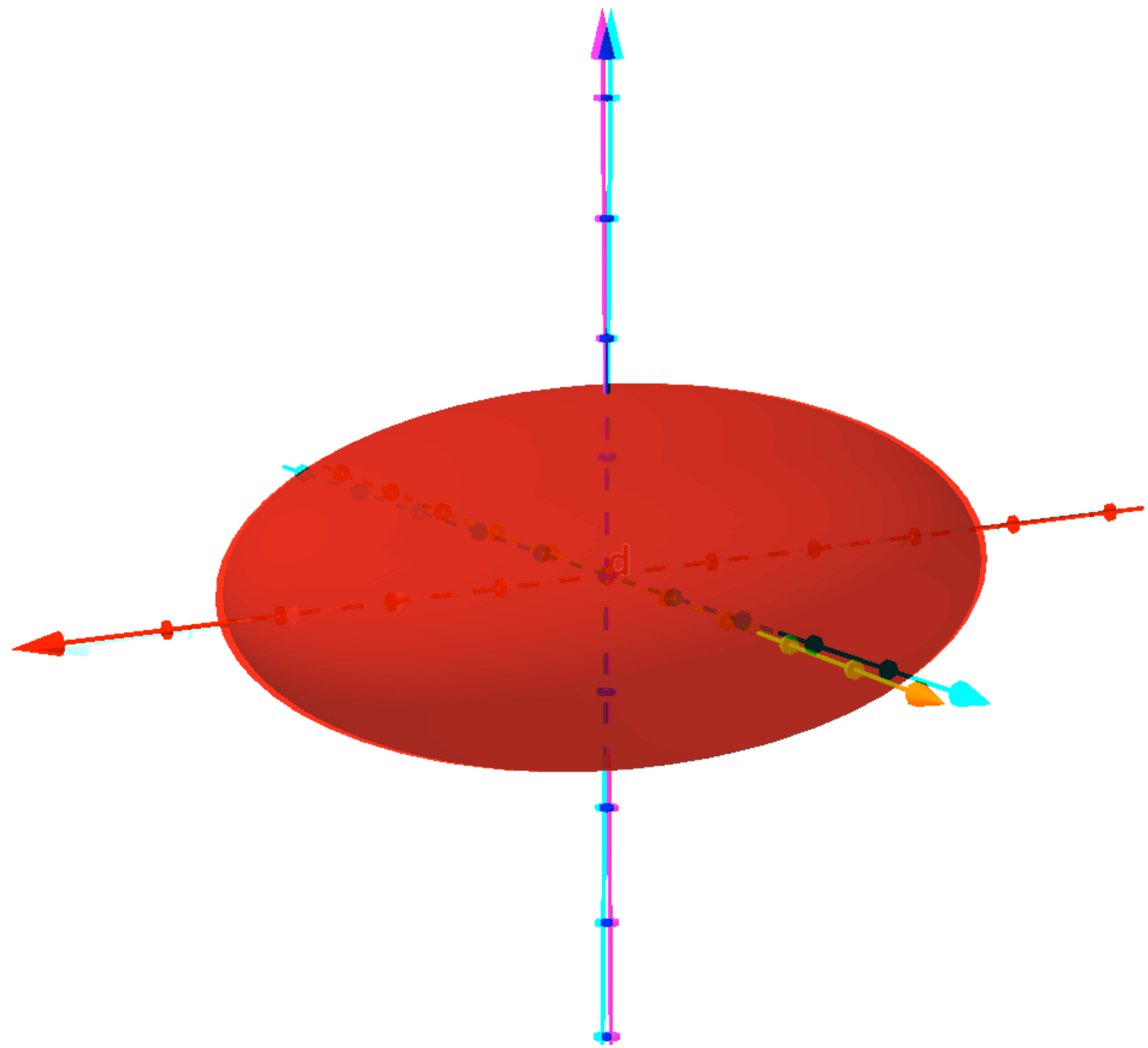
Les quadrique



Le cône

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

