2.3 PLAN TANGENT ET DÉRIVÉE DE COMPOSITION

COMPOSITION

cours 11

Au dernier cours, nous avons vu

- Dérivées partielles.
- Dérivées partielles d'ordre supérieur.
- Équations aux dérivées partielles.

Aujourd’hui, nous allons voir

- Plan tangent.
- Approximation du premier degré.
- Différentielle.
- Dérivées de compositions.

On a déjà remarqué qu'on pouvait voir une fonction à une variable

$$y = f(x)$$

comme une fonction vectorielle de paramètre x

$$\vec{r}(x) = (x, f(x))$$

De la même manière, on peut voir une fonction à deux variables

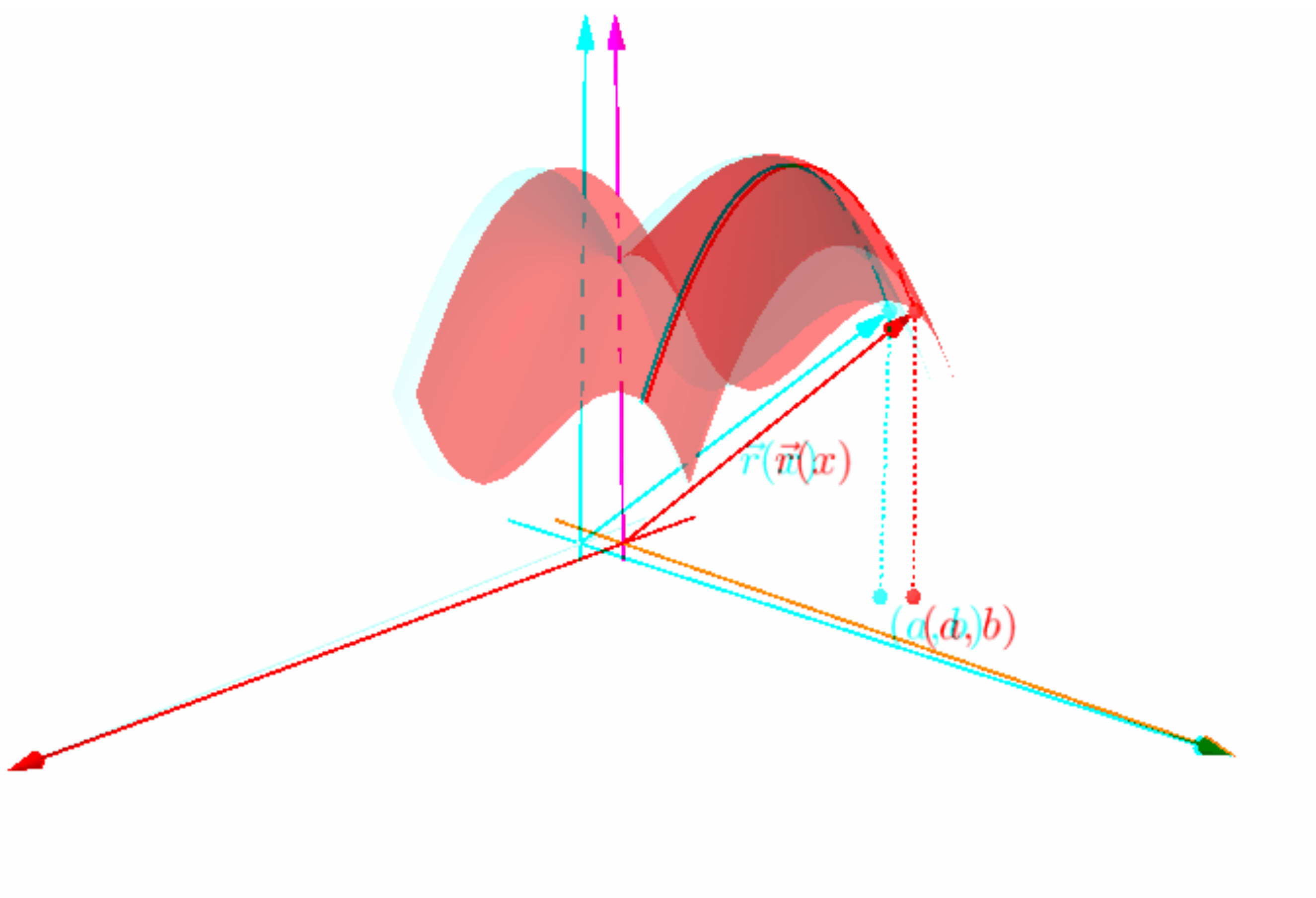
$$z = f(x, y)$$

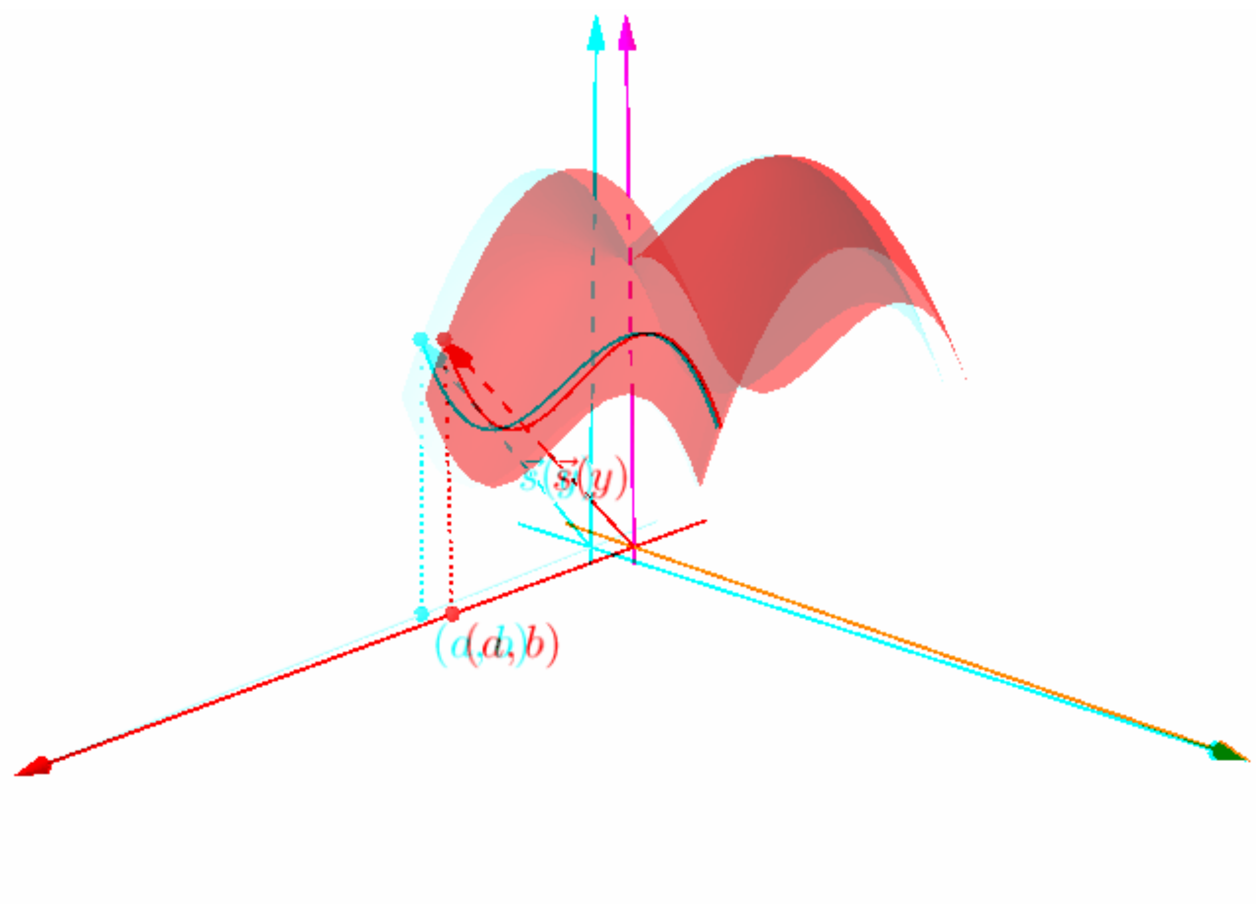
comme une fonction vectorielle de paramètre x et y

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Un des avantages de les voir comme ça est qu'on obtient aisément la courbe d'intersection entre la surface et les plans $x = k$, et $y = k$.

