2.1 FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLE

cours 9

Aujourd'hui, nous allons voir

- Fonctions à plusieurs variables
- Les courbes de niveau
- Limite de fonction à deux variables
- Continuité

Une fonction à plusieurs variable est une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Pour les cours qui suivent, nous allons surtout explorer les fonctions à deux variables.

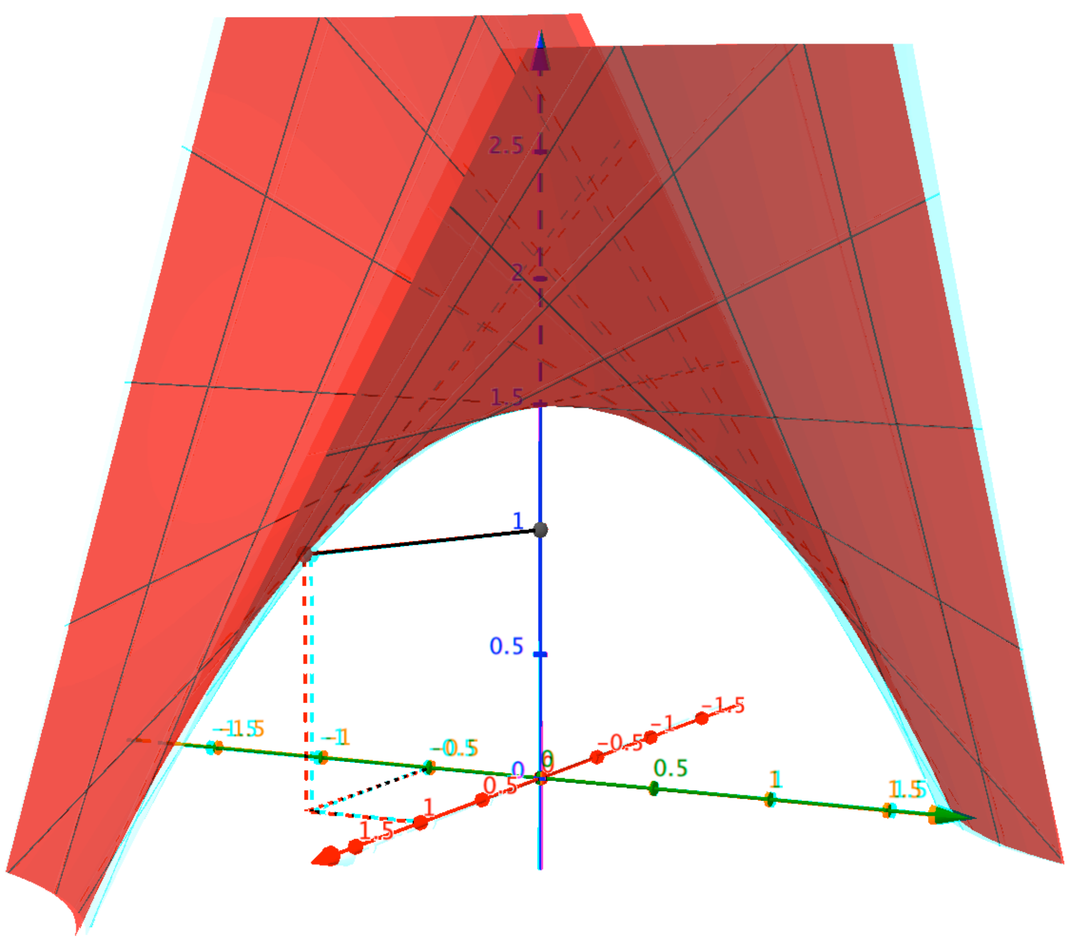
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

Le graphe d'une telle fonction est l'ensemble des points de la forme

$$\Big(x, y, f(x, y)\Big) \subset \mathbb{R}^3$$

Nous regarderons aussi, mais dans une moindre mesure, les fonctions à trois variables.