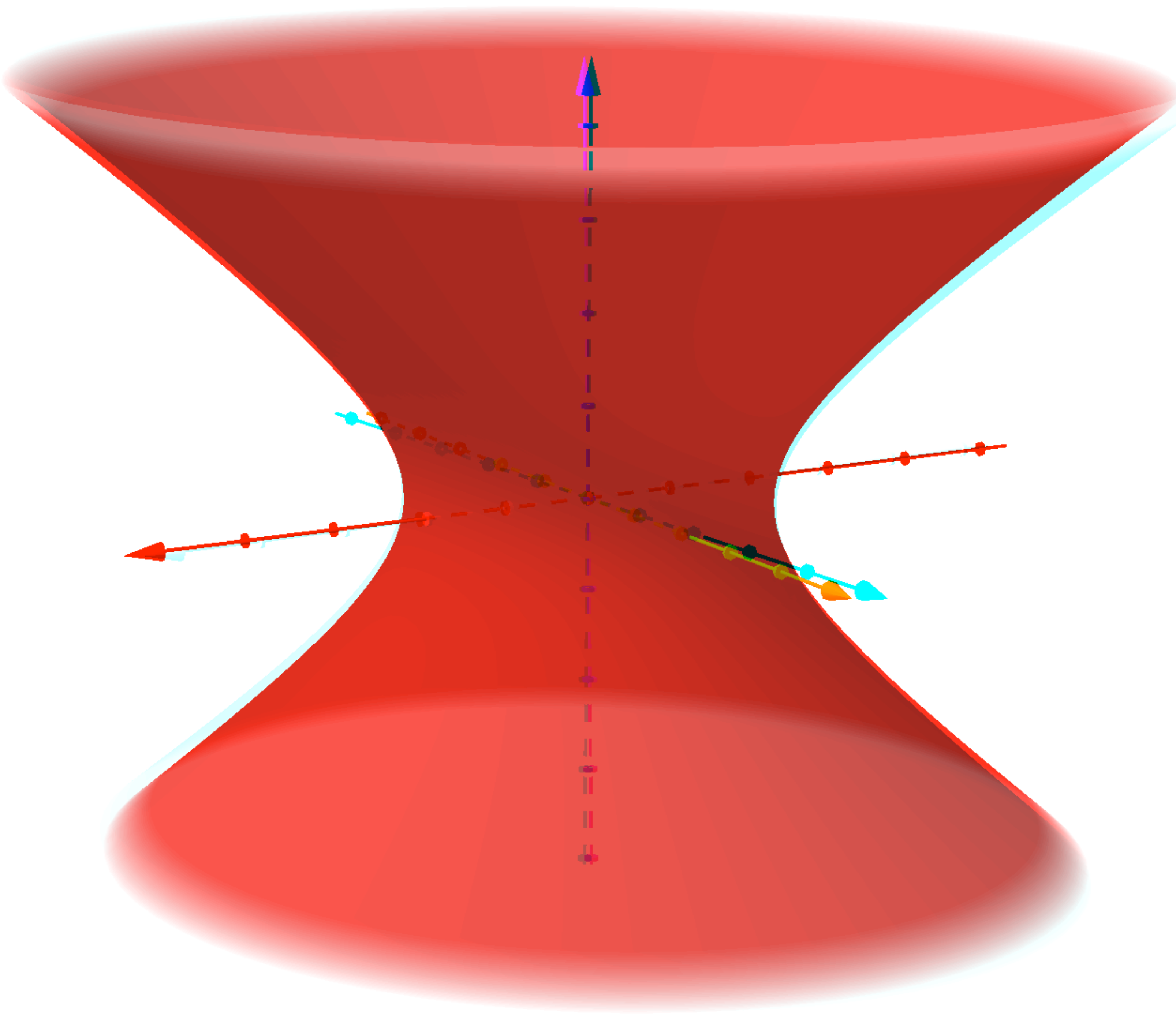
Les quadrique



L’éllipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

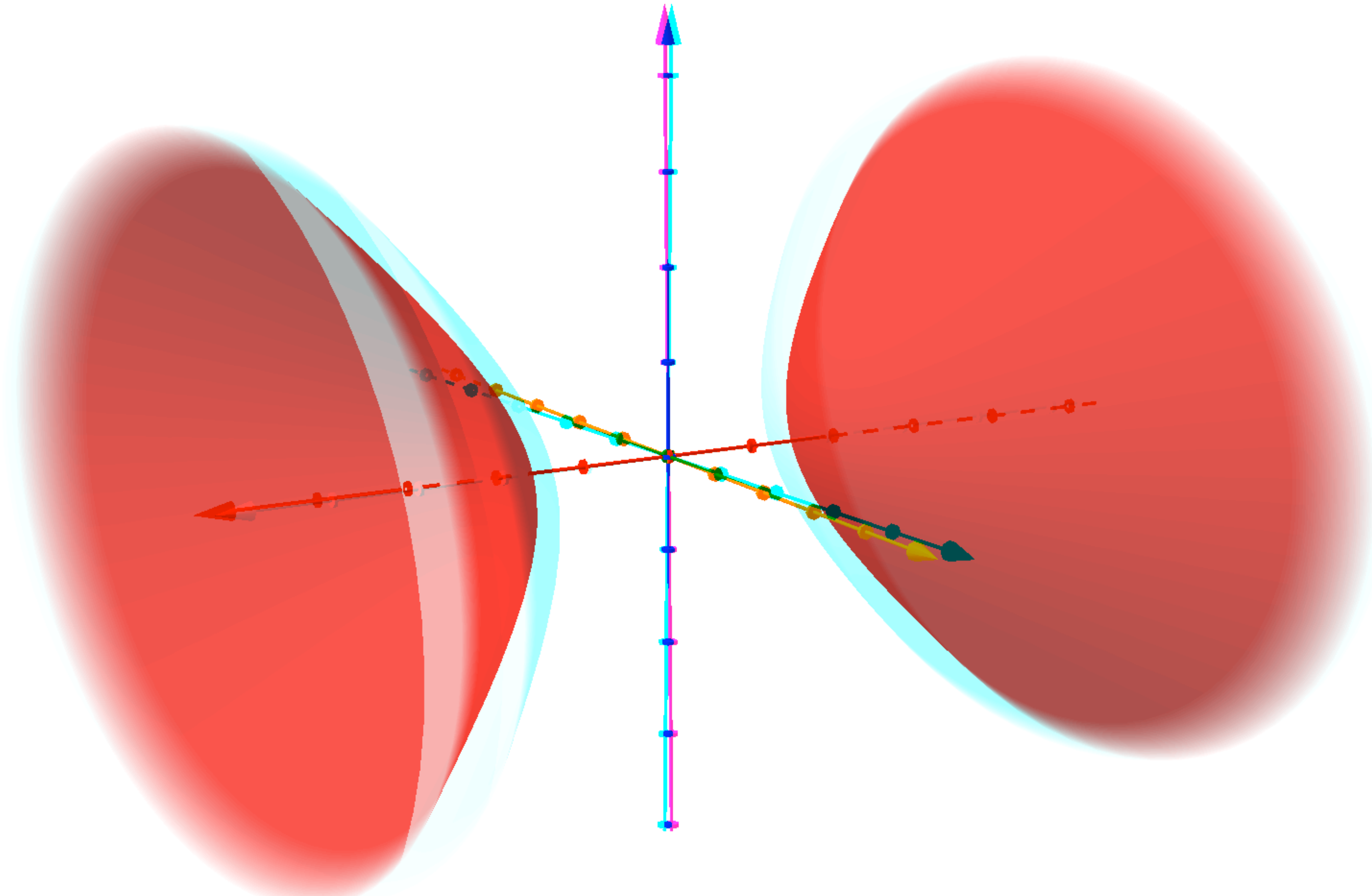