$$\vec{F}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$





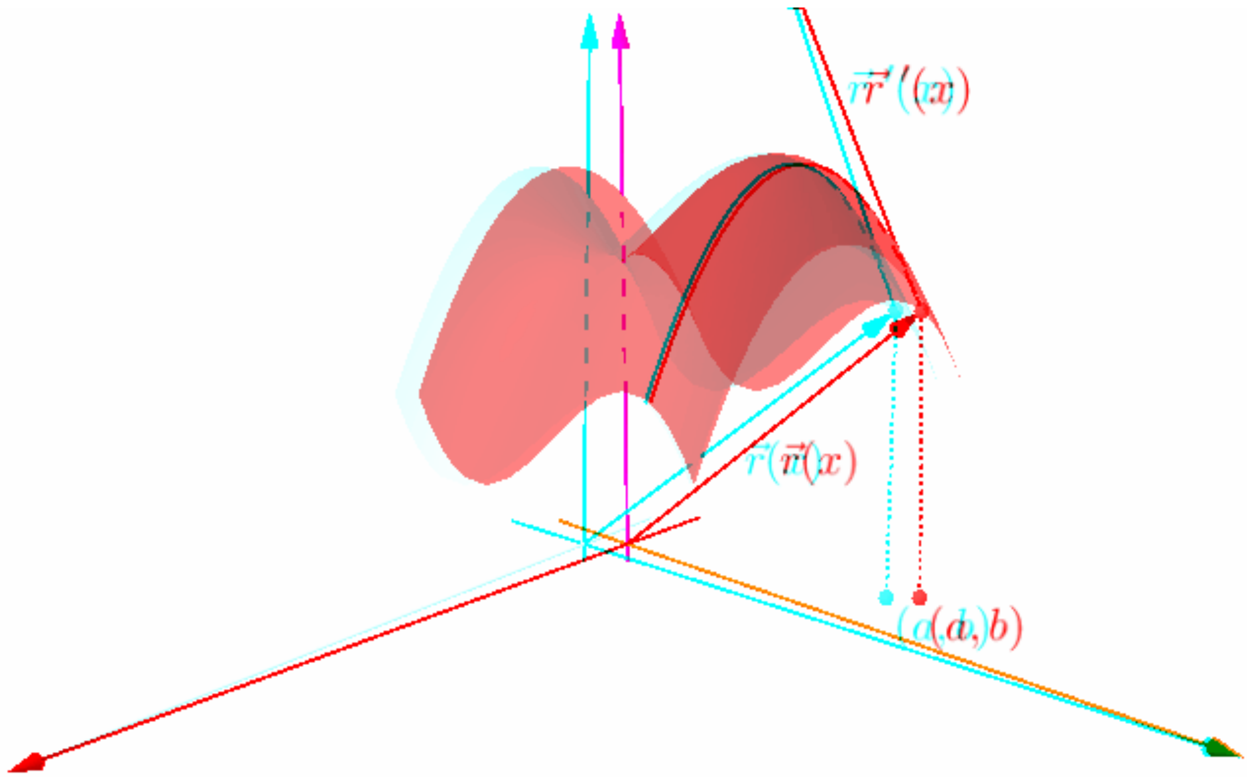
$$\vec{r}(x) = (x, k, f(x, k))$$

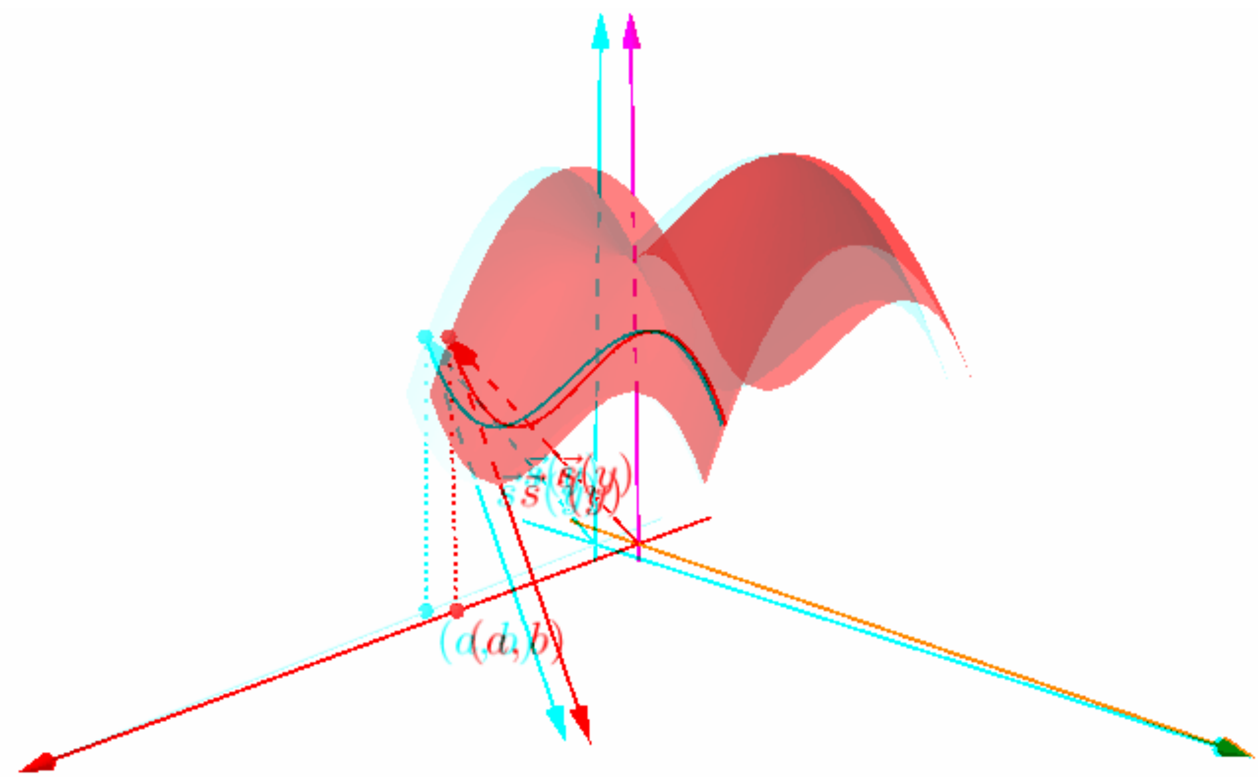
$$= \vec{F}(x, k)$$

$$\vec{s}(y) = (k, y, f(k, y))$$

$$= \vec{F}(k, y)$$

En dérivant ces fonctions vectorielles, on trouve les vecteurs tangents aux courbes





$$\vec{r}(x) = (x, k, f(x, k))$$

$$\vec{s}(y) = (k, y, f(k, y))$$

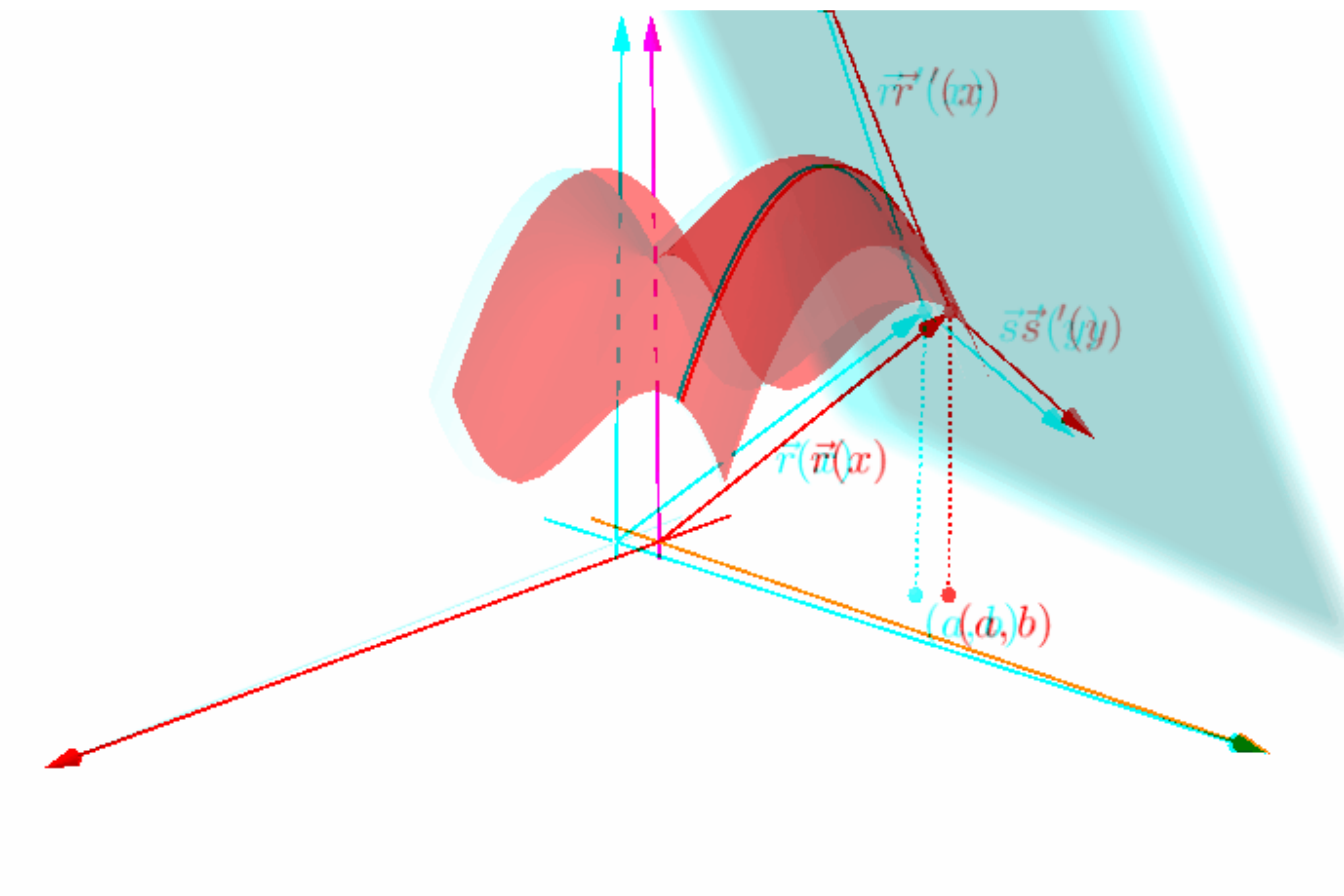
$$\vec{r}\,'(x) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

