1.3 DÉRIVÉES DE FONCTIONS VECTORIELLES

cours 3

Au dernier cours, nous avons vu

- Fonctions vectorielles
- Comment les visualiser
- Limite
- Surfaces paramétrées

Aujourd’hui, nous allons voir

- Dérivées de fonctions vectorielles.
- Règles de dérivation.
- Vecteur tangent unitaire.

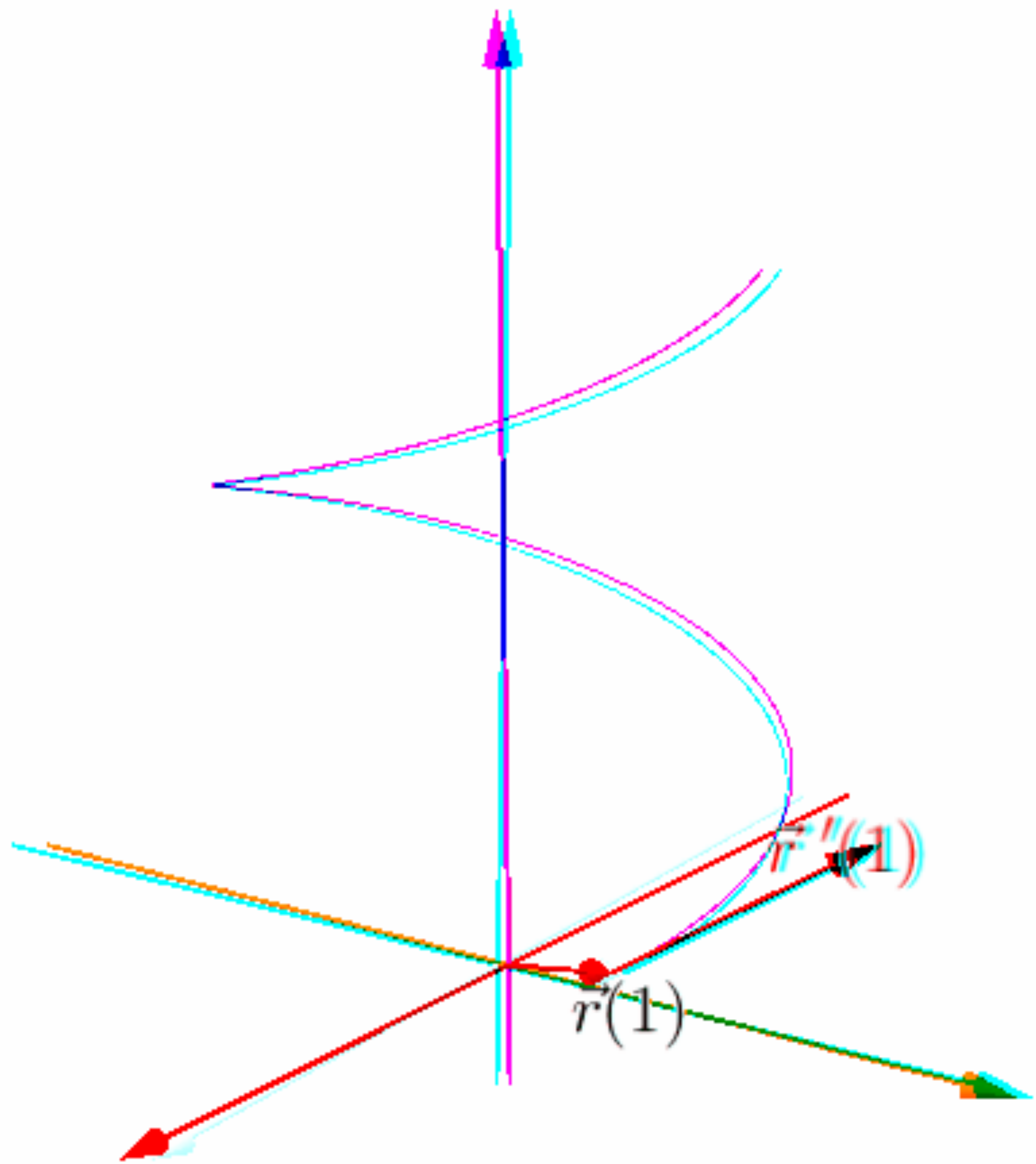
La dérivée d'une fonction est

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De manière analogue, on peut définir la dérivée d'une fonction vectorielle.

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Voyons voir ce que ça représente géométriquement.



$\vec{r}''(1)$
$\vec{r}(1)$

$$\vec{r}\,'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(a+h) - \vec{r}(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\vec{r}(a+h) - \vec{r}(a)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\left(f(a+h), g(a+h), k(a+h)\right) - \left(f(a), g(a), k(a)\right)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \frac{g(a+h) - g(a)}{h}, \frac{k(a+h) - k(a)}{h}\right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{k(a+h) - k(a)}{h}\right)$$