Exemple $f(x, y) = xy + \dfrac{3}{2}$



$$f(1, 1) = \frac{5}{2}$$

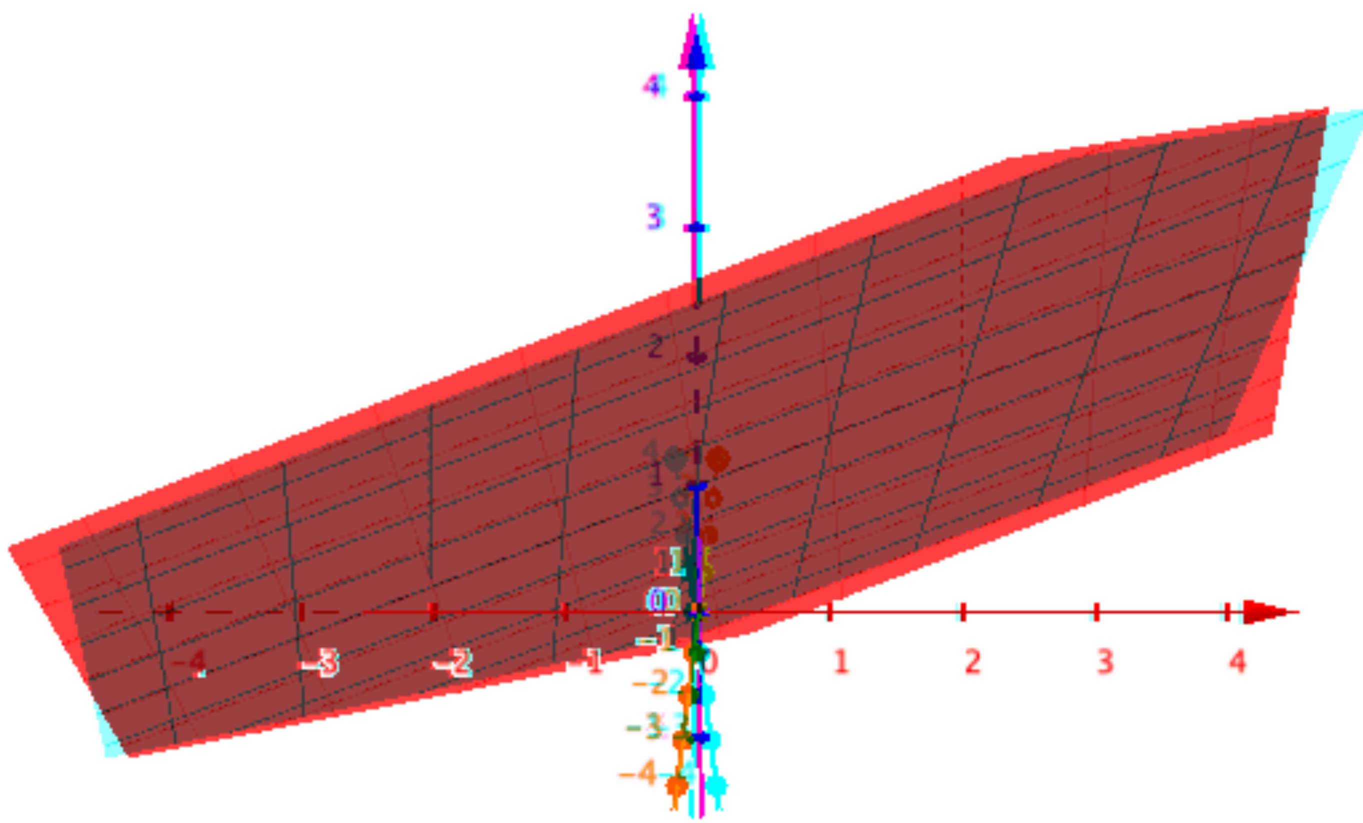
$$f(0, 1) = \frac{3}{2}$$

$$f\left(1, -\frac{1}{2}\right) = 1$$

Exemple

Le plan $2x - 3y - 5z = -5$

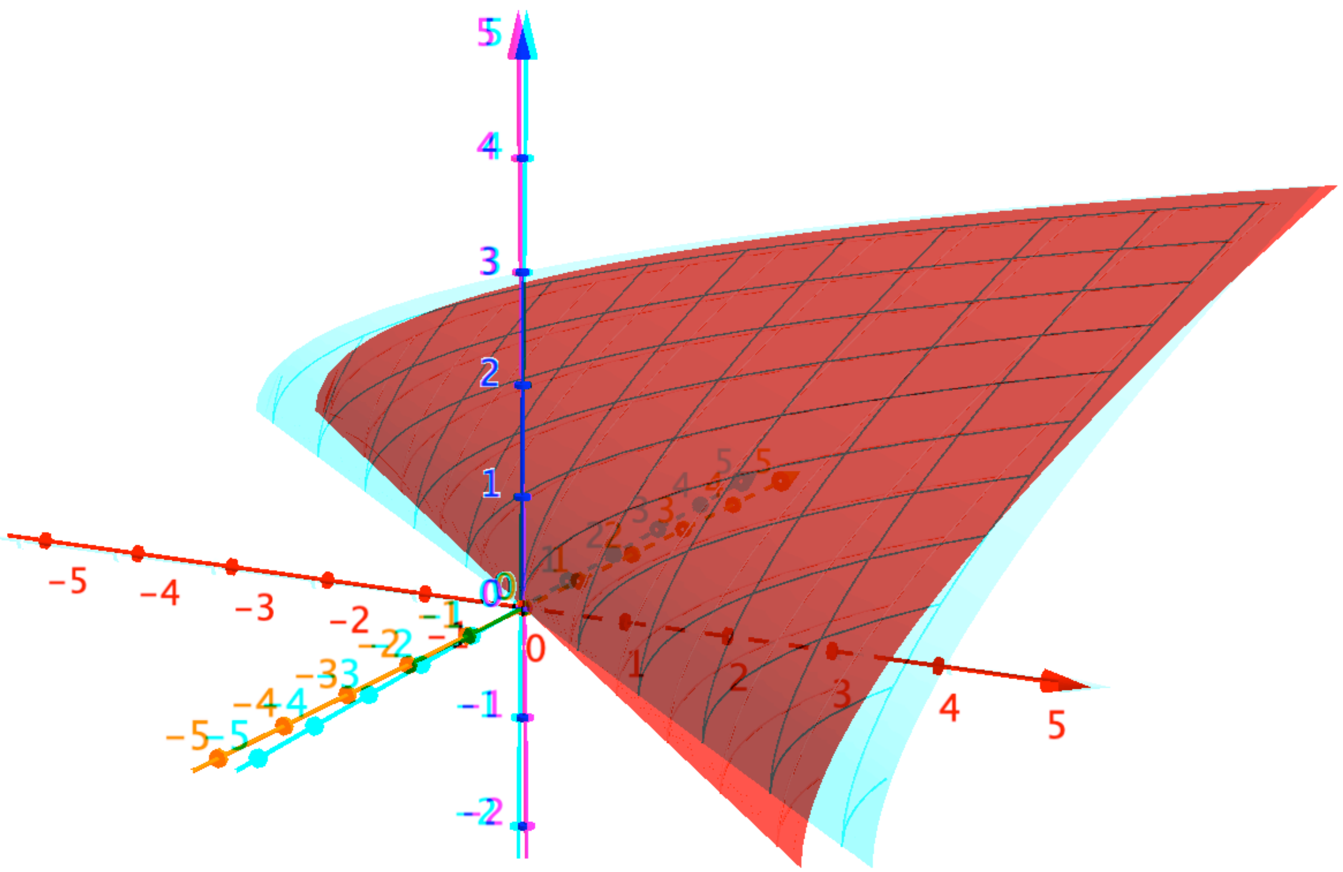
$$f(x, y) = z = \frac{2x - 3y + 5}{5}$$