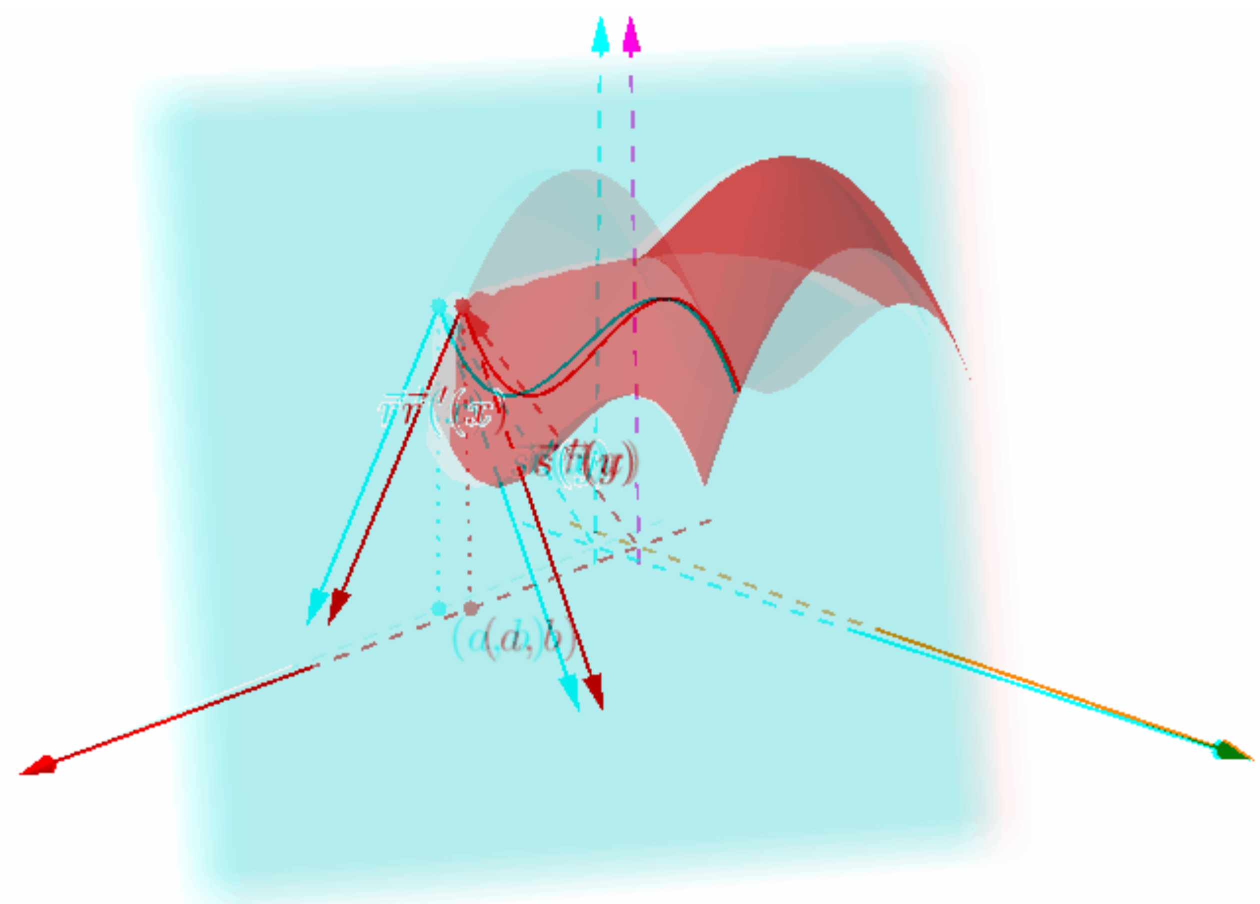
$$\vec{s}\,'(x) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ces deux vecteurs sont donc tangents à la surface au point

$$(a, b, f(a, b)) = \vec{OP}$$

Ce qui nous permet de trouver le plan tangent à la surface.





$$\vec r\,'(x) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \vec d_1$$

$$\vec s\,'(x) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \vec d_2$$

$$(a, b, f(a, b)) \qquad \vec{r}\,'(x) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \vec{s}\,'(x) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

D'où l'équation vectorielle du plan tangent à la surface est

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + t\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) + r\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \left(a + t, b + r, f(a, b) + t\frac{\partial f}{\partial x} + r\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right) + r\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Si l'on veut l'équation normale du plan

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-f(a,b) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + z - f(a,b) = 0$$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b)$$

Exemple Trouver l'équation du plan tangent à

$$f(x, y) = x^2 e^y \quad \text{en} \quad (x, y) = (1, 1)$$

$$f(1, 1) = e \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2e \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = e$$

$$z = e + 2e(x - 1) + e(y - 1)$$

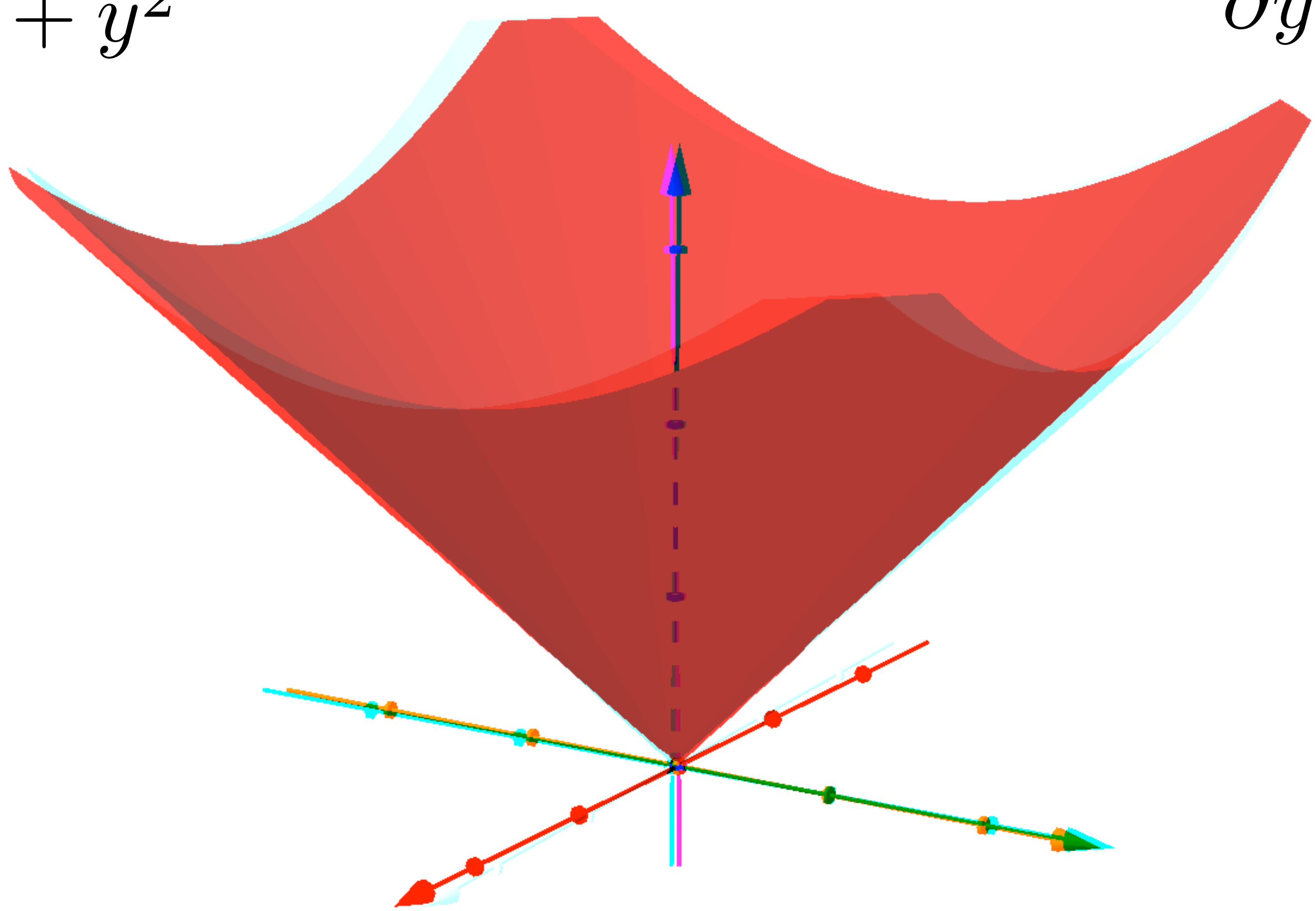
Exemple

Parfois on ne peut pas trouver le plan tangent

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad\qquad f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} \nexists \qquad\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} \nexists$$