$$= \left(f'(a), g'(a), k'(a)\right)$$

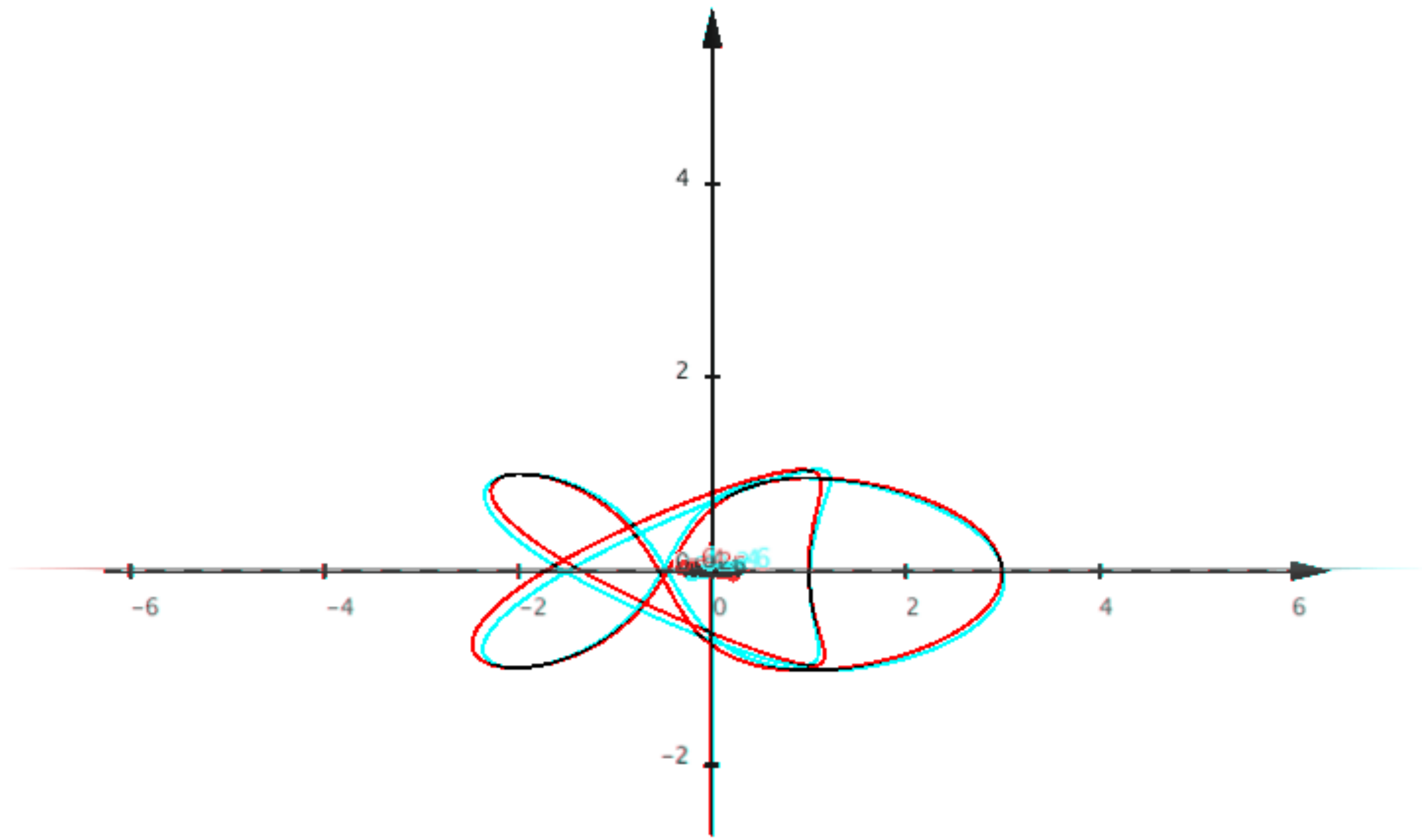
$$\vec{r}\,'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(a+h) - \vec{r}(a)}{h} = (f'(a), g'(a), k'(a))$$

Faites les exercices suivants

p.706 #1

Exemple

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$



Exemple

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

$$\left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t\right]' = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t$$

$$\left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t\right]' = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t$$

$$\left[\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]' = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

Exemple

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

$$\left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t\right]' = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t$$

$$\left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t\right]' = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t$$

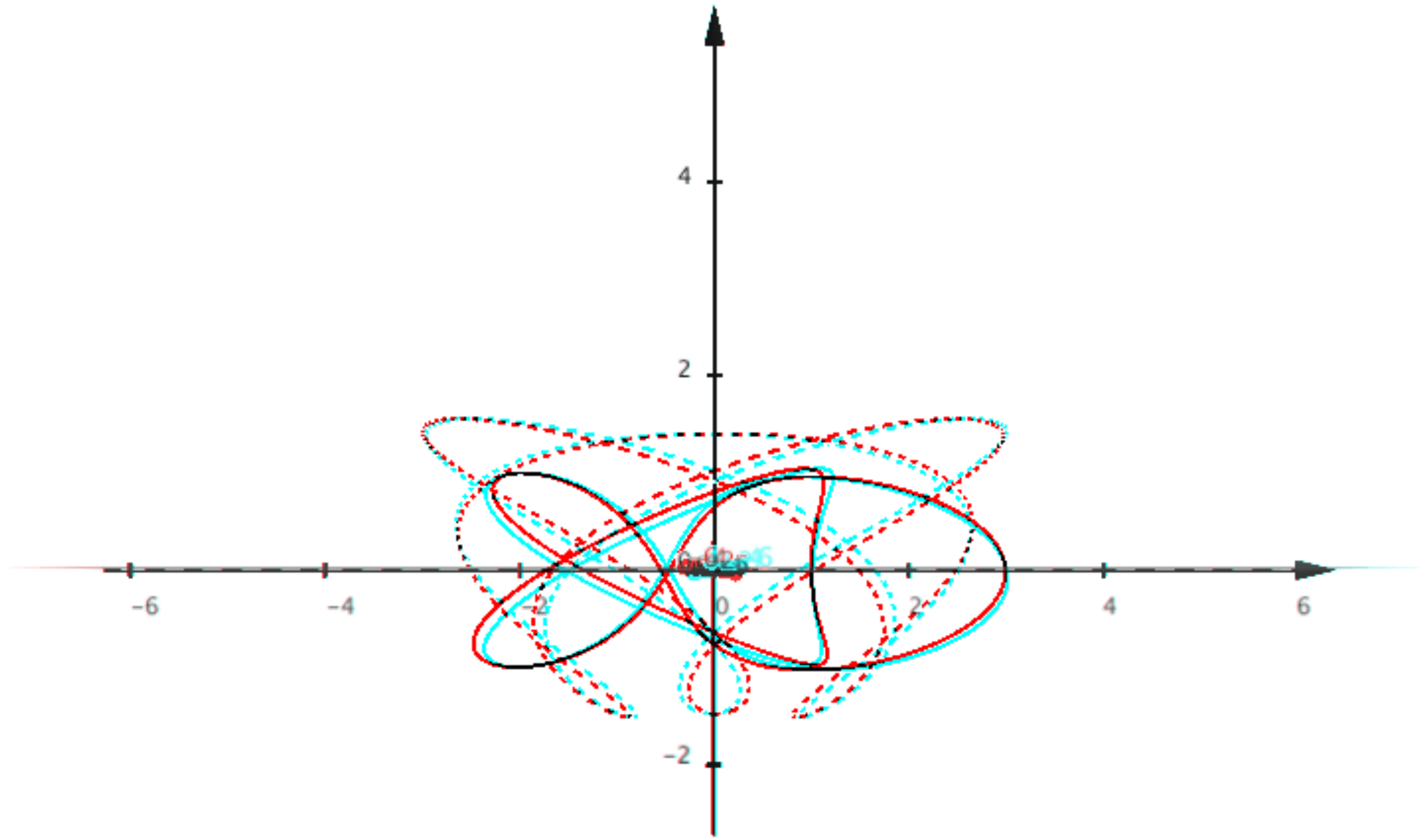
$$\left[\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]' = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