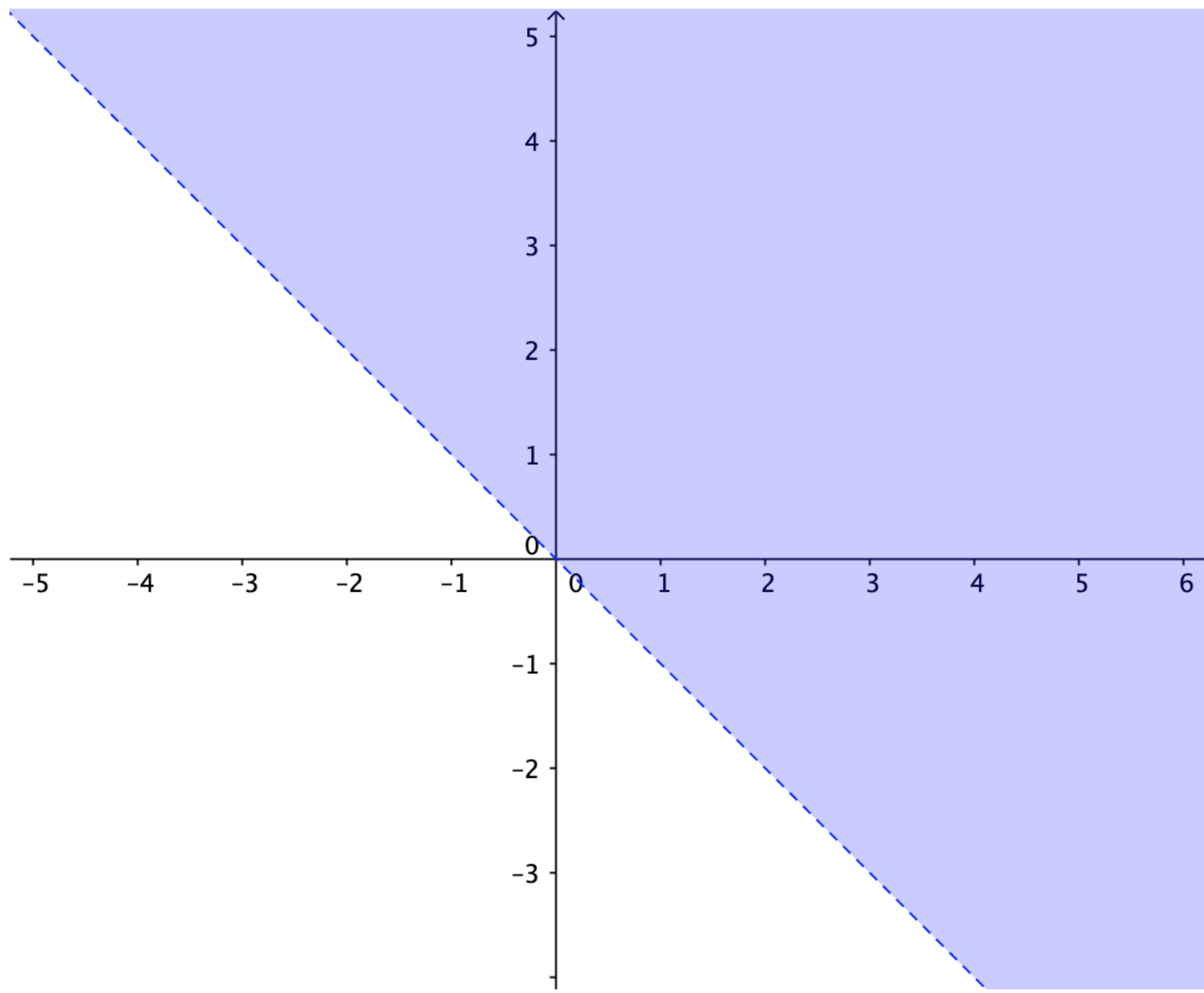


Exemple Trouver le domaine de $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

$$x+y>0$$

$$y>-x$$

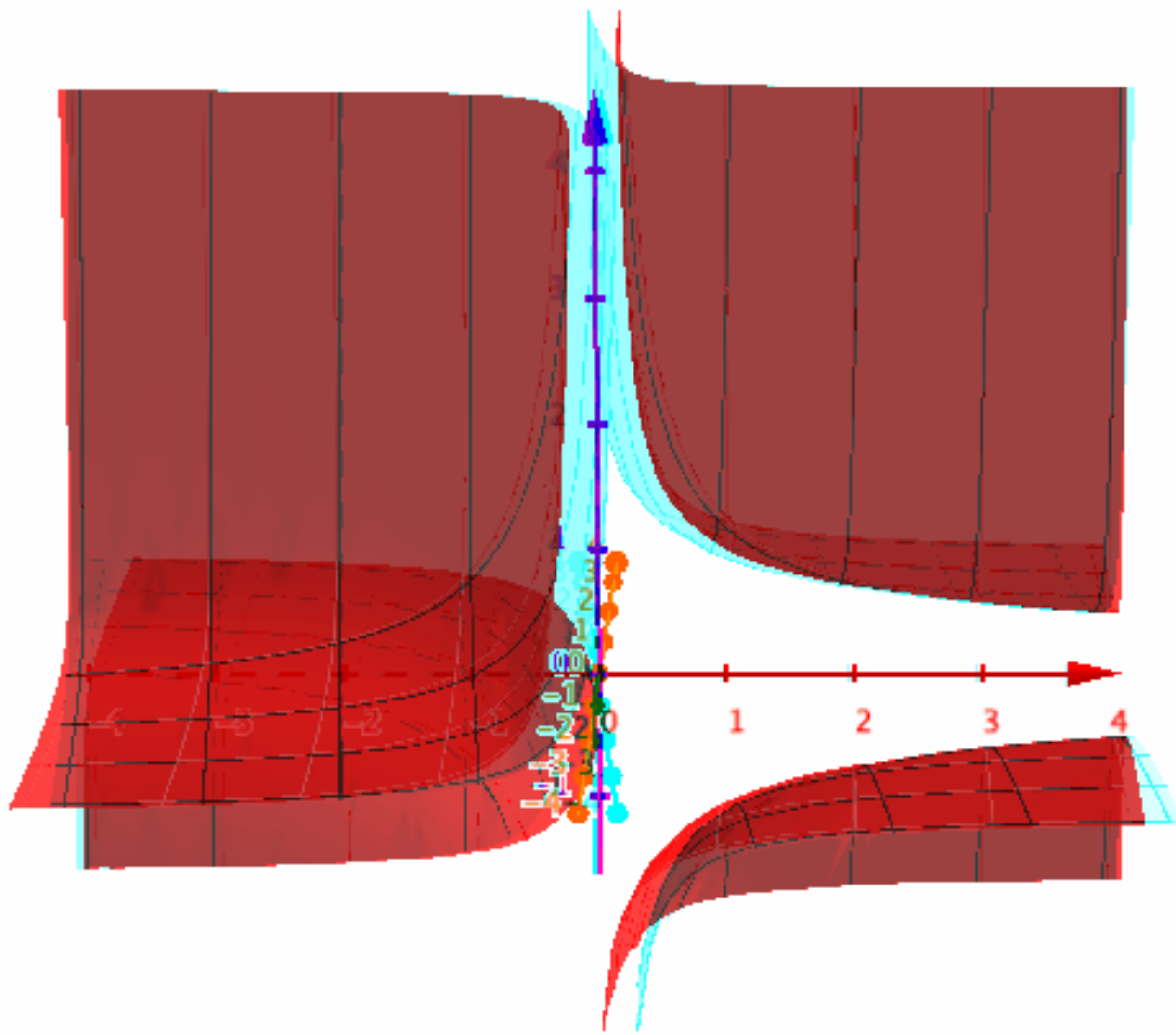




Exemple Trouver le domaine $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$