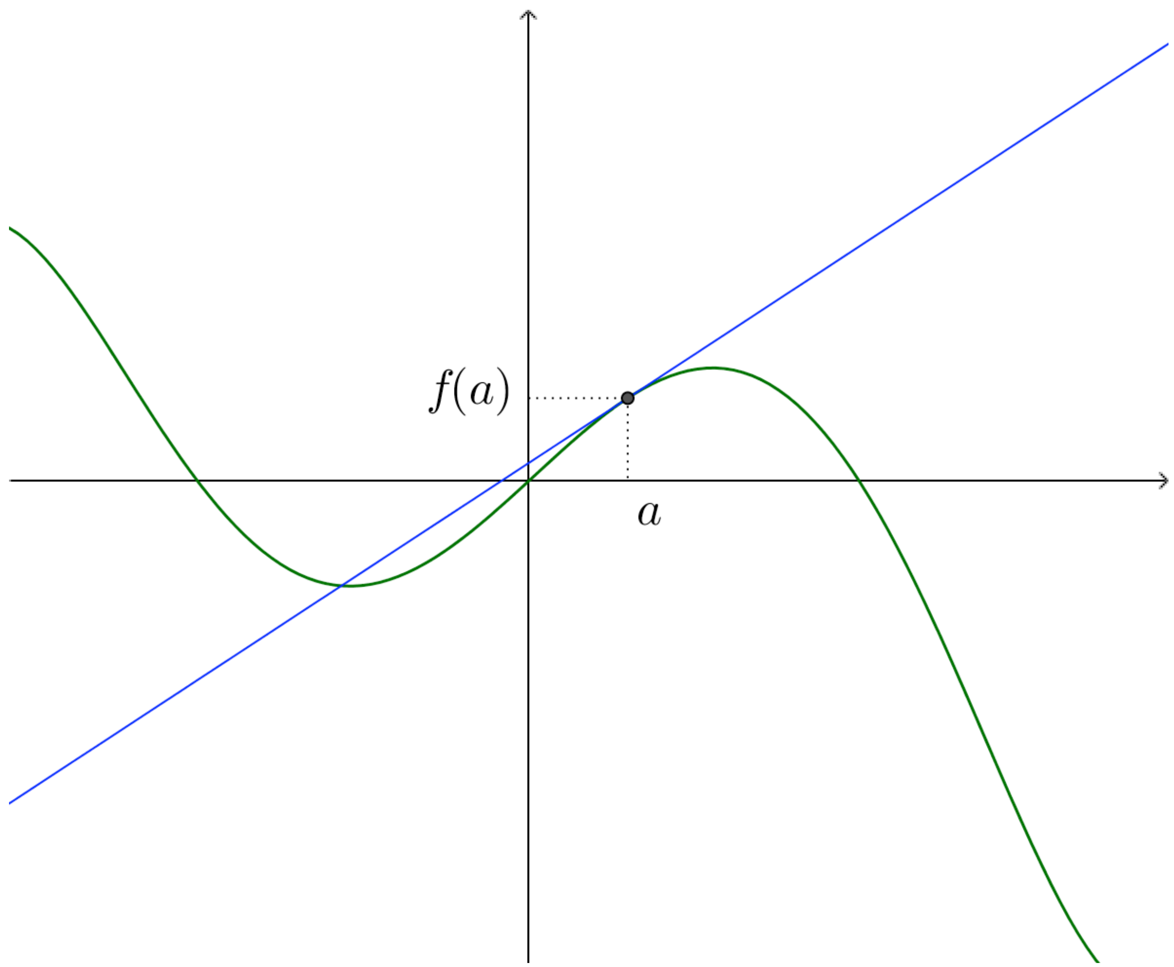


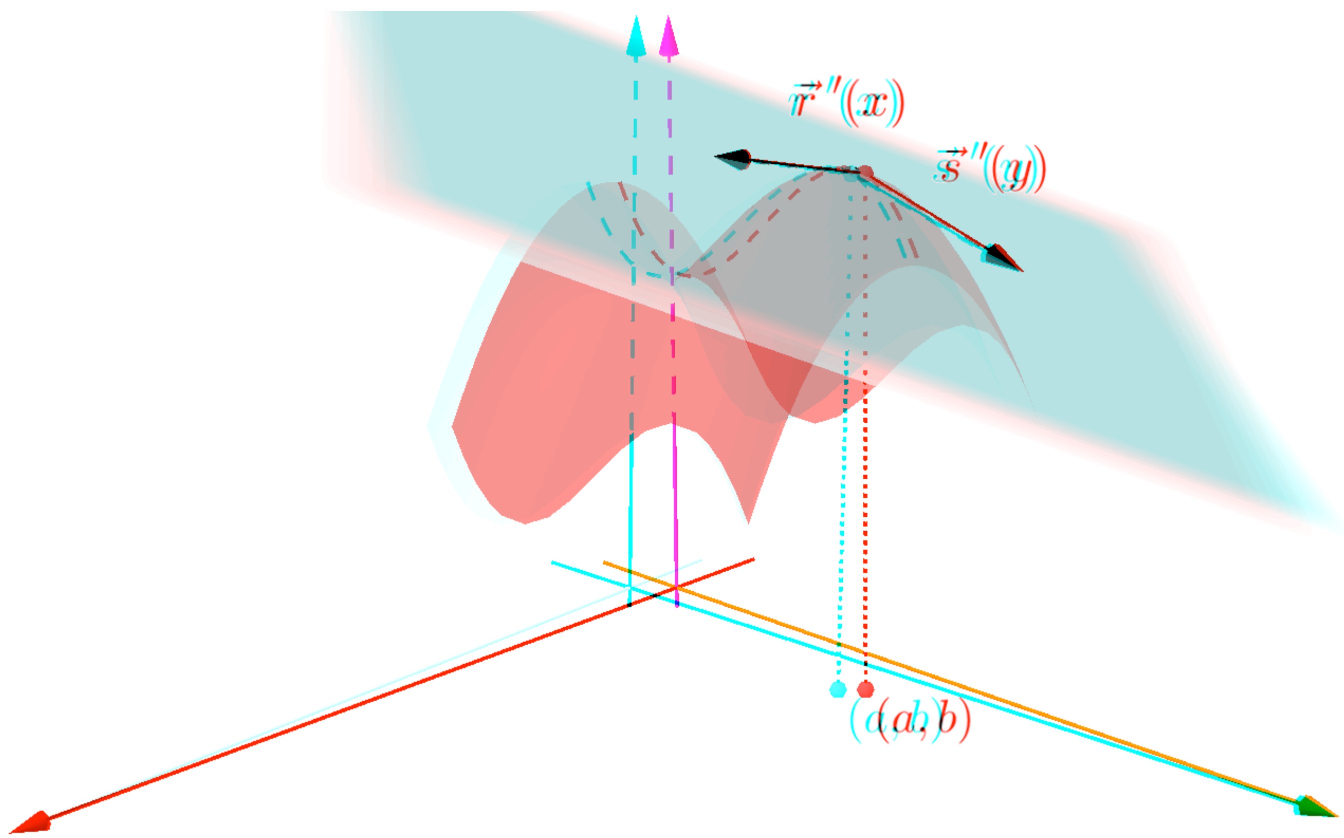
Cette fonction n'est pas dérivable en (0,0).

Faites les exercices suivants

p. 778 # 1, 3 et 5

Prenons un instant pour remarquer la similitude avec l'équation de la droite tangente à une fonction à une variable