Les quadrique



L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

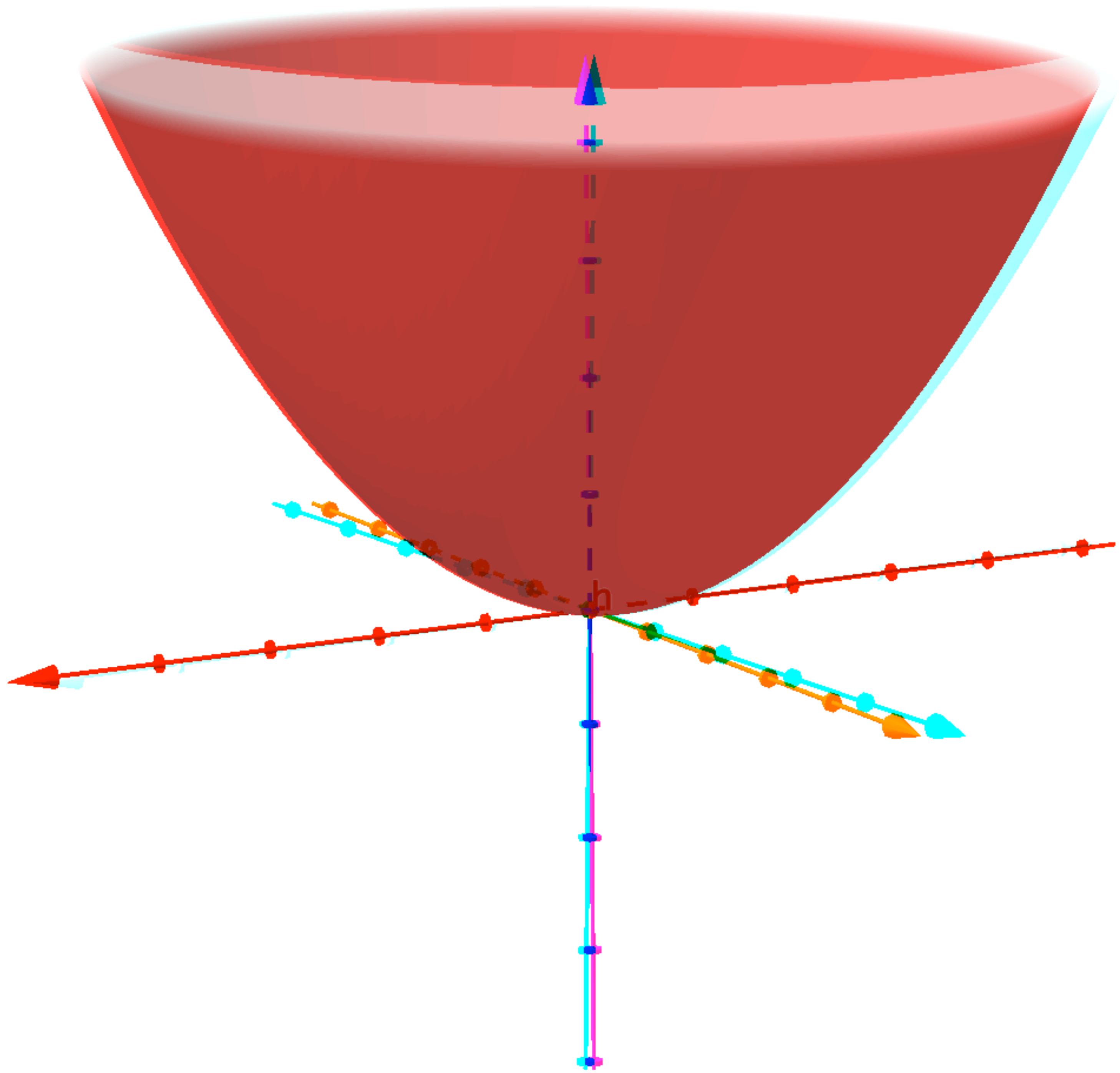
Les quadrique