Exemple

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

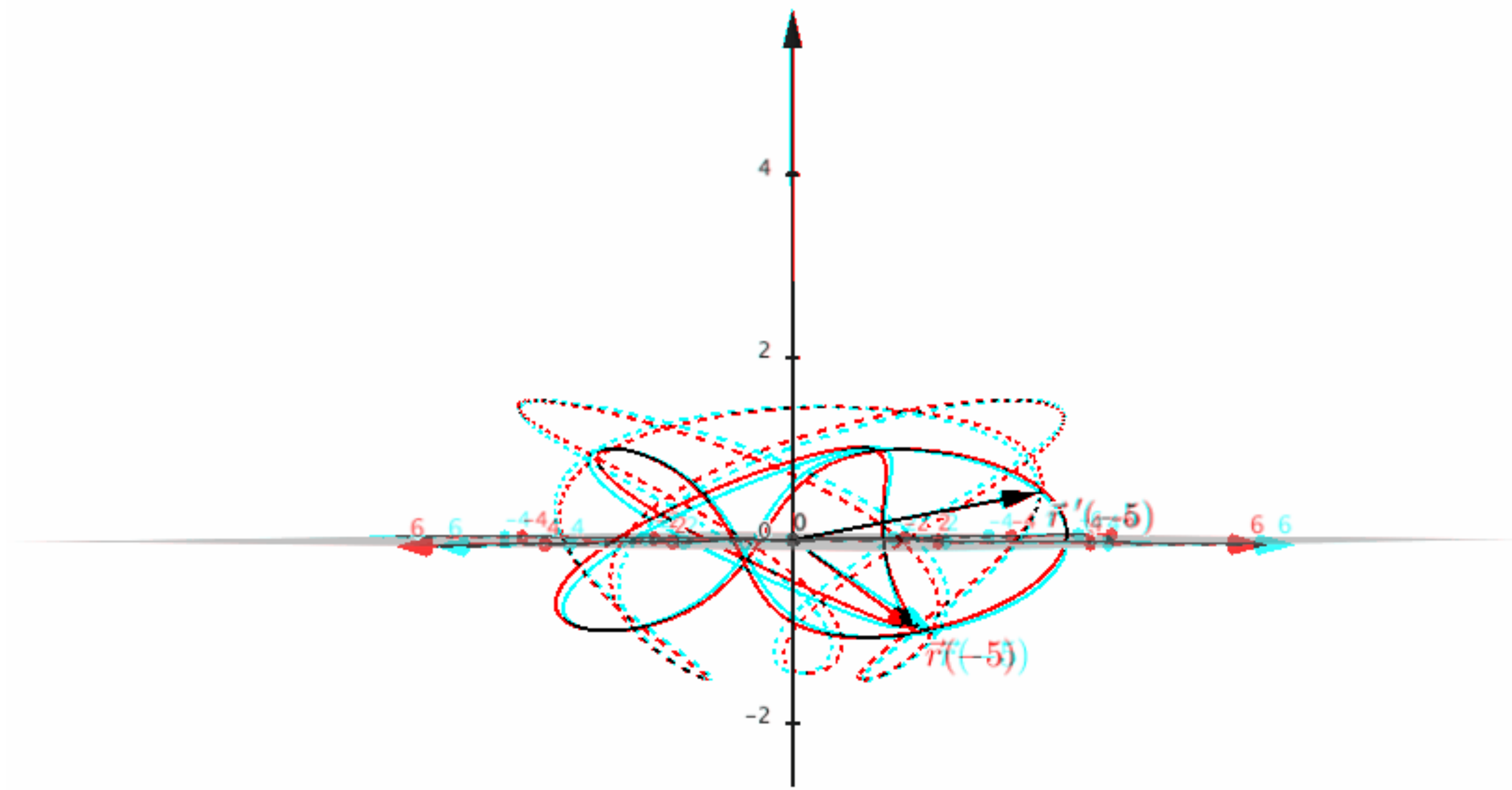
$$\vec{r}\,'(t) = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$