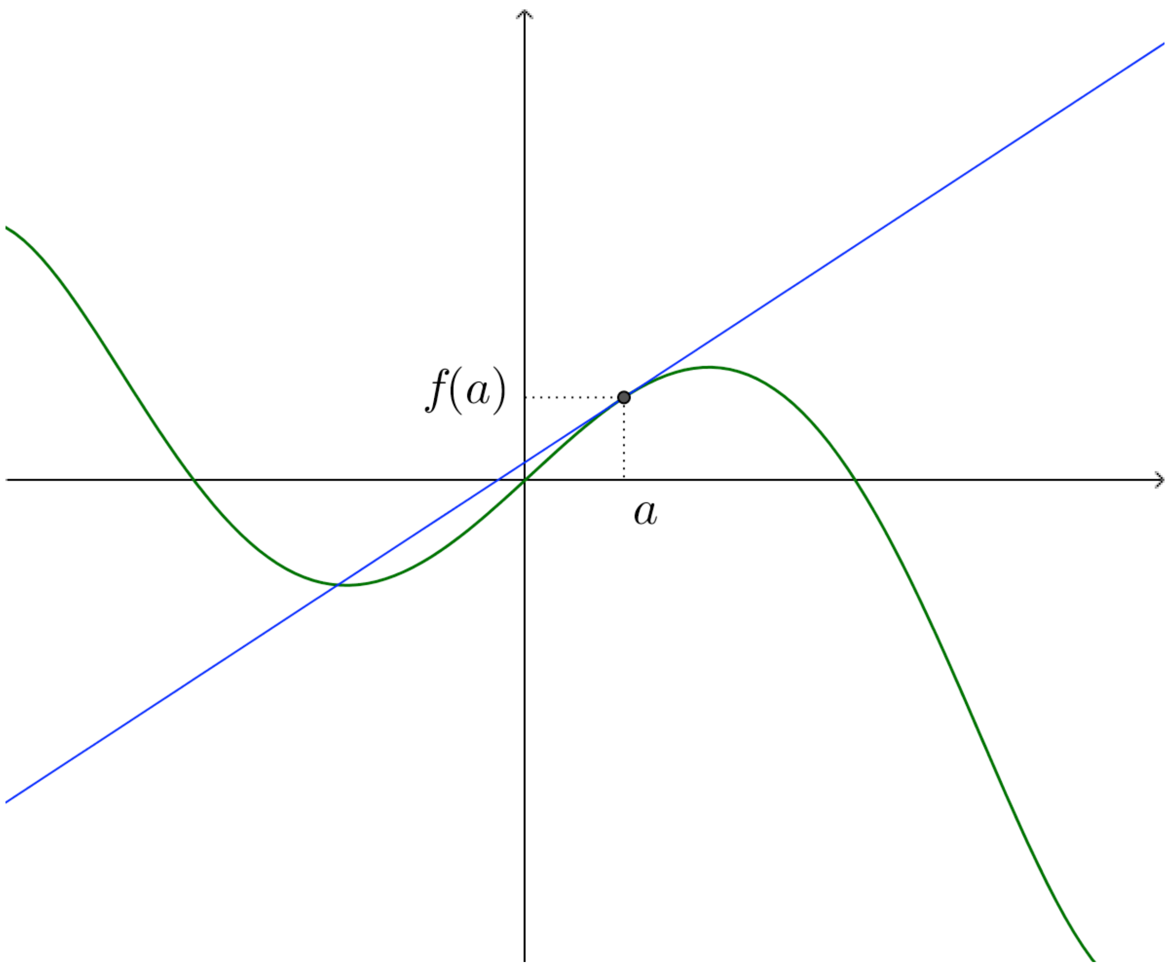


$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b)$$

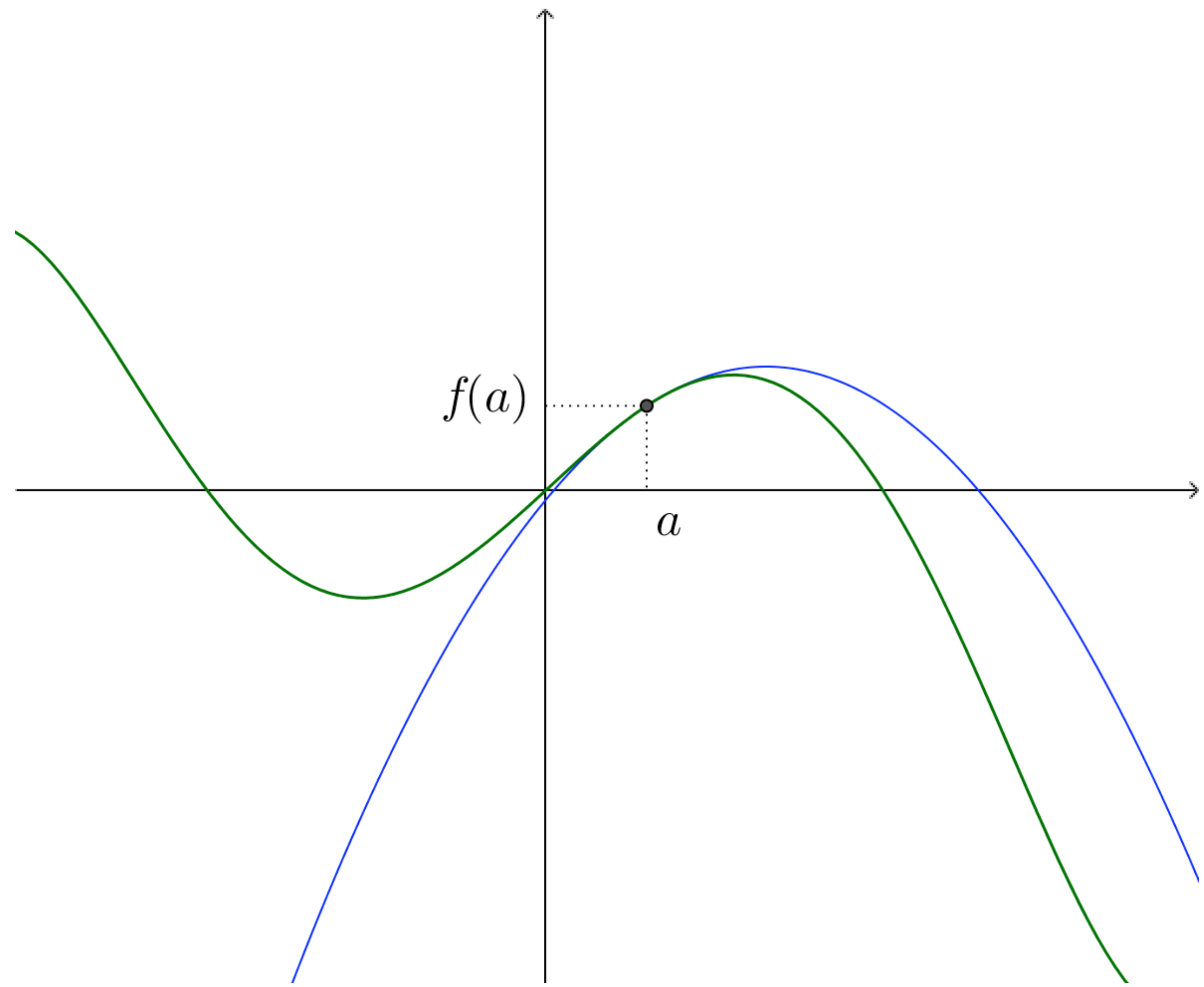
On parle parfois de l'approximation du premier degré.

Et si vous vous rappelez des polynômes de Taylor



$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Degré 1

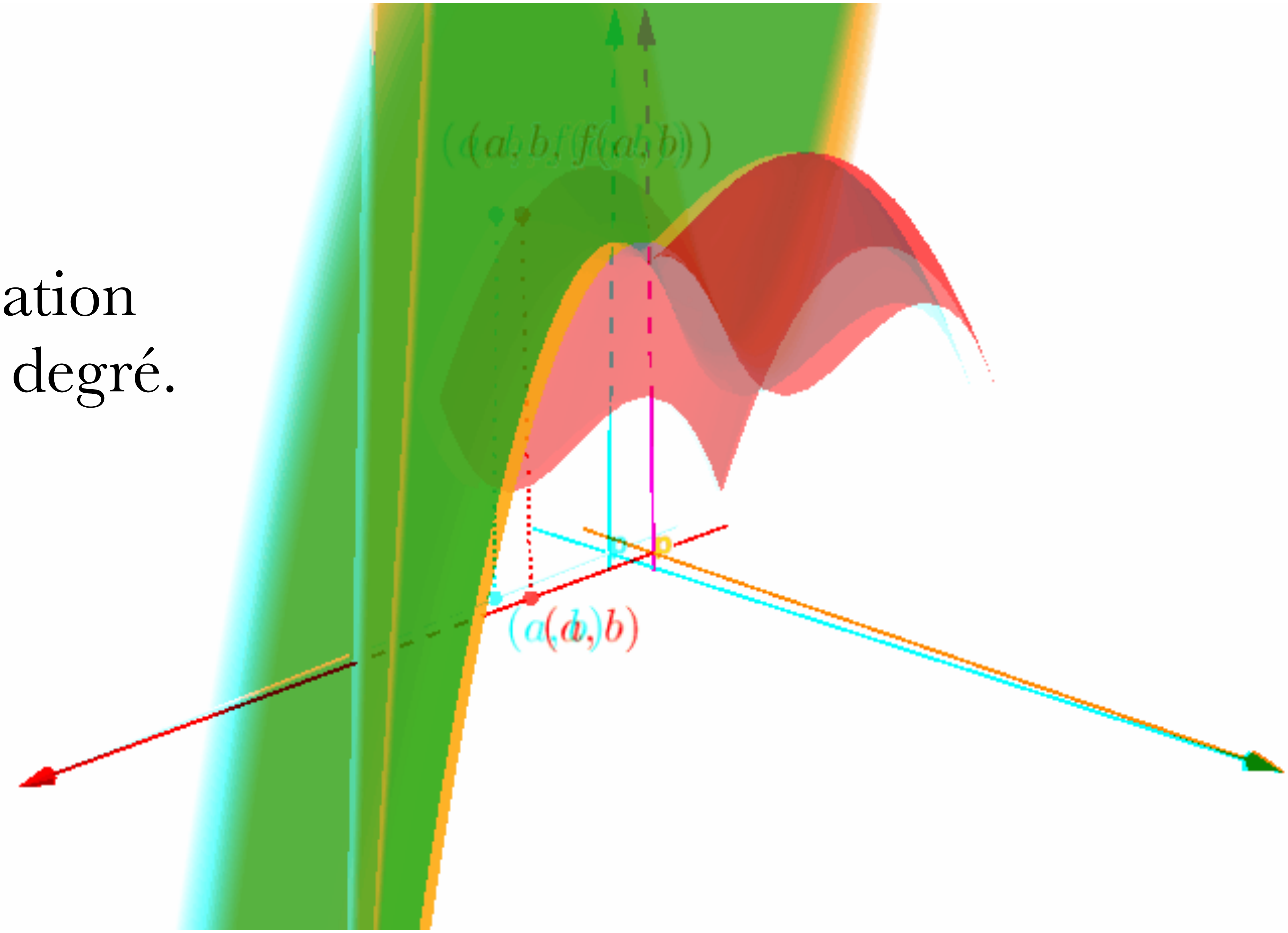


Degré 2

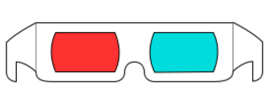
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}$$

Ici, je ne fais que piquer votre curiosité, mais on peut généraliser les polynômes de Taylor à des fonctions à deux variables.

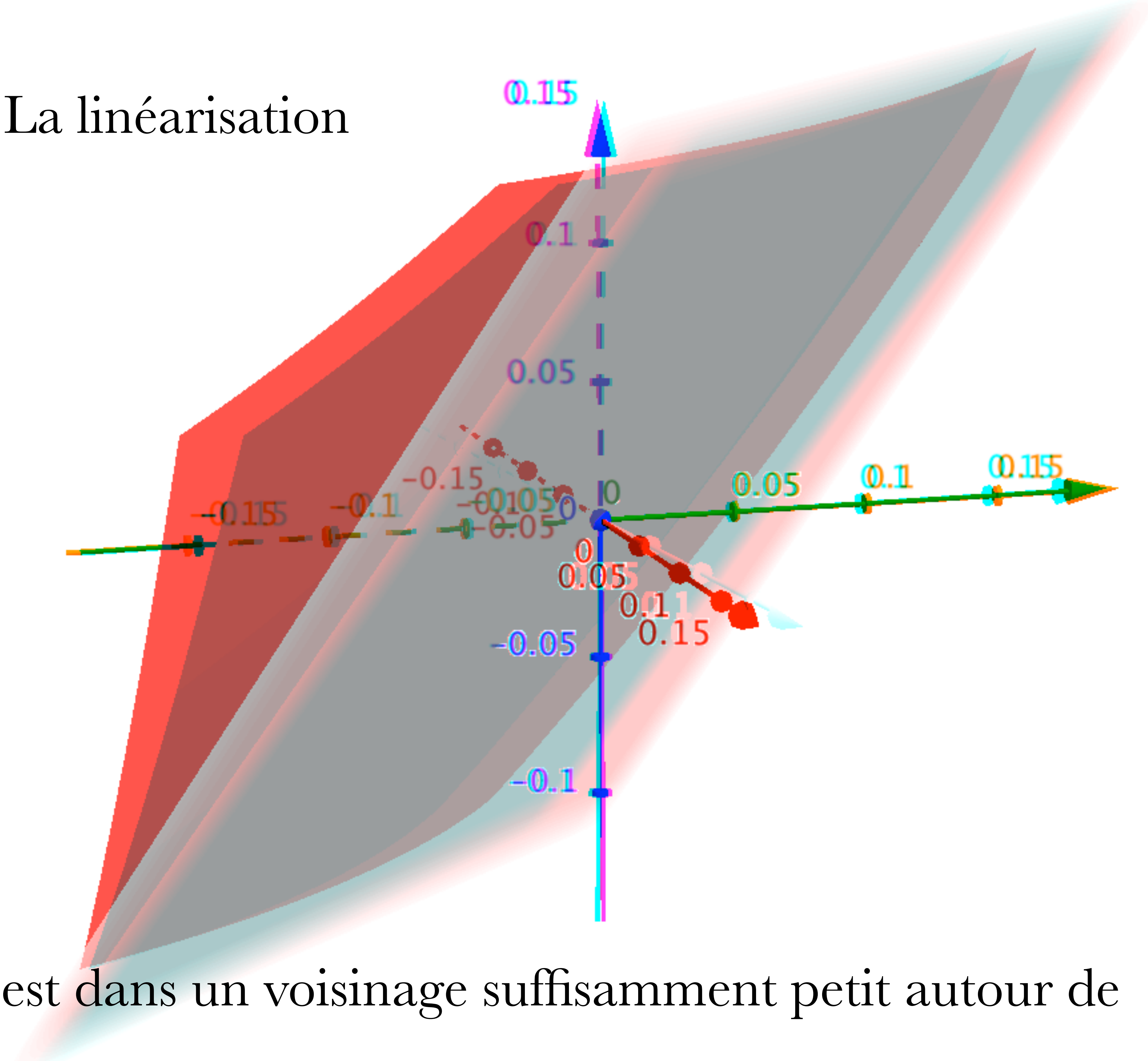
L'approximation du deuxième degré.