L'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

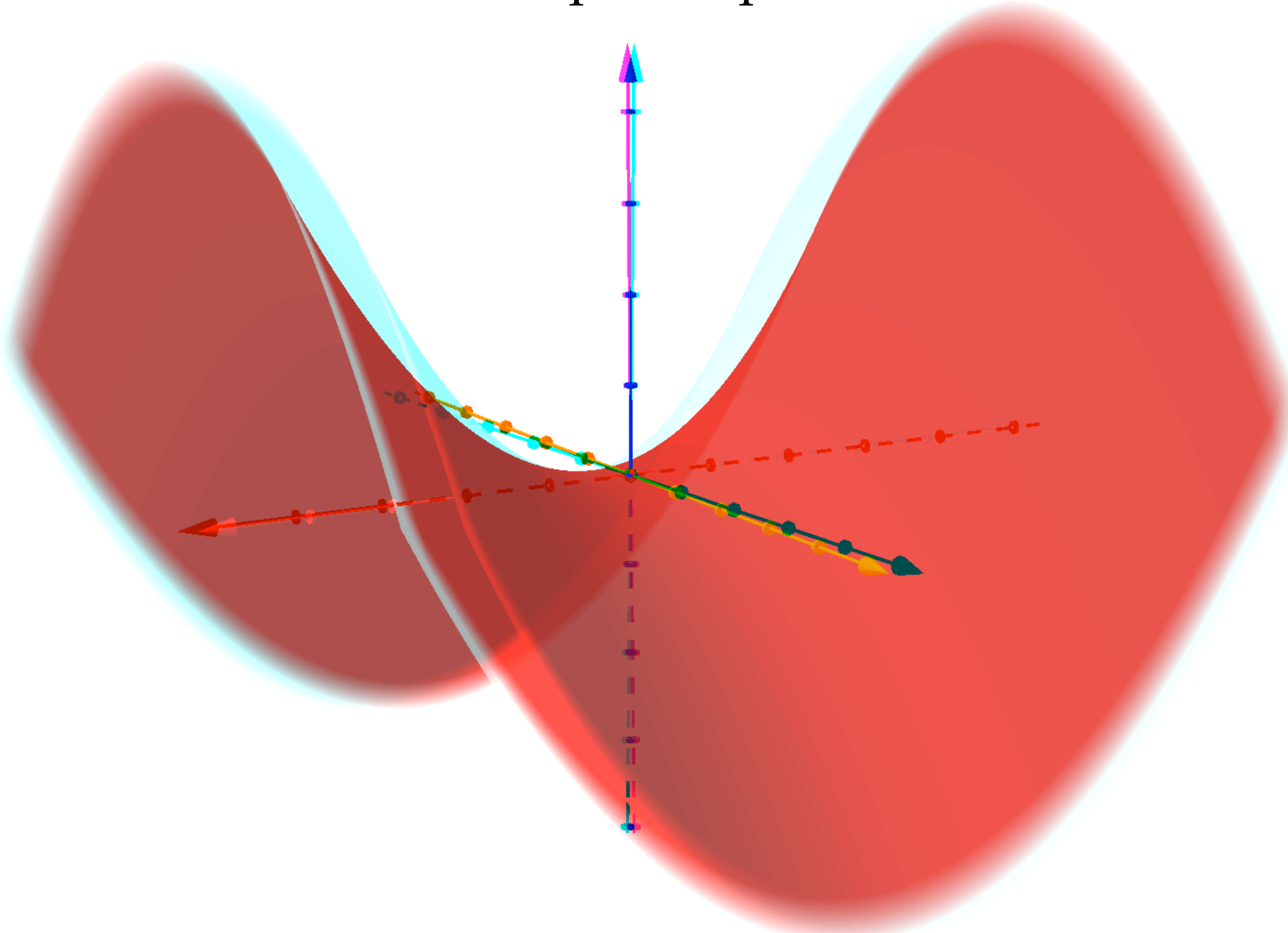
Les quadrique



Le paraboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

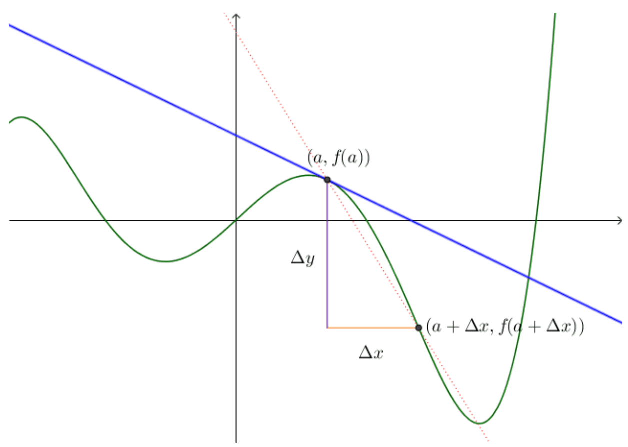
Les quadrique



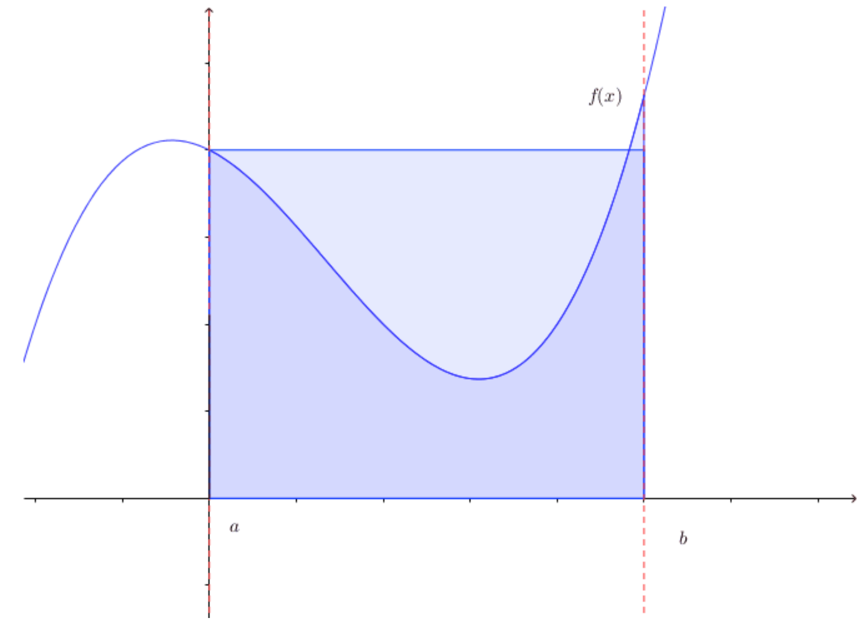
