2.5 EXTRÉMUM

cours 13

Au dernier cours, nous avons vu

- Dérivée directionnelle.
- Gradient.

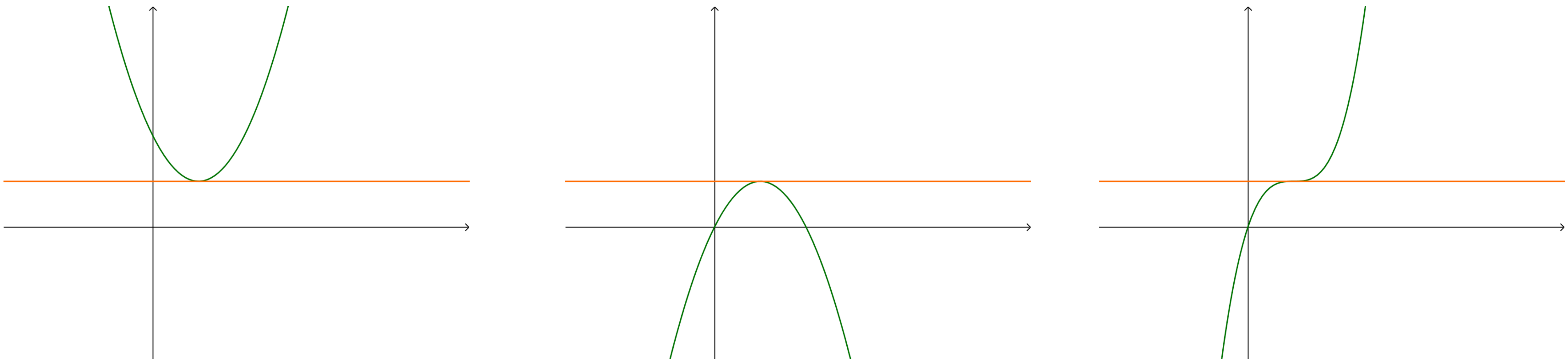
Aujourd'hui, nous allons voir

- Extremums
- Test de la dérivée seconde
- Hessien

Lorsqu'on cherchait les extrémums relatifs d'une fonction à une variable, on commençait par trouver ces points critiques.