$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{(x-a)(y-b)}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{(y-b)^2}{2}$$



La linéarisation



Si on est dans un voisinage suffisamment petit autour de (a, b)

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = L(x,y)$$

Faites les exercices suivants

p. 778 # 11 et 13

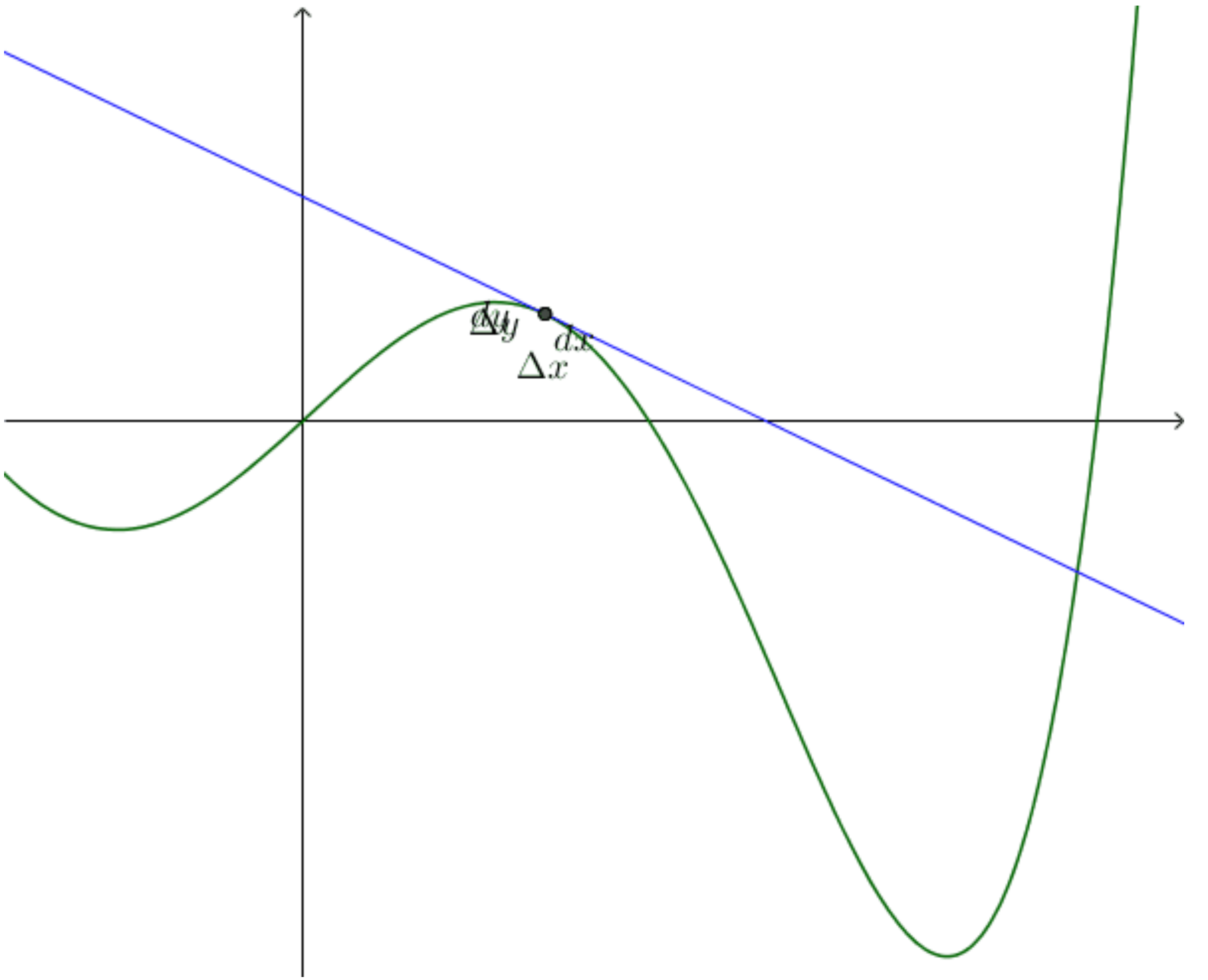
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

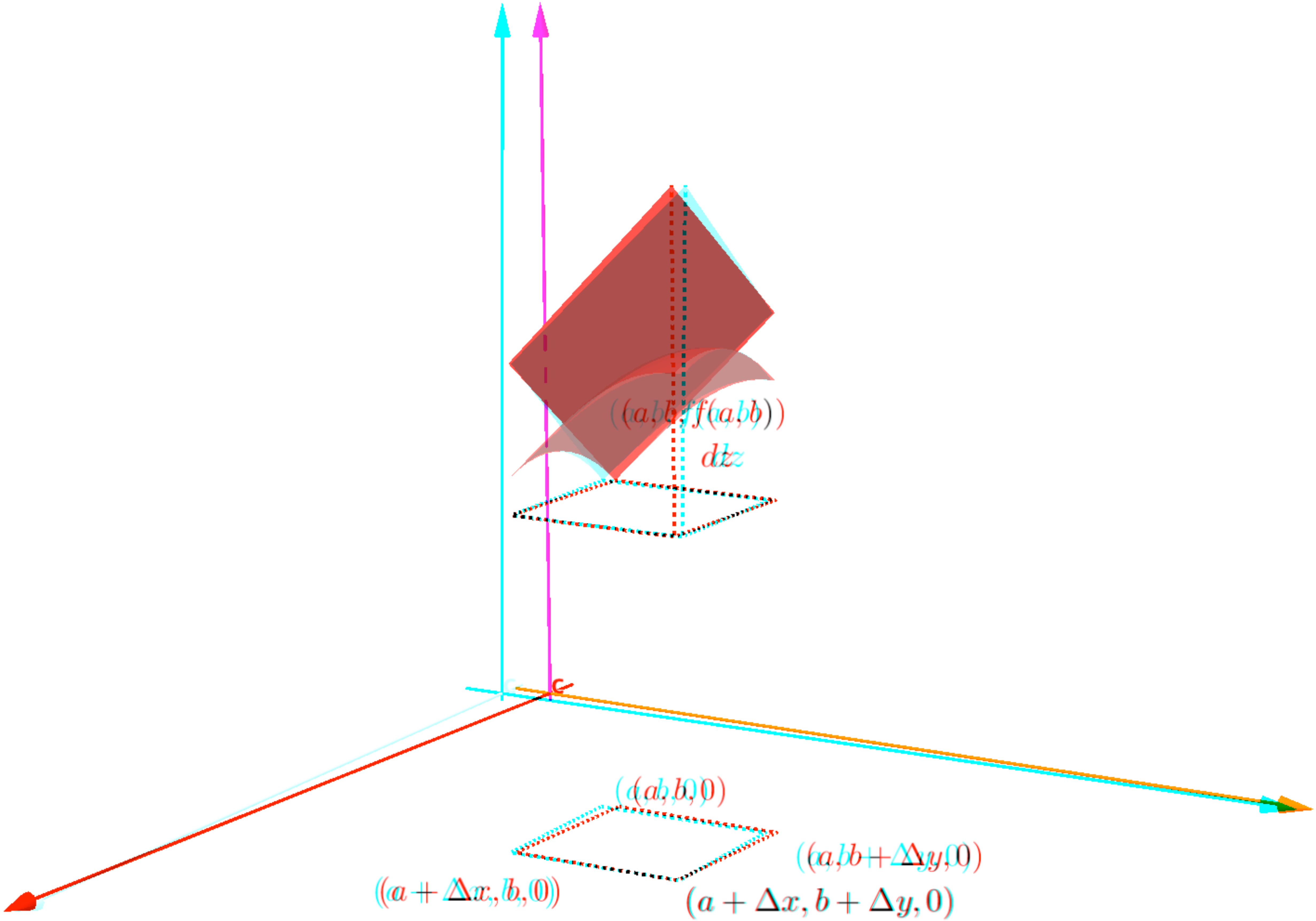
$$\Delta y = m\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x)dx$$