Le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

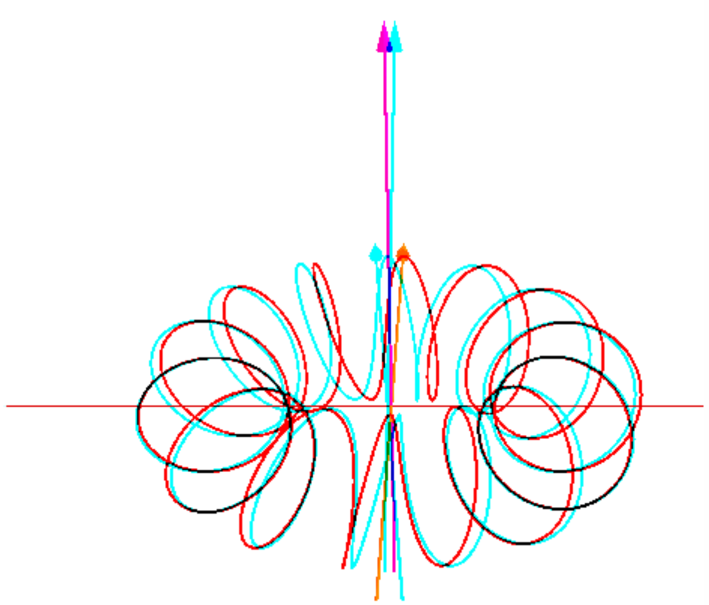
En gros, cette session on veut généraliser