$$xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0$$

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0, y \neq 0\}$$



Faites les exercices suivants

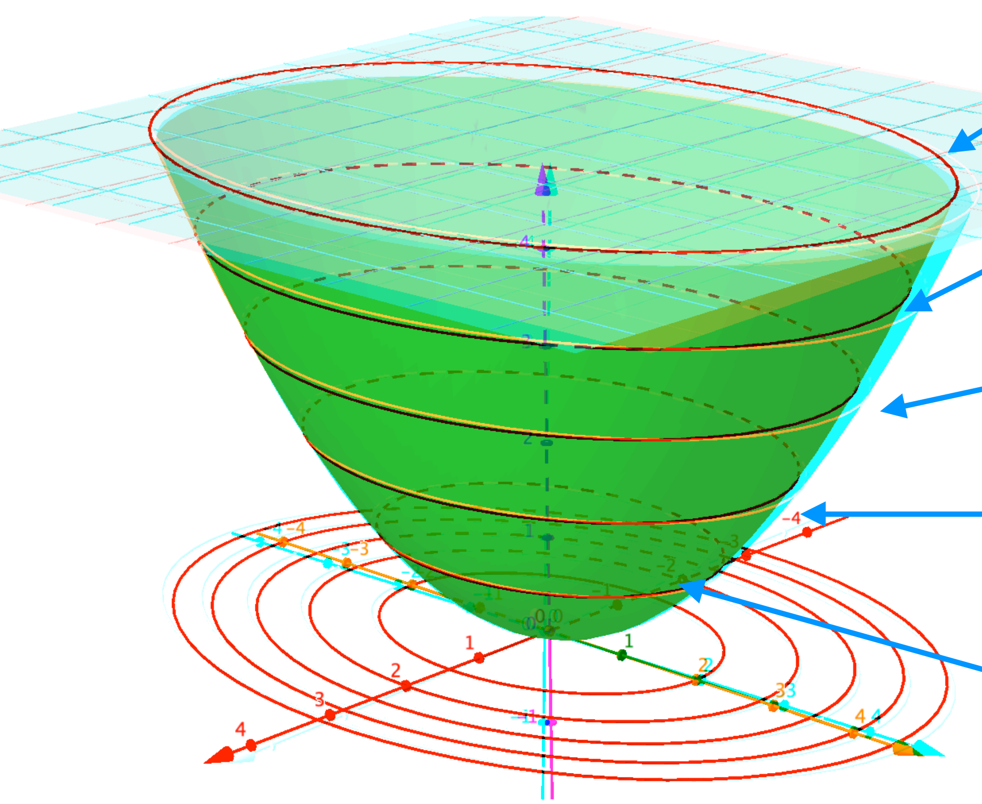
p.746 # 5 à 8

Courbes de niveaux.