Exemple

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

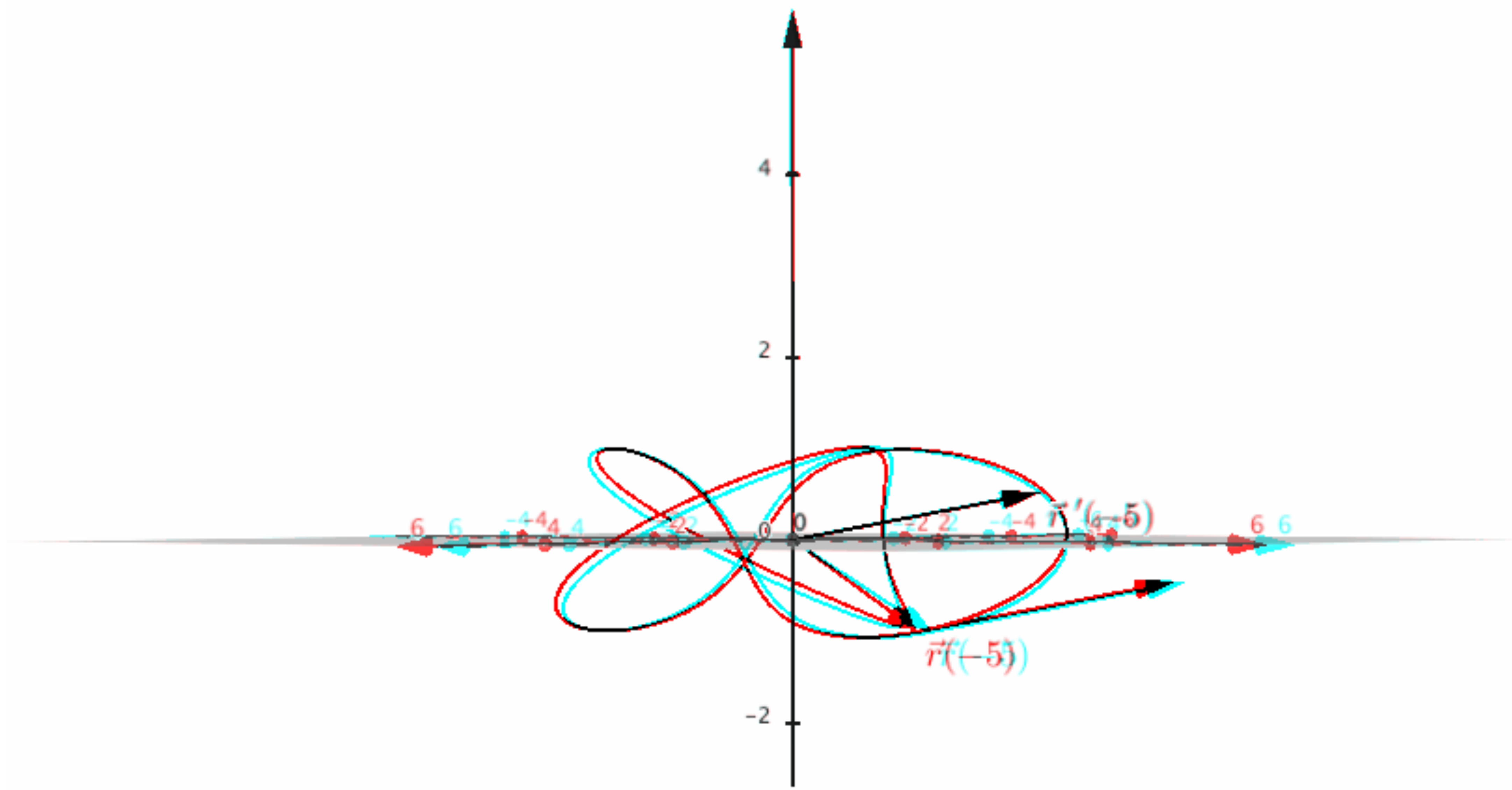
$$\vec{r}\,'(t) = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$



Exemple

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

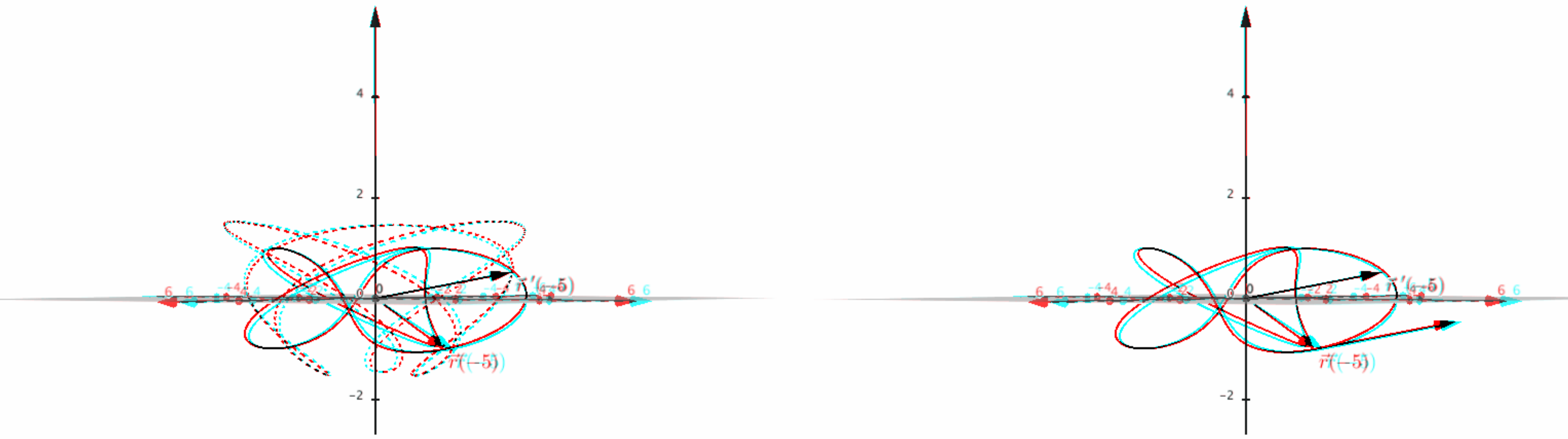
$$\vec{r}\,'(t) = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$