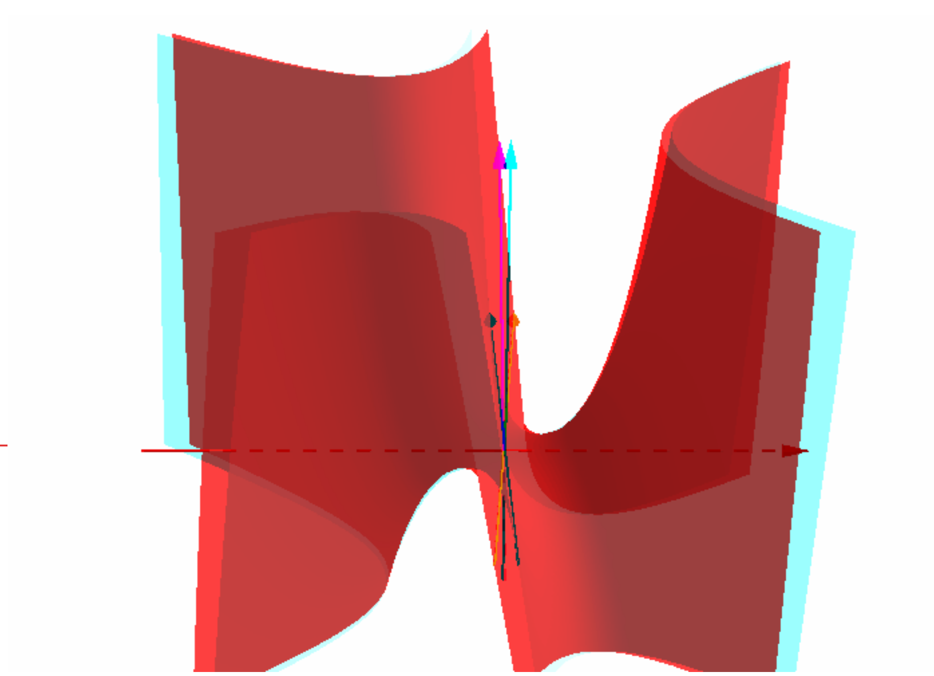


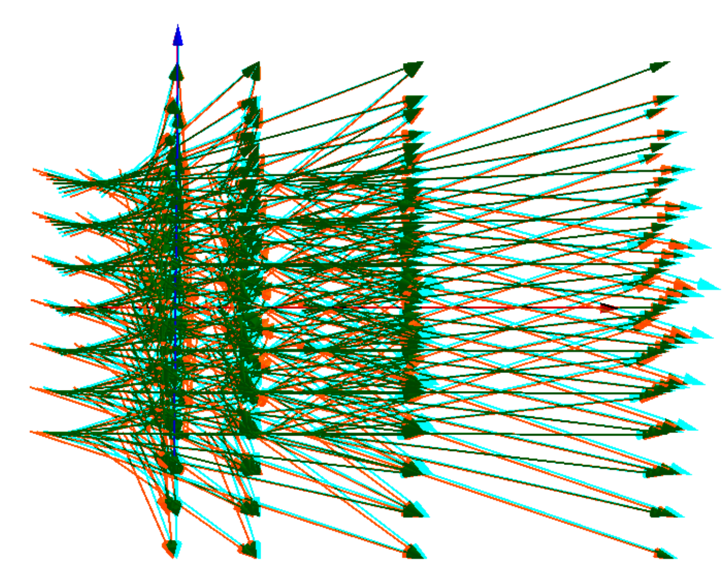
et



sur







Aujourd'hui, nous avons vu

- Survol des cours calcul différentiel, calcul intégral et algèbre linéaire.
- Introduction des idées que nous verrons cette session.

Devoir: Survoler le chapitre 9