Exemple

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$



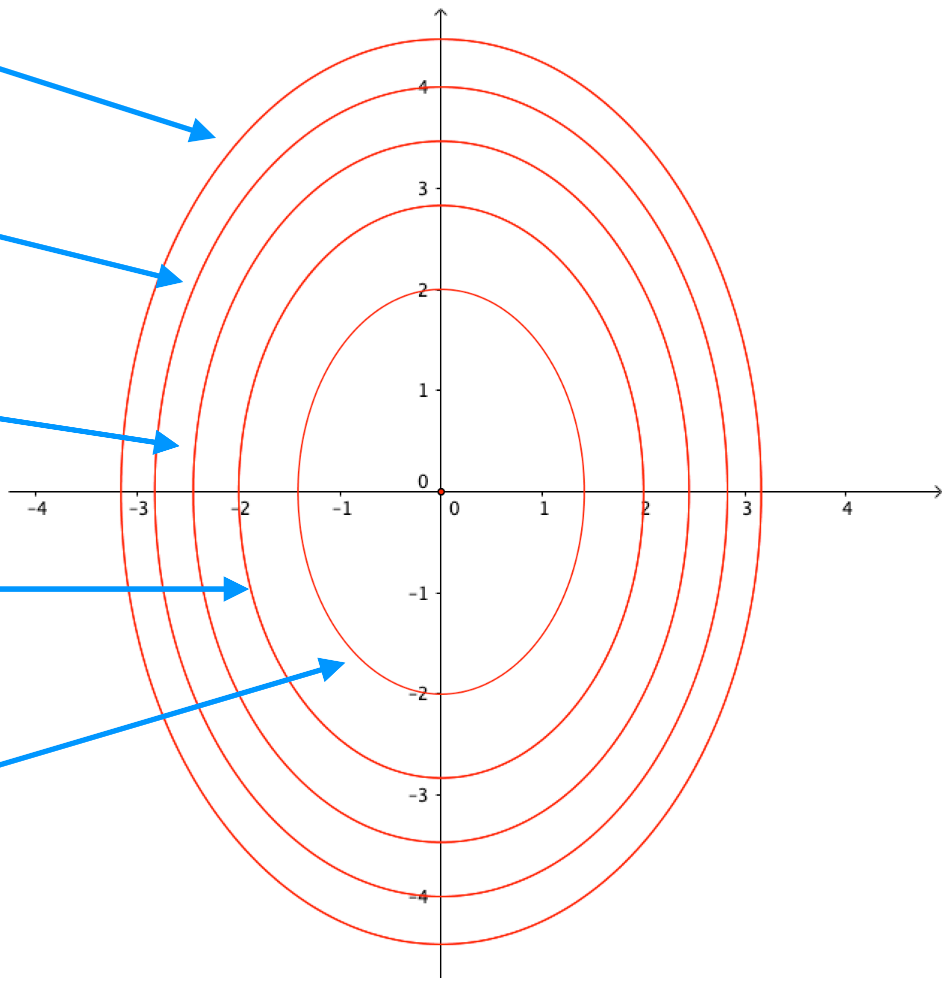
$z = 5$

$z = 4$

$z = 3$

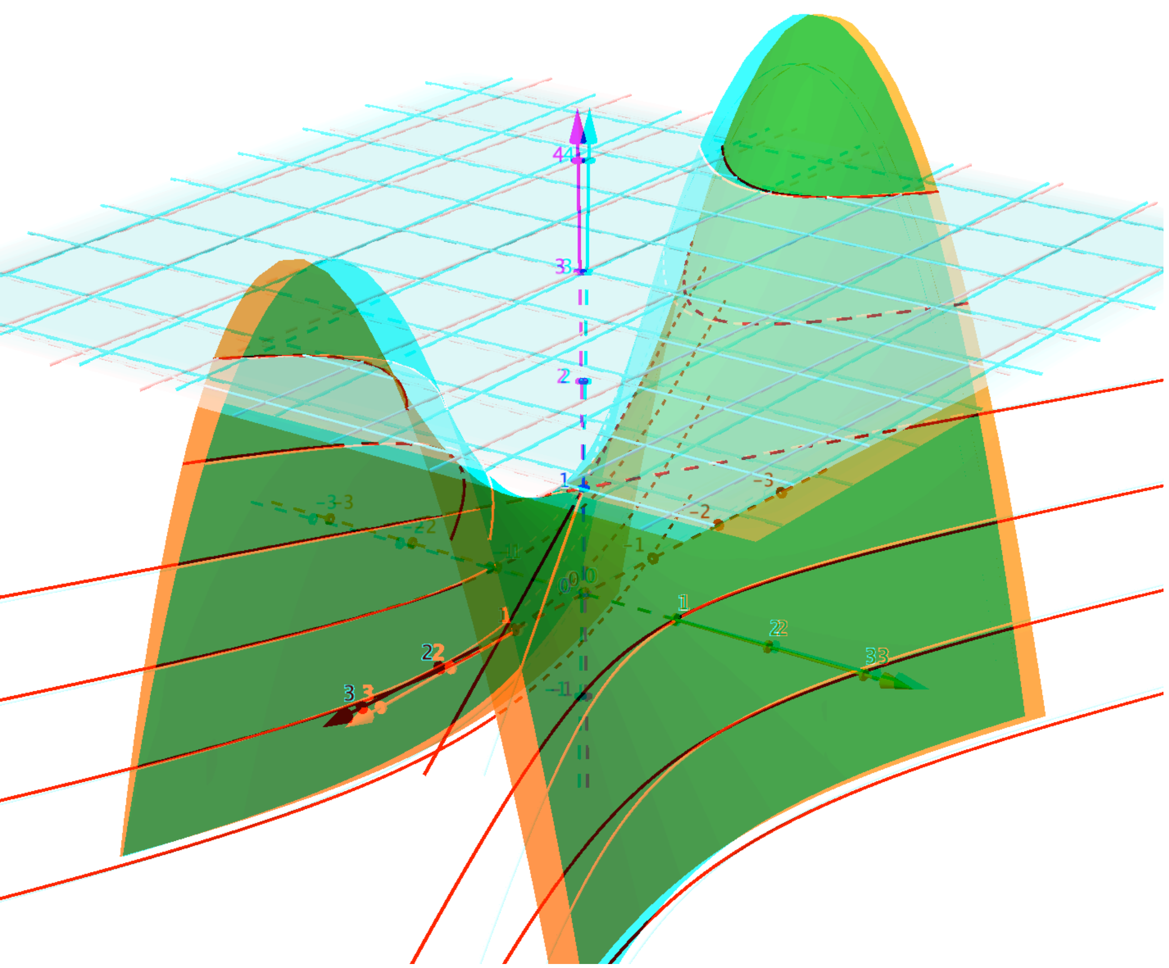
$z = 2$

$z = 1$



Exemple

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} - y^2 + 1$$



$z = 3$

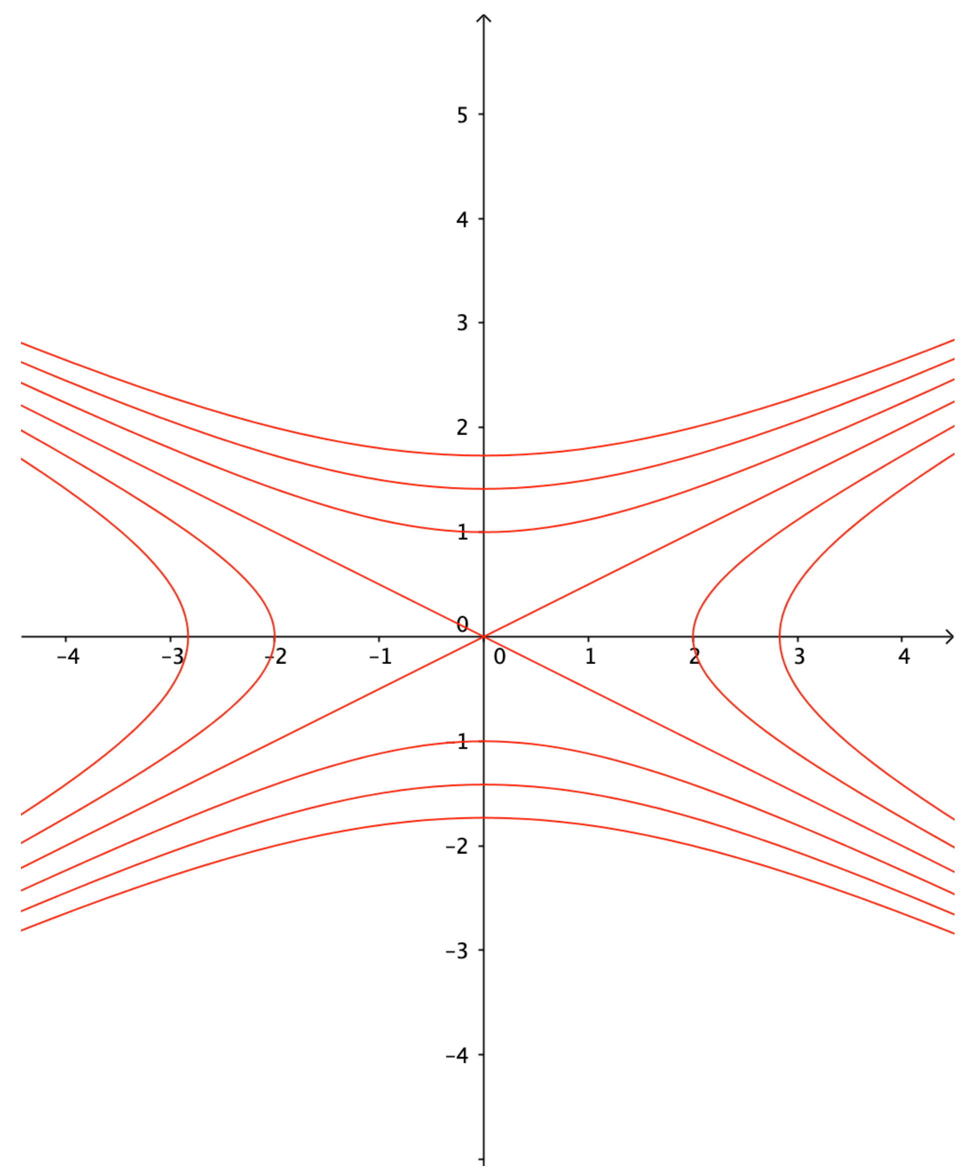
$z = 2$

$z = 1$

$z = 0$

$z = -1$

$z = -2$



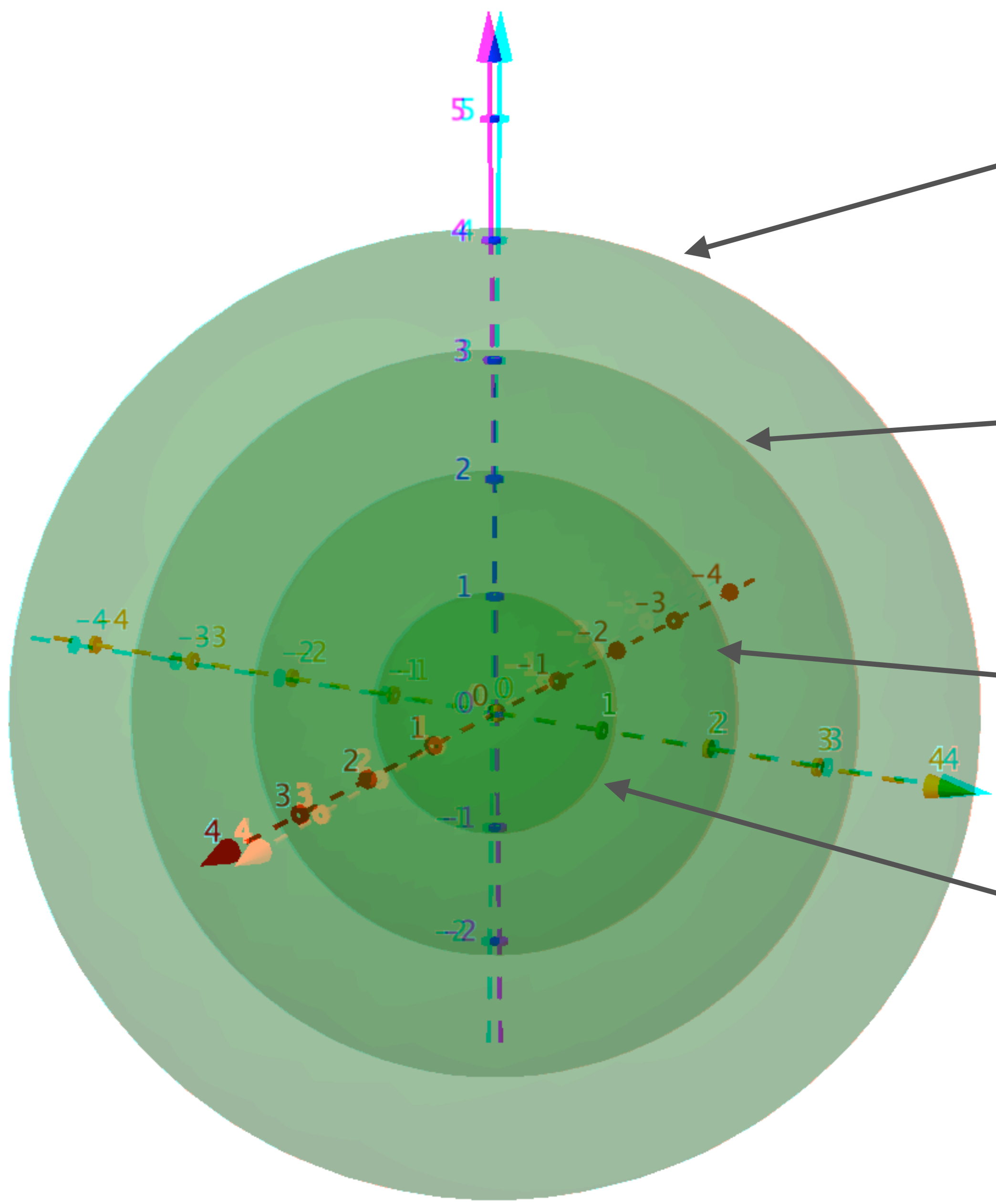
On peut aussi considérer de fonction à trois variables