Exemple

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos t - \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\sin t, -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin t + \left(2+\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\cos t, \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$$



Faites les exercices suivants

p.706 # 3 à 12

Théorème $(k\vec{r}(t))' = k\vec{r}\,'(t)$

Preuve:
$$
\begin{aligned}
(k\vec{r}(t))' &= (k(f(t), g(t), h(t)))' \\
&= (kf(t), kg(t), kh(t))' \\
&= ((kf(t))', (kg(t))', (kh(t))') \\
&= (kf'(t), kg'(t), kh'(t)) \\
&= k\left(f'(t), g'(t), h'(t)\right) \\
&= k\vec{r}\,'(t)
\end{aligned}
$$

Théorème $(\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t))' = \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{s}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{s}\,'(t)$

Preuve:

$$(\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t))' = ((f_1(t), g_1(t), h_1(t))\cdot(f_2(t), g_2(t), h_2(t)))'$$

$$= (f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t) + h_1(t)h_2(t))'$$

$$= (f_1(t)f_2(t))' + (g_1(t)g_2(t))' + (h_1(t)h_2(t))'$$

$$= f_1'(t)f_2(t) + f_1(t)f_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + h_1'(t)h_2(t) + h_1(t)h_2'(t)$$

$$= f_1'(t)f_2(t) + g_1'(t)g_2(t) + h_1'(t)h_2(t) + f_1(t)f_2'(t) + g_1(t)g_2'(t) + h_1(t)h_2'(t)$$

$$= \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{s}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{s}\,'(t)$$

Théorème $$(\vec r(t)\wedge \vec s(t))' = \vec r\,'(t)\wedge \vec s(t) + \vec r(t)\wedge \vec s\,'(t)$$

Preuve: $$(\vec r(t)\wedge \vec s(t))' = \begin{vmatrix} \vec\imath & \vec\jmath & \vec k \\ f_1(t) & g_1(t) & h_1(t) \\ f_2(t) & g_2(t) & h_2(t) \end{vmatrix}'$$

$$= \left((g_1h_2 - h_1g_2)', -(f_1h_2 - h_1f_2)', (f_1g_2 - g_1f_2)'\right)$$

$$= \left((g_1h_2)' - (h_1g_2)', -\left((f_1h_2)' - (h_1f_2)'\right), (f_1g_2)' - (g_1f_2)'\right)$$

$$= \left((g_1'h_2 + g_1h_2') - (h_1'g_2 + h_1g_2'), -\left((f_1'h_2 + f_1h_2') - (h_1'f_2 + h_1f_2')\right), (f_1'g_2 + f_1g_2') - (g_1'f_2 + g_1f_2')\right)$$

$$= \left((g_1'h_2 - h_1'g_2) + (g_1h_2' - h_1g_2'), -\left((f_1'h_2 - h_1'f_2) + (f_1h_2' - h_1f_2')\right), (f_1'g_2 - g_1'f_2) + (f_1g_2' - g_1f_2')\right)$$

$$= \left(g_1'h_2 - h_1'g_2, -(f_1'h_2 - h_1'f_2), f_1'g_2 - g_1'f_2\right) + \left(g_1h_2' - h_1g_2', -(f_1h_2' - h_1f_2'), f_1g_2' - g_1f_2'\right)$$

Théorème $$(\vec{r}(t) \wedge \vec{s}(t))' = \vec{r}\,'(t) \wedge \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \wedge \vec{s}\,'(t)$$

Preuve:

$$(\vec{r}(t) \wedge \vec{s}(t))'$$

$$= \left(g_1'h_2 - h_1'g_2, -\left(f_1'h_2 - h_1'f_2\right), f_1'g_2 - g_1'f_2\right) + \left(g_1h_2' - h_1g_2', -\left(f_1h_2' - h_1f_2'\right), f_1g_2' - g_1f_2'\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1'(t) & g_1'(t) & h_1'(t) \\ f_2(t) & g_2(t) & h_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & g_1(t) & h_1(t) \\ f_2'(t) & g_2'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$= \vec{r}\,'(t) \wedge \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \wedge \vec{s}\,'(t)$$

$$(k\vec{r}(t))' = k\vec{r}\,'(t)$$

$$(\vec{r}(t) + \vec{s}(t))' = \vec{r}\,'(t) + \vec{s}\,'(t)$$

$$(f(t)\vec{r}(t))' = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}\,'(t)$$

$$(\vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t))' = \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{s}\,'(t)$$

$$(\vec{r}(t) \wedge \vec{s}(t))' = \vec{r}\,'(t) \wedge \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \wedge \vec{s}\,'(t)$$

$$(\vec{r}(f(t)))' = \vec{r}\,'(f(t))f'(t)$$

Exemple $\vec{r}(t) = (t^2, \sin t, e^t)$ $\vec{r}\,'(t) = (2t, \cos t, e^t)$

$$(\cos t\ \vec{r}(t))' = -\sin t\ \vec{r}(t) + \cos t\ \vec{r}\,'(t)$$

$$= -\sin t(t^2, \sin t, e^t) + \cos t(2t, \cos t, e^t)$$

$$= (-t^2 \sin t, \sin^2 t, -\sin t e^t) + (2t \cos t, \cos^2 t, \cos t e^t)$$

$$= (-t^2 \sin t + 2t \cos t, \sin^2 t + \cos^2 t, -\sin t e^t + \cos t e^t)$$

$$= (t(-t \sin t + 2 \cos t), 1, e^t(-\sin t + \cos t))$$

Exemple

$$\vec{r}(t) = (t^2, \sin t, e^t) \qquad \vec{s}(t) = (\ln t, \pi, \tan t)$$

$$\vec{r}\,'(t) = (2t, \cos t, e^t) \qquad \vec{s}\,'(t) = \left(\frac{1}{t}, 0, \sec^2 t\right)$$

$$\begin{aligned}
(\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t))' &= \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{s}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{s}\,'(t) \\
&= (2t\ln t + \pi\cos t + e^t\tan t) + (t + 0 + e^t\sec^2 t) \\
&= t(2\ln t + 1) + \pi\cos t + e^t(\tan t + \sec^2 t)
\end{aligned}$$

L'ensemble des points atteint par une fonction vectorielle est une courbe $\mathcal{C}$.