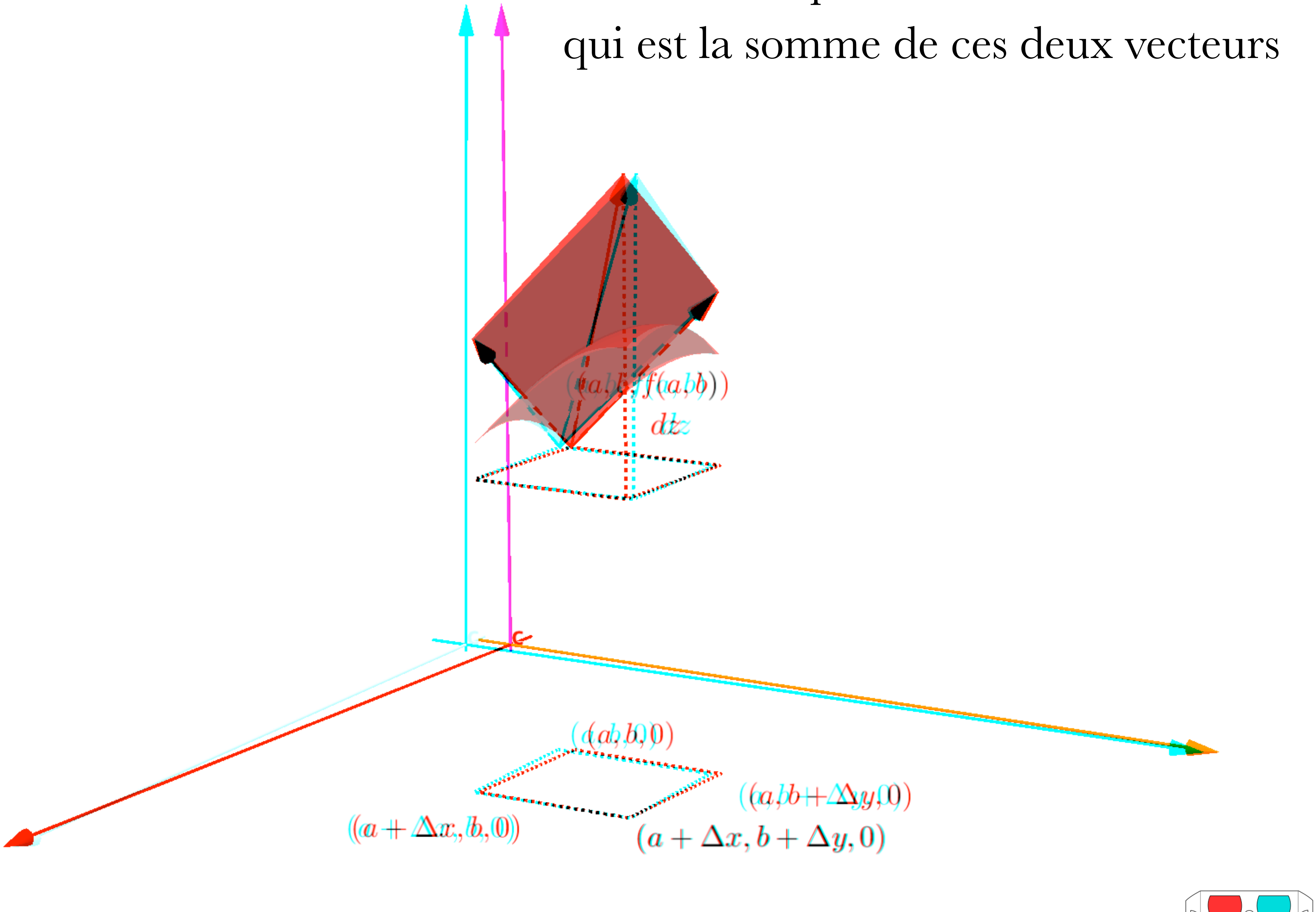


La différentielle dz

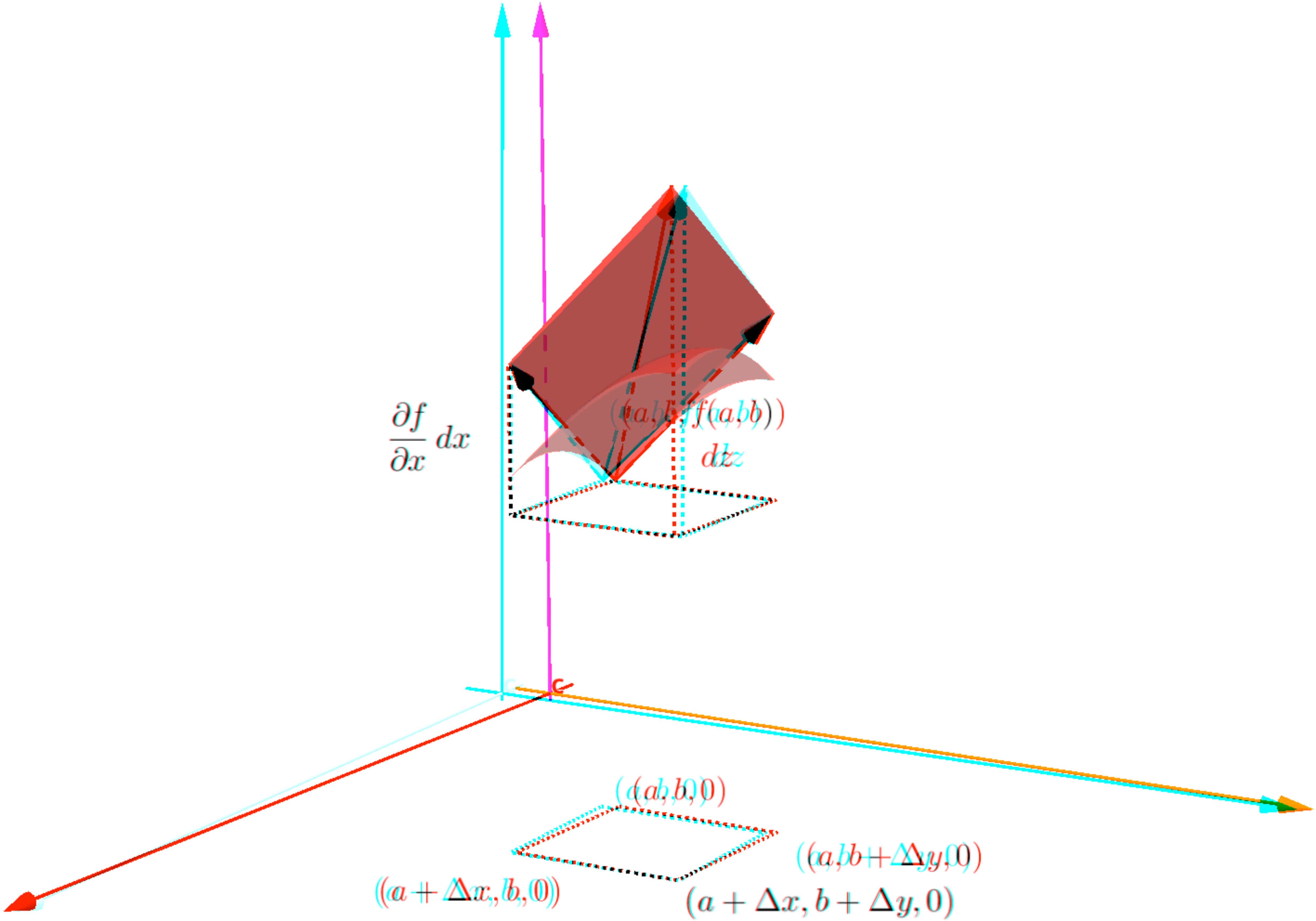


La différentielle dz est la troisième composante de ce vecteur

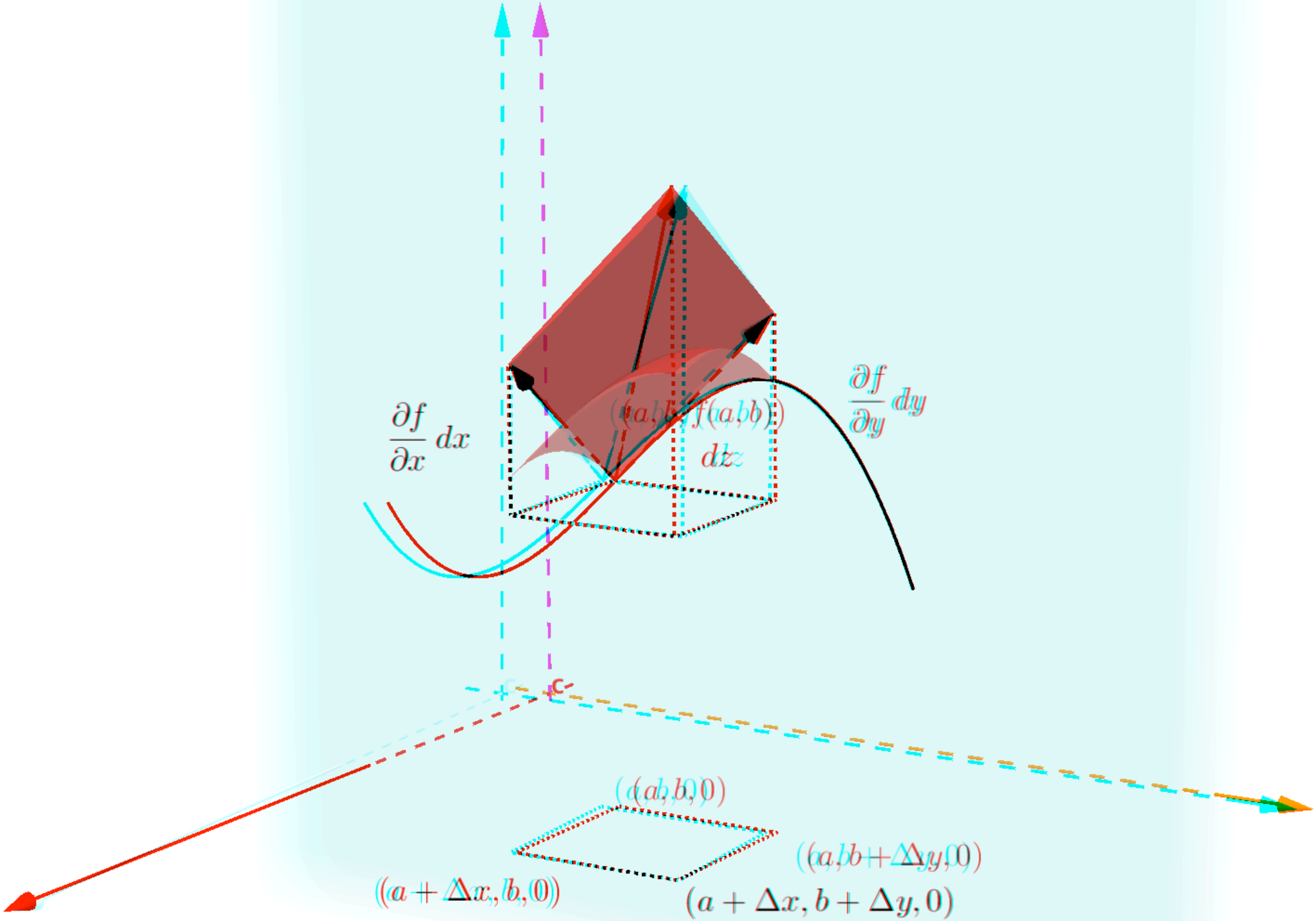
qui est la somme de ces deux vecteurs



Mais si on regarde dans le plan $y = b$

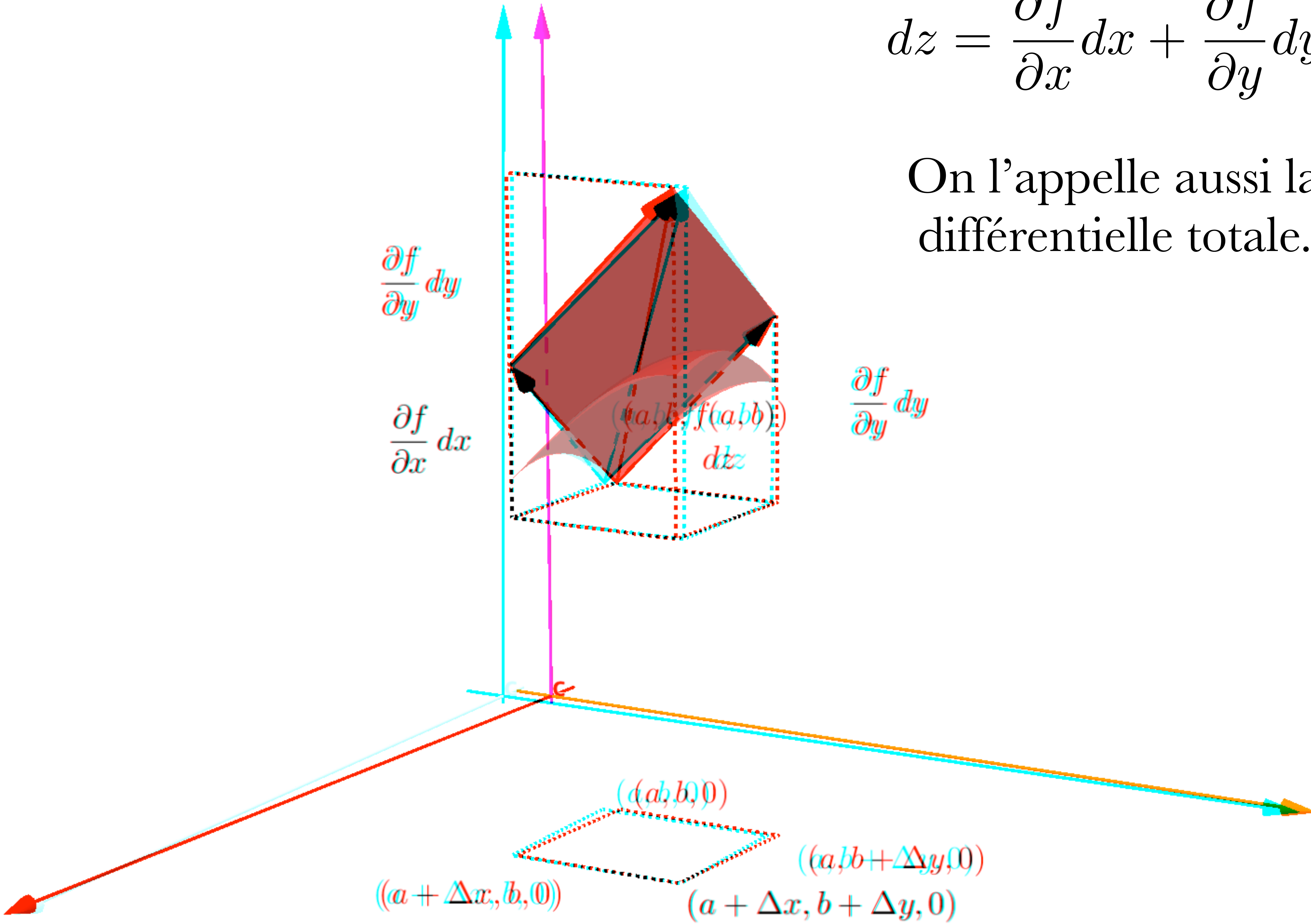


et si on regarde dans le plan $x = a$



$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

On l'appelle aussi la différentielle totale.



Faites les exercices suivants

p.779 # 23 à 28

$$z = f(x, y) = f(u(t), v(t)) = g(t) \qquad x = u(t) \qquad y = v(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h} + \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$z = f(x,y) = f(u(t),v(t)) = g(t) \qquad x = u(t) \qquad y = v(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h),v(t+h)) - f(u(t),v(t+h))}{h} \, \frac{u(t+h)-u(t)}{u(t+h)-u(t)}$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t),v(t+h)) - f(u(t),v(t))}{h} \, \frac{v(t+h)-v(t)}{v(t+h)-v(t)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h),v(t+h)) - f(u(t),v(t+h))}{u(t+h)-u(t)} \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t),v(t+h)) - f(u(t),v(t))}{v(t+h)-v(t)} \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

$$z = f(x,y) = f(u(t), v(t)) = g(t) \qquad x = u(t) \qquad y = v(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{u(t+h) - u(t)} \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{v(t+h) - v(t)} \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{u(t+h) - u(t)} u'(t)$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{v(t+h) - v(t)} v'(t)$$

$$z = f(x,y) = f(u(t), v(t)) = g(t) \qquad x = u(t) \qquad y = v(t)$$

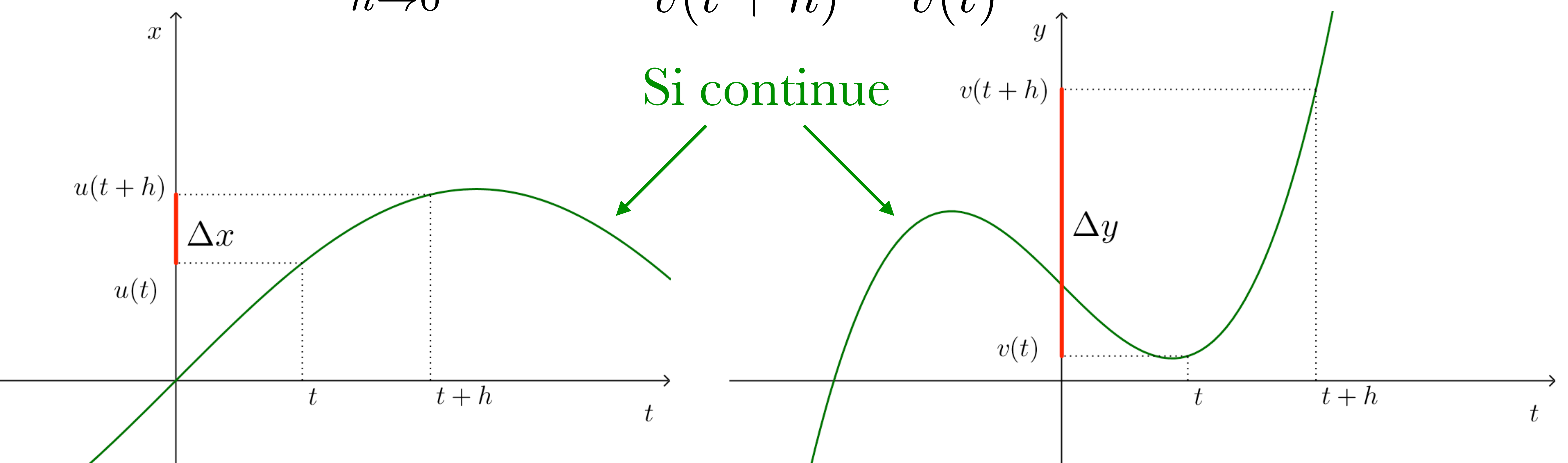
$$\Delta x = u(t+h) - u(t) \qquad u(t+h) = x + \Delta x$$

$$\Delta y = v(t+h) - v(t) \qquad v(t+h) = y + \Delta y$$

$$h \to 0 \qquad \Delta x \to 0 \qquad \Delta y \to 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{u(t+h) - u(t)} u'(t)$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{v(t+h) - v(t)} v'(t)$$



$$z = f(x,y) = f(u(t), v(t)) = g(t) \qquad x = u(t) \qquad y = v(t)$$

$$\Delta x = u(t+h) - u(t) \qquad u(t+h) = x + \Delta x \qquad h \to 0 \qquad \Delta x \to 0$$