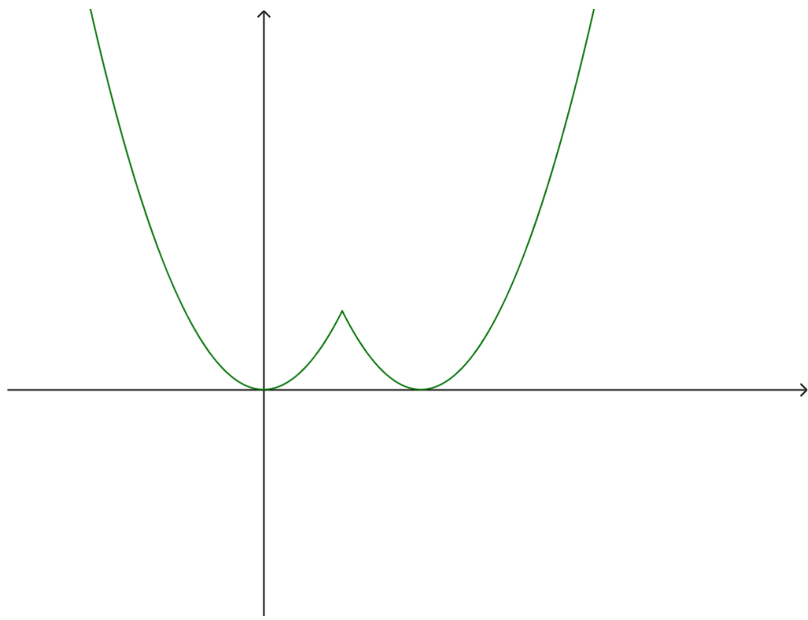
$$f'(a) \overset{?}{=} 0$$

en d'autres termes, on veut que la droite tangente soit horizontale

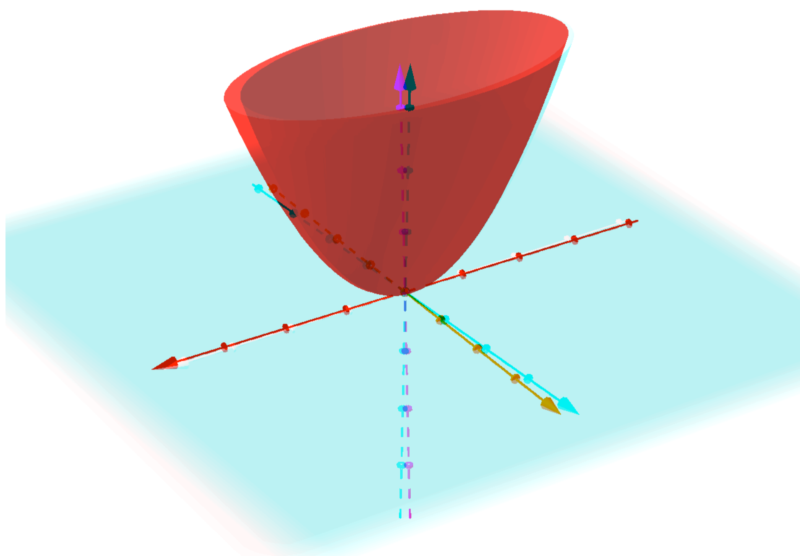


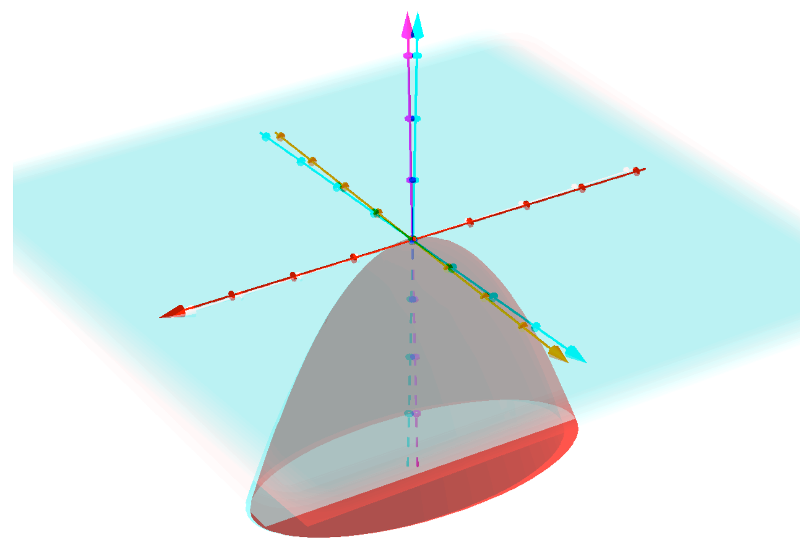
ou les endroits où la dérivée n'existe pas