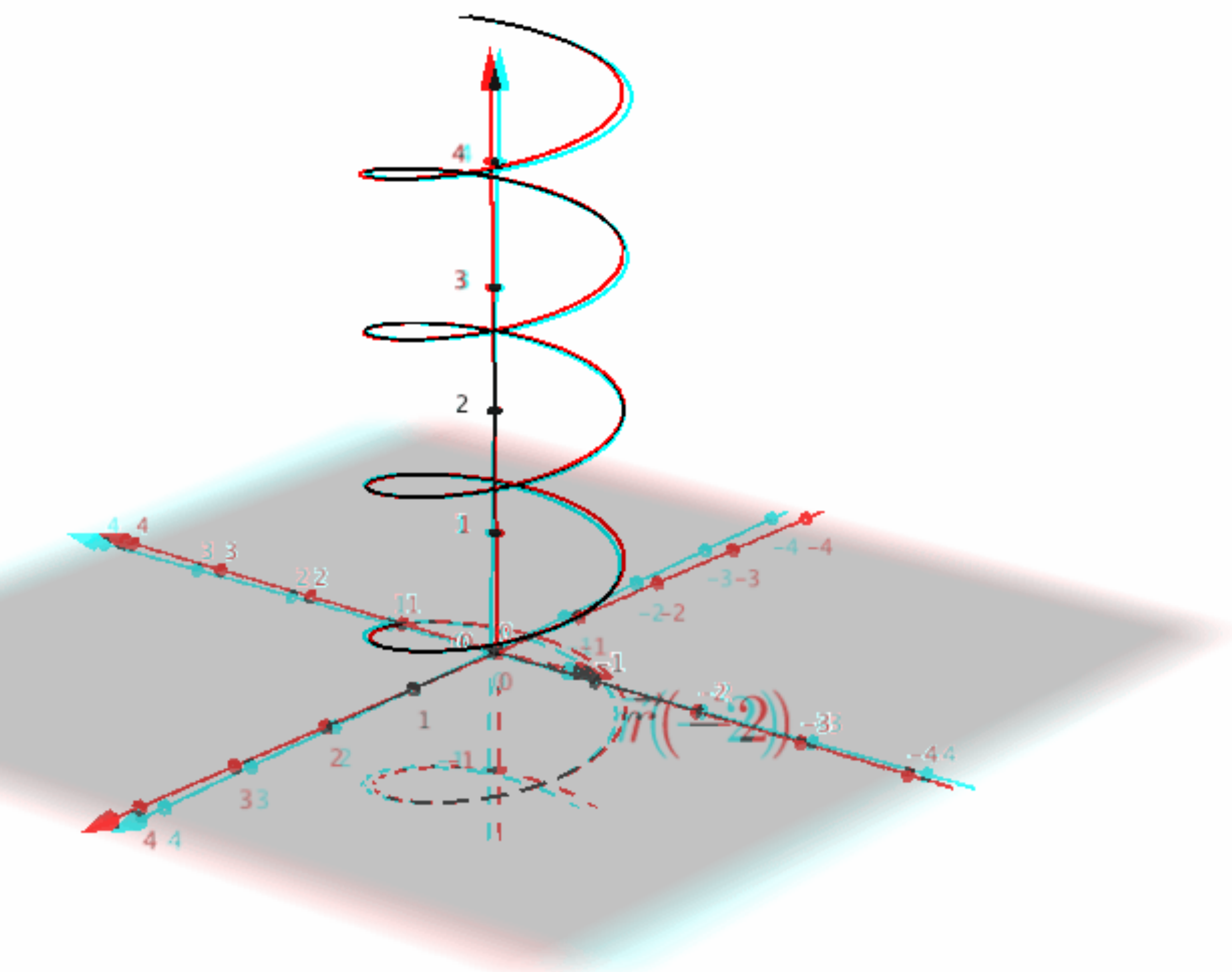
Mais pour une courbe donnée, il existe plusieurs fonctions vectorielles dont l'image est cette courbe.