$$\Delta y = v(t+h) - v(t) \qquad v(t+h) = y + \Delta y \qquad \Delta y \to 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{u(t+h) - u(t)} u'(t)$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{v(t+h) - v(t)} v'(t)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} u'(t)$$

$$+ \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} v'(t)$$

$$z = f(x, y) = f(u(t), v(t)) = g(t) \qquad x = u(t) \qquad y = v(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} u'(t)$$

$$+ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} v'(t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Dérivée d'une composition

$$z = f(x, y) \qquad x = u(t) \qquad y = v(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Cela dit, j'aurais pu faire tout ça comme ceci:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\frac{1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Mais ce type de manipulation de différentielle a toujours un peu l'air magique!

Exemple

$z = f(x,y) = x^2 y + y \qquad x = \sin t \qquad y = \sqrt{t}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 1 \qquad \frac{dx}{dt} = \cos t \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2xy\cos t + \frac{x^2+1}{2\sqrt{t}} = 2\sin t\sqrt{t}\cos t + \frac{\sin^2 t + 1}{2\sqrt{t}}$$

$$z = \sin^2 t\sqrt{t} + \sqrt{t}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2\sin t\cos t\sqrt{t} + \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Je ne ferai pas la preuve, mais si

$$z = f(x, y) \qquad x = u(t, s) \qquad y = v(t, s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

On peut généraliser ces résultats.

$$w = f(x, y, z)$$

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$x = u(t) \qquad y = v(t) \qquad z = r(t)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$x = u(t, s) \qquad y = v(t, s) \qquad z = r(t, s)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Faites les exercices suivants

p. 786 # 1, 3, 5, 7, 9 et 11

Aujourd'hui, nous avons vu

- Plan tangent.
- Approximation du premier degré.
- Différentielle.
- Dérivées de compositions.

Devoir:

p. 778 # 1 à 6, 11 à 17 et 23 à 29

p. 786 # 1 à 14 et 21 à 25