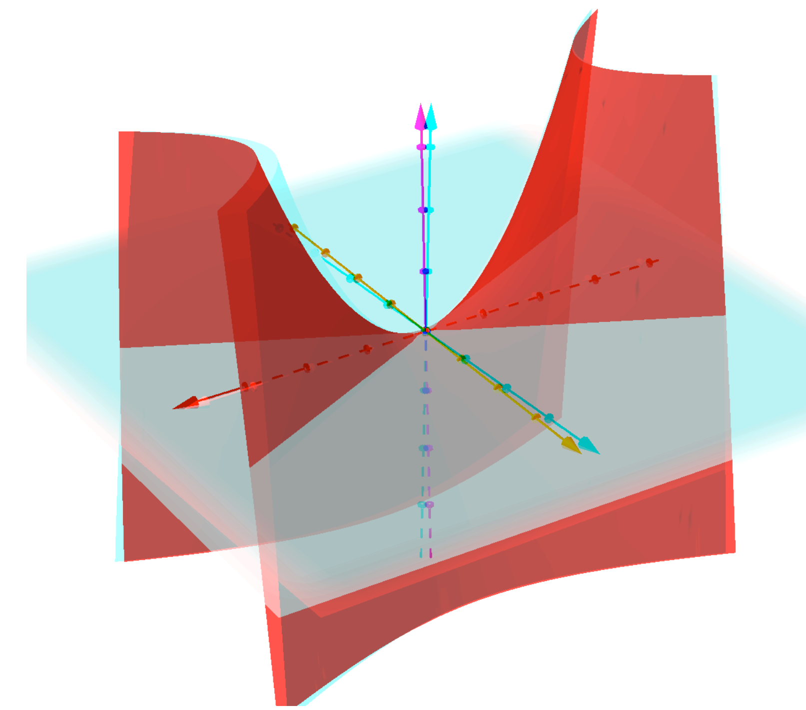
$$f'(a) \overset{?}{\nexists}$$



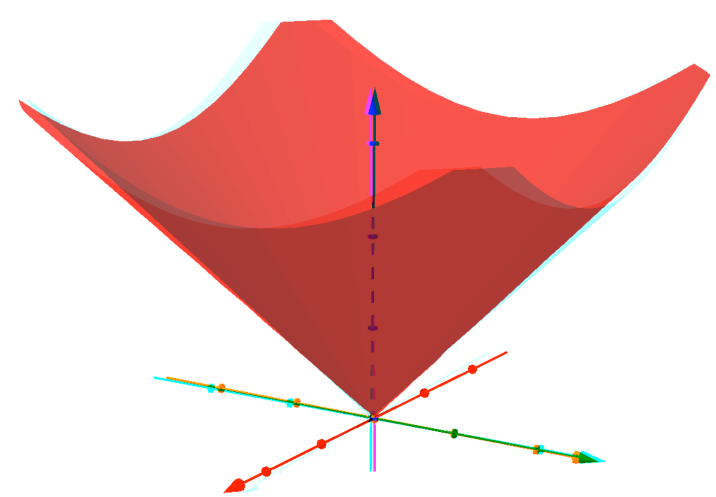
Similairement lors de la recherche d’extrémums de fonction à deux variables, les points critiques sont les points ou le plan tangent est horizontal.







et ceux où la dérivée n’existe pas.



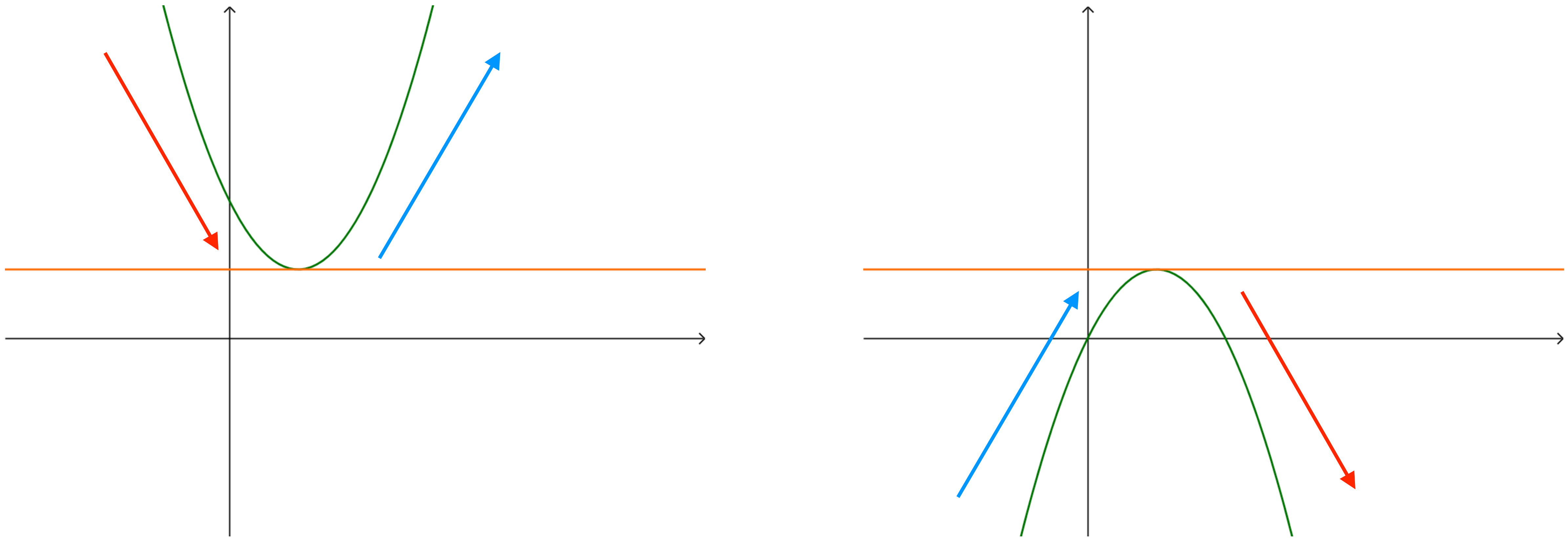
Puisque le vecteur normal au plan tangent est donné par