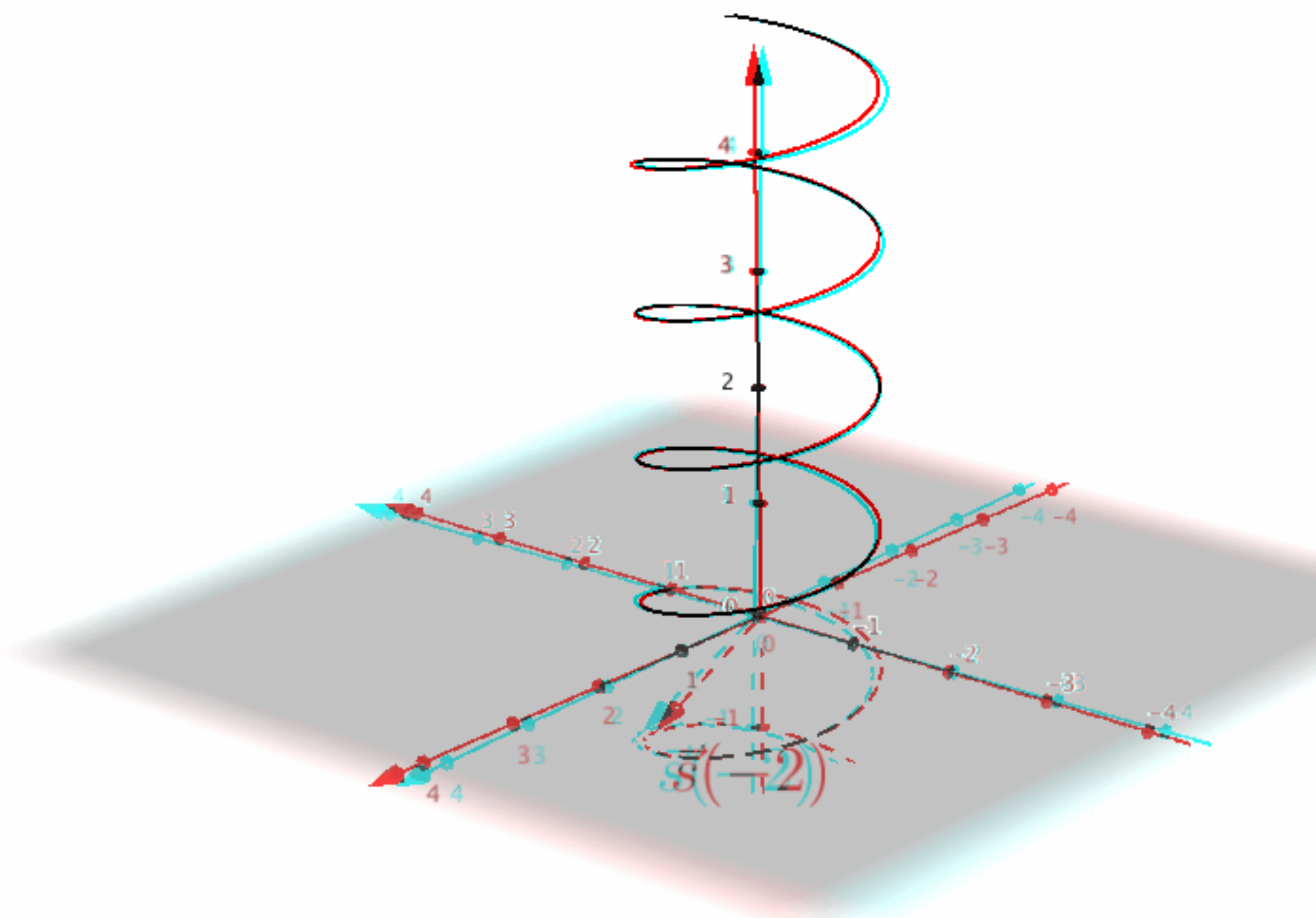
Par exemple, ces deux fonctions vectorielles sont deux paramétrisations de la même courbe

$$\vec{r}(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{5}\right)$$

$$\vec{s}(t) = \left(\cos(t^3 - t^2), \sin(t^3 - t^2), \frac{t^3 - t^2}{5}\right)$$

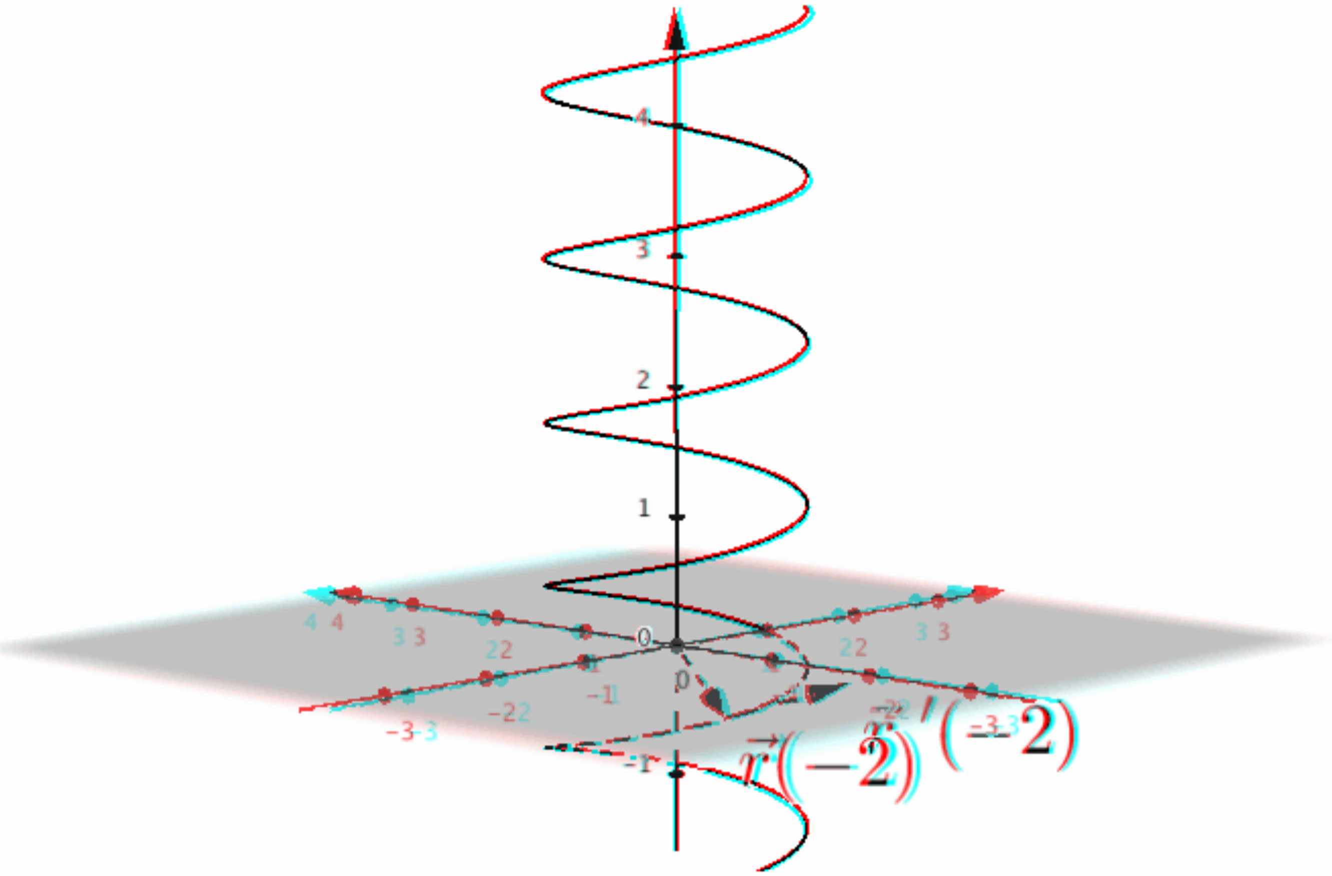
$$\vec{r}(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{5}\right)$$