$$f(x, y, z) = w$$

or le graphe d'une telle fonction est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$.

Par contre, on peut essayer de comprendre de telles fonctions en regardant ses surfaces de niveau.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$



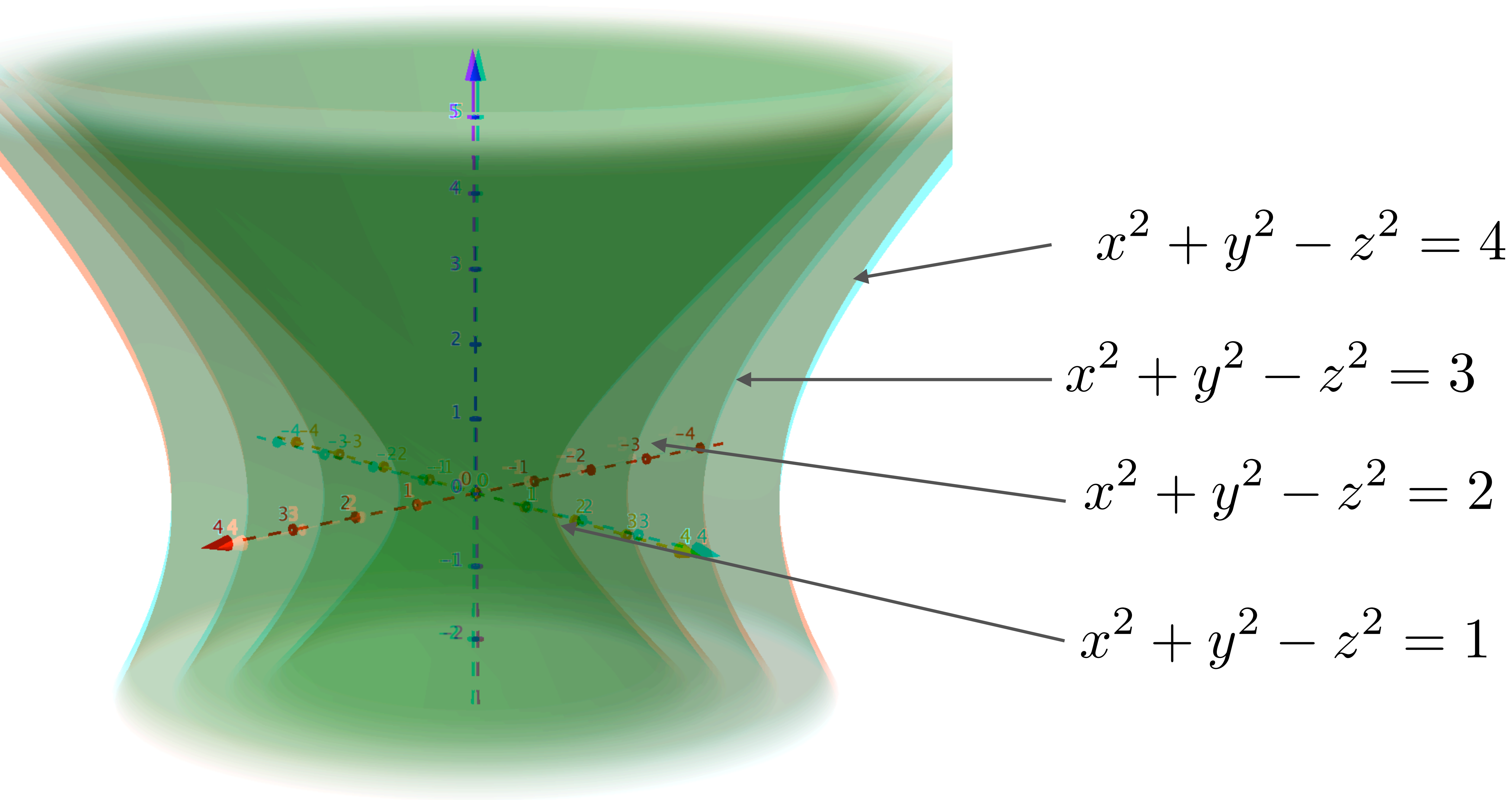
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$