$$\vec{n} = \nabla F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$$

donc un point critique est un point tel que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = 0$$

Avec les fonctions à une variable, pour vérifier si un point critique était un min ou un max, il suffisait de voir si la fonction passait de croissante à décroissante ou vice versa.



Mais avec les fonctions à plusieurs variables, il y a trop de directions par lesquelles on peut s'approcher d'un point pour faire ça.

Dans un premier temps, on peut essayer de voir si Δz est toujours positif ou toujours négatif.

$$\Delta z = f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

pour de petite valeurs de h et k .

Exemple $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0 \implies x^2 = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0 \implies x = y$$

$$\implies x^2 = x \qquad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

On a donc deux points critiques

$$(0, 0) \qquad\qquad (1, 1)$$

Dans un premier temps, on peut essayer de voir si Δz est toujours positif ou toujours négatif.

$$\Delta z = f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

pour de petite valeurs de h et k .

Exemple $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ $(1,1)$

pour $\cancel{(0,0)}$ en prenant $k = 0$

$$\Delta z = f(0+h, 0) - f(0,0) = 2h^3$$

prendra des valeurs positives et négatives selon le signe de h

Dans un premier temps, on peut essayer de voir si Δz est toujours positif ou toujours négatif.

$$\Delta z = f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

pour de petite valeurs de h et k.

Exemple $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

pour $\cancel{(0,0)}$ pour $(1,1)$

$$\Delta z = f(1+h, 1+k) - f(1,1)$$

$$= 2(1+h)^3 - 6(1+h)(1+k) + 3(1+k)^2 + 1$$

$$= 2(1+3h+3h^2+h^3) - 6(1+h+k+hk) + 3(1+2k+k^2) + 1$$

$$= 2(3h+3h^2+h^3) - 6(h+k+hk) + 3(2k+k^2)$$

$$= 2(3h^2+h^3) - 6hk + 3k^2$$

Dans un premier temps, on peut essayer de voir si Δz est toujours positif ou toujours négatif.

$$\Delta z = f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

pour de petite valeurs de h et k .

Exemple $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

pour $\cancel{(0,0)}$ pour $(1,1)$

$$\Delta z = f(1+h, 1+k) - f(1,1)$$

$$= 2(3h^2 + h^3) - 6hk + 3k^2$$

$$= 6h^2 + 2h^3 - 6hk + 3k^2$$

$$= 3h^2 + 2h^3 + 3h^2 - 6hk + 3k^2$$

$$= h^2(3+2h) + 3(h-k)^2$$

Dans un premier temps, on peut essayer de voir si Δz est toujours positif ou toujours négatif.

$$\Delta z = f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

pour de petite valeurs de h et k .