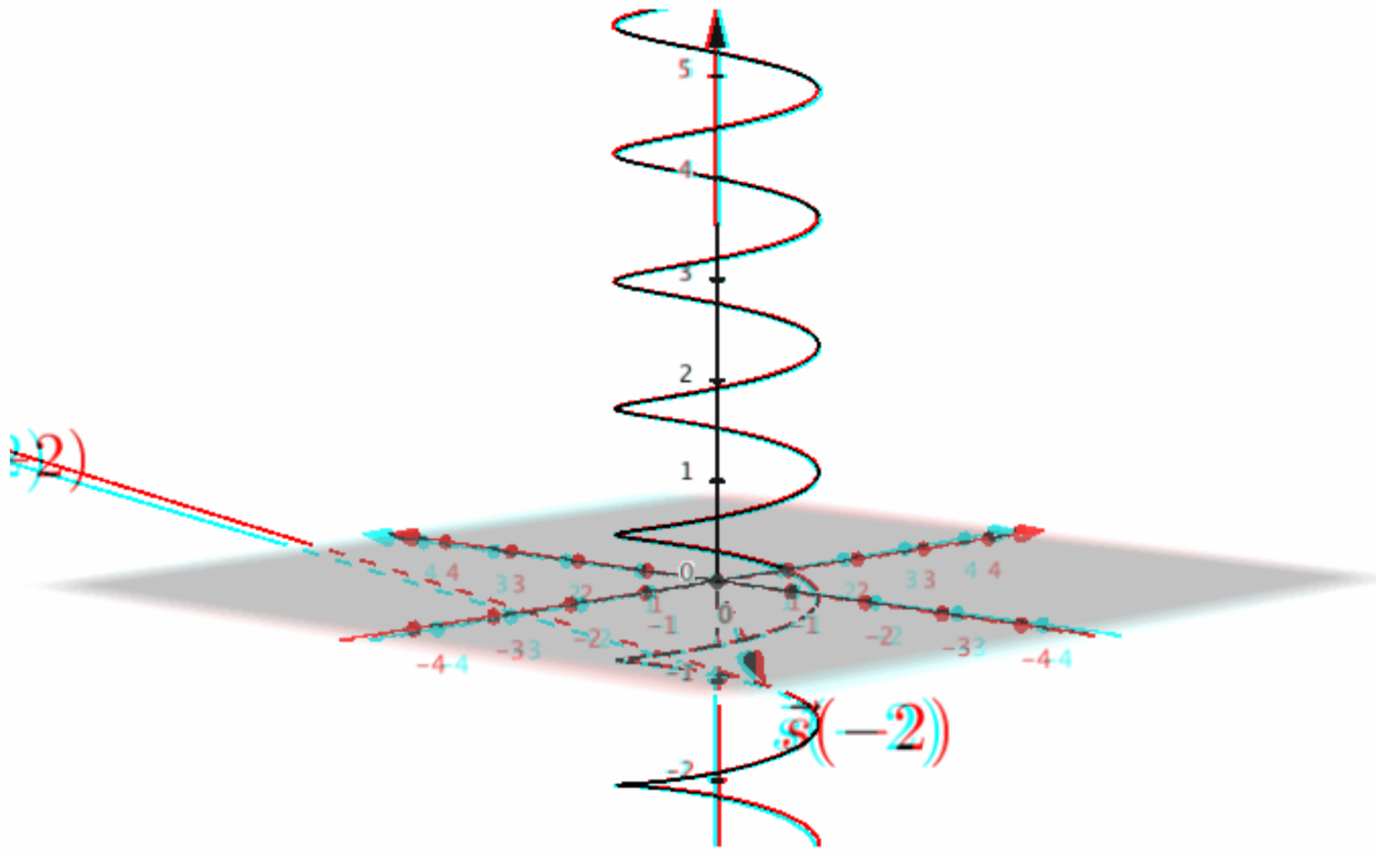




$$\vec{s}(t) = \left(\cos(t^3 - t^2), \sin(t^3 - t^2), \frac{t^3 - t^2}{5}\right)$$

$\|\vec{r}\,'(t)\|$ dépend de la paramétrisation





La direction de $\vec{r}\,'(t)$ dépend de la courbe

Dans les situations où l'on s'intéresse surtout à la direction du vecteur

$$\vec{r}\,'(t)$$

c'est-à-dire la direction tangente à la courbe, il arrive souvent qu'on le rende unitaire.

$$\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \vec{T}(t)$$

On nomme ce vecteur, le vecteur tangent unitaire.

Faites les exercices suivants

p.706 # 13 à 18

Aujourd'hui, nous avons vu

- Dérivées de fonctions vectorielles.
- Règles de dérivation.
- Vecteur tangent unitaire.

Devoir:

p.706 # 1 à 20, 31, 32 et 45 à 50