Faites les exercices suivants

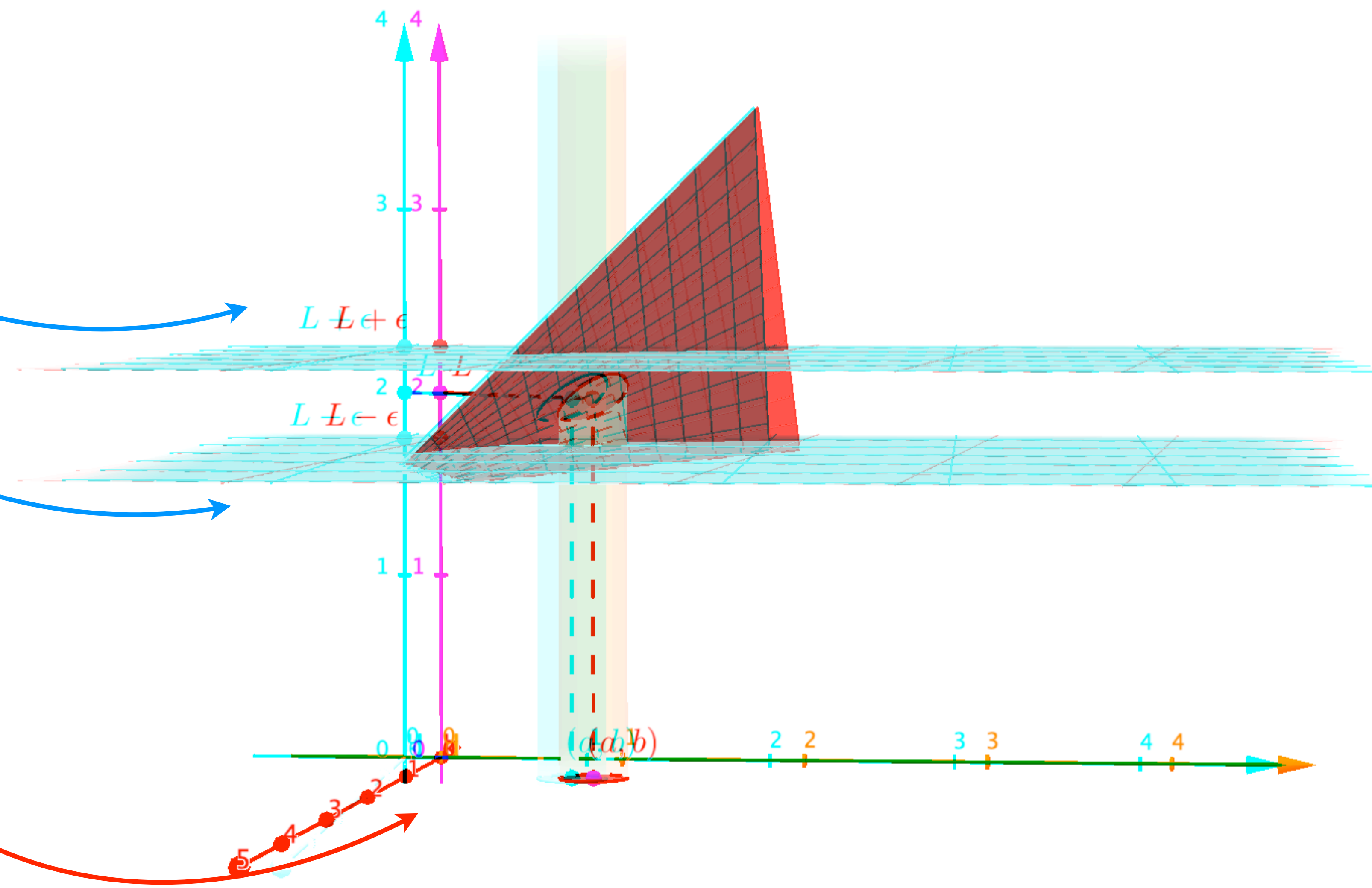
p. 746 # 9 à 20 et 35 à 40

Définition La limite d'une fonction à deux variables est

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

$\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y)-L| < \epsilon$

$$L-\epsilon < f(x,y) < L+\epsilon$$



Évaluer une limite en utilisant la définition n'est pas simple et dépasse le cadre de ce cours.

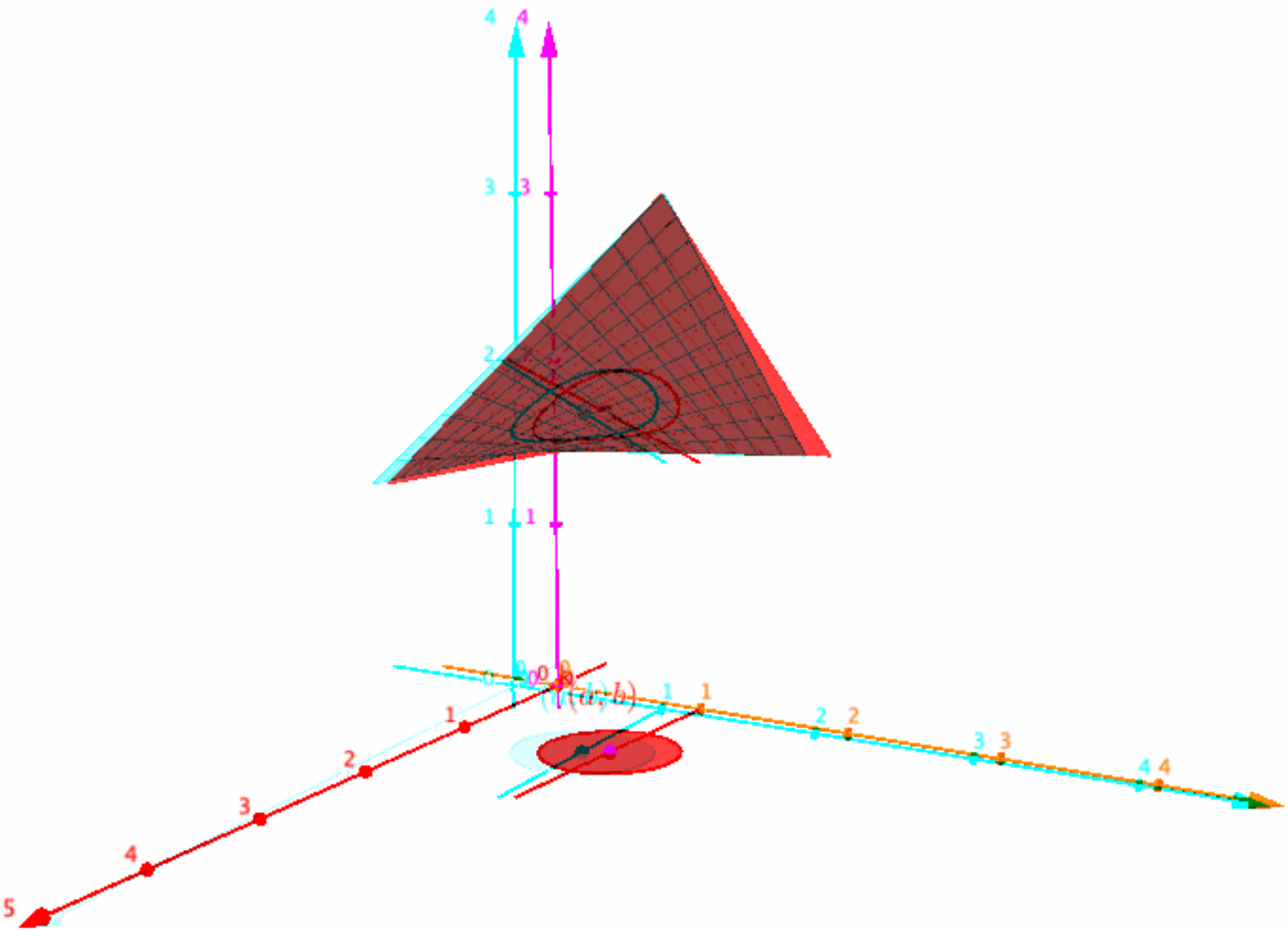
Évaluer les limites de fonction à plusieurs variable est plus compliqué que dans le cas des fonctions à une variable.