Exemple $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

pour $\cancel{(0,0)}$ pour $(1,1)$

$$\Delta z = f(1+h, 1+k) - f(1,1)$$

$$= h^2(3+2h) + 3(h-k)^2$$ toujours positif

positif si $-\frac{3}{2} < h < \frac{3}{2}$

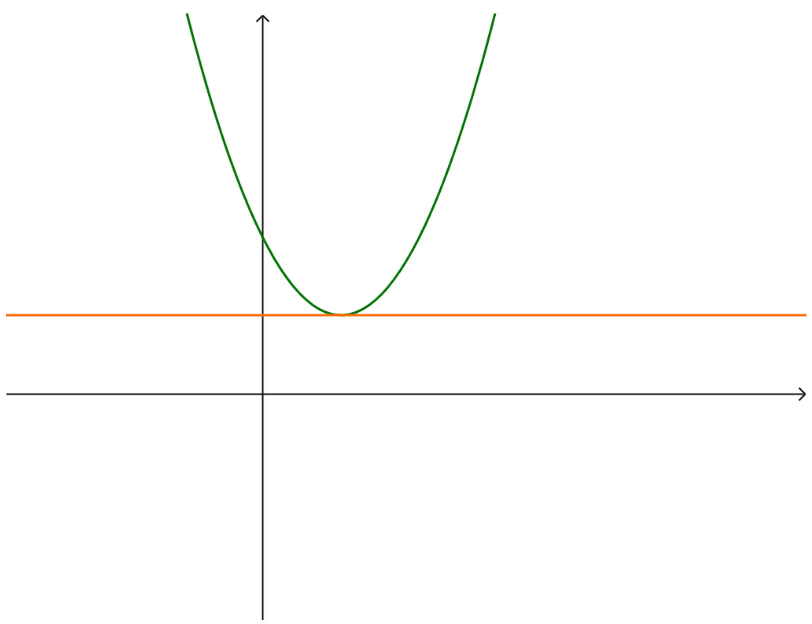
donc $(1,1)$ est un minimum relatif.

Ouin… cette méthode risque d'être rarement simple à utiliser!

Visons une autre méthode

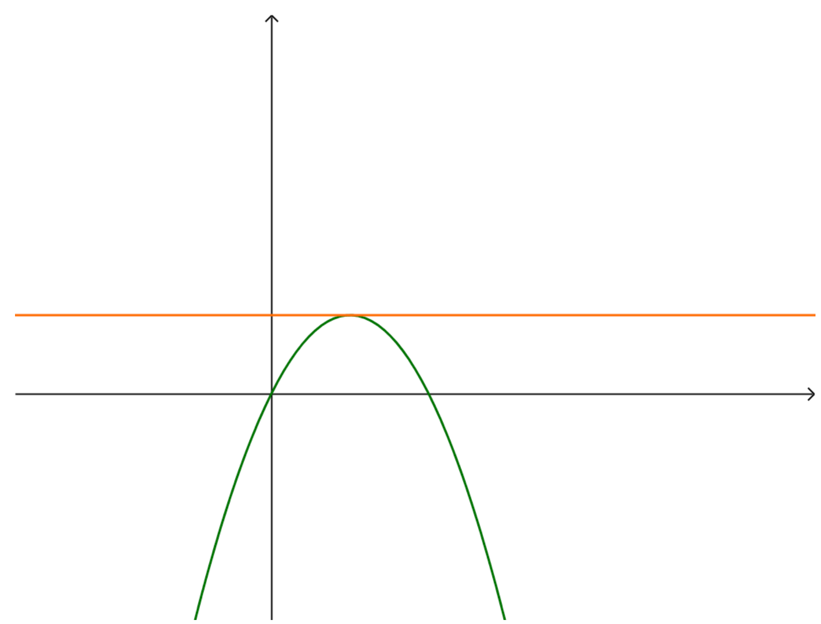
Avec les fonctions à une variables, on a vu le test de la dérivée seconde qui disait que si

$$f'(a) = 0$$



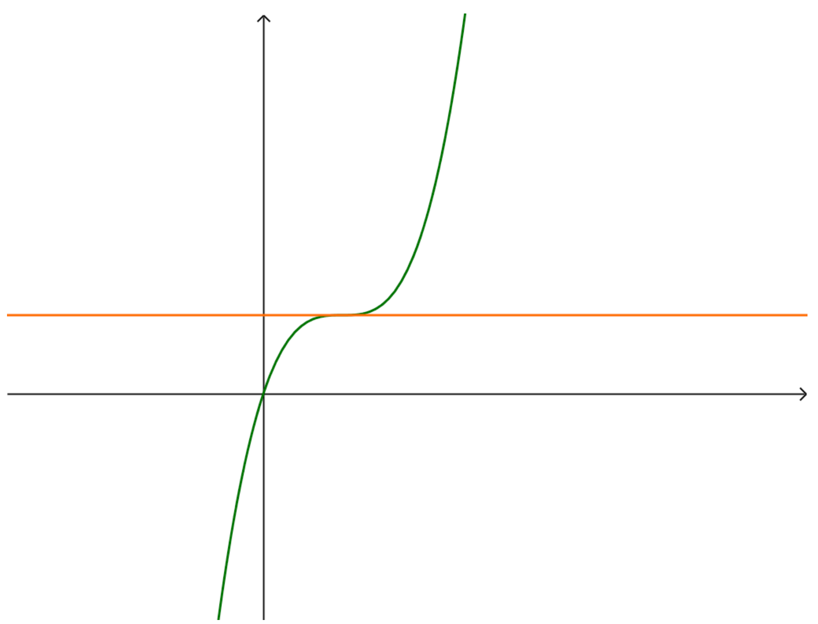
$$f''(a) > 0$$

Minimum



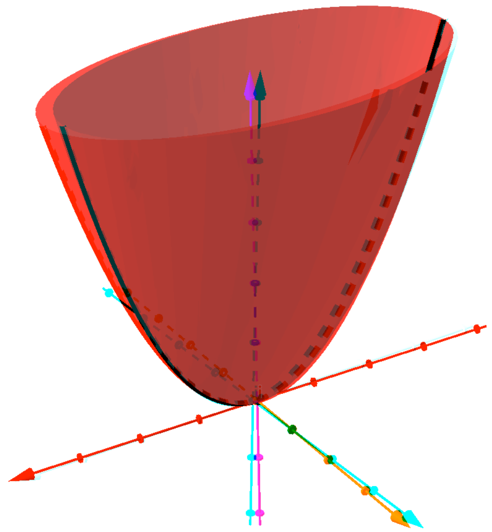
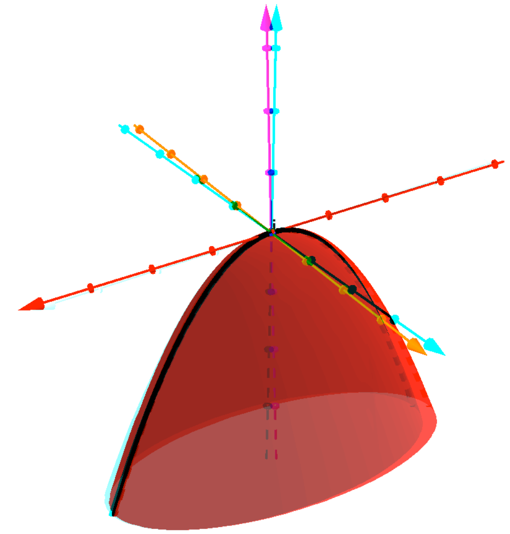
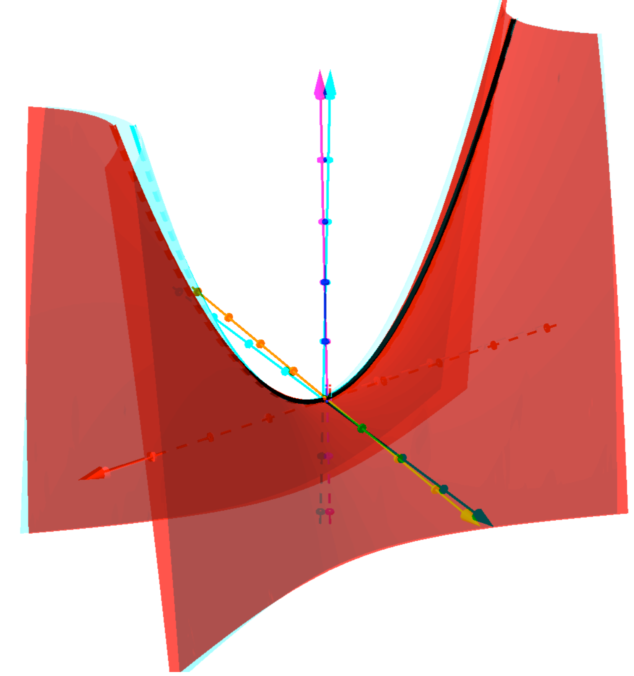