Pour une fonction à une variable, pour que la limite existe, il faut que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

En d'autres termes, il faut que le résultat soit le même, peu importe comment on s'approche de la valeur.

Mais pour une fonction à plusieurs variables, il n'y a pas que deux façons de s'approcher d'un point.



Exemple Évaluer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Si on s'approche de (0,0) en suivant la droite $y = x$

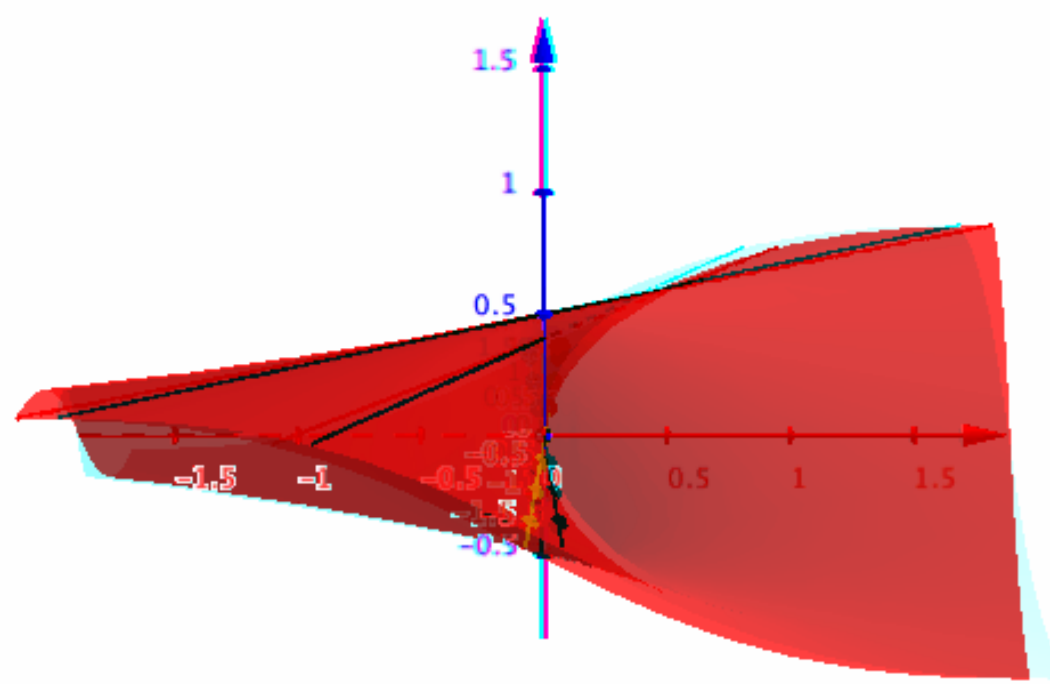
$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x)}{x^2+(x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Si on s'approche de (0,0) en suivant la droite $y = 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(2x)}{x^2+(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$$

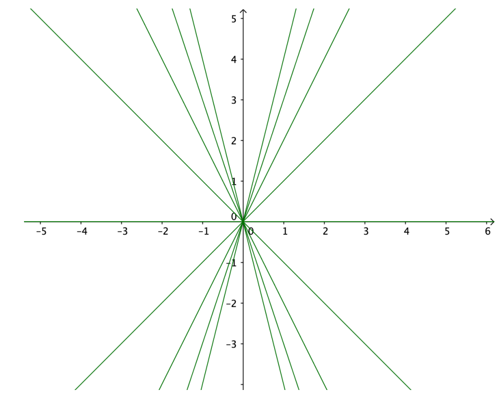
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \nexists$$



Exemple

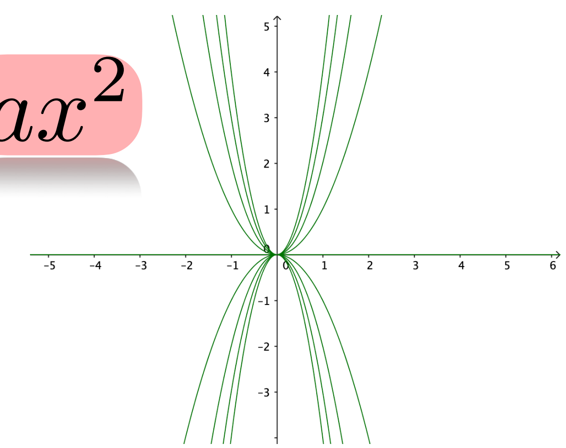
Évaluer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \stackrel{?}{=} 0$

Si on s'approche de (0,0) en suivant les droites $y = mx$



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = \frac{0}{0+m^2} = 0$$

Si on s'approche de (0,0) en suivant les paraboles $y = ax^2$



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(ax^2)}{x^4+(ax^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4+a^2x^4} = \frac{a}{1+a^2} \neq 0$$

si $a \neq 0$

Donc cette limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ n'existe pas.

Malheureusement, évaluer une limite en utilisant plusieurs chemins nous permet seulement de conclure qu'une limite n'existe pas.

Si l'on obtient toujours la même valeur pour une limite en utilisant plusieurs chemins alors on peut affirmer que si cette limite existe alors elle vaut cette valeur.

Pour être certain qu'une limite existe, il faut soit utiliser la définition ou un stratagème comme le théorème du sandwich.

Exemple

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} 0$$

Si on s'approche de (0,0) en suivant les droites $y = ax$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2(ax)}{x^2+(ax)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3ax^3}{x^2(1+a^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3ax}{1+a^2} = 0$$

Si on s'approche de (0,0) en suivant les paraboles $y = ax^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2(ax^2)}{x^2+(ax^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3ax^4}{x^2(1+a^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3ax^2}{1+a^2x^2} = 0$$

Exemple

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 0 \qquad \text{Donc oui!}$$

$$|f(x,y)-L| = \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2}$$

$$x^2 \leq x^2+y^2 \qquad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y|$$

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0$$

Faites les exercices suivants

p. 755 # 5 à 20

Définition

On dit qu'une fonction $f(x,y)$ est continue en (a,b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

On dit qu'une fonction $f(x,y)$ est continue sur $D \subset \mathbb{R}^2$

si elle est continue pour tout point $(a,b) \in D$.

Remarque:

Nous accepterons sans preuve que toutes les fonctions $f(x,y)$

qui n'est pas défini par morceaux et qui est construit à l'aide des fonctions de bases

$$+, -, \times, \div, ^n, \sin, \ln, \dots$$

sont continue sur leur domaine.

Faites les exercices suivants

p. 755 # 27 à 34

Aujourd'hui, nous avons vu

- Fonctions à plusieurs variables
- Les courbes de niveau
- Limite de fonction à deux variables
- Continuité

Devoir:

p.746 # 5 à 26 et 35 à 44

p.755 # 5 à 20 et 27 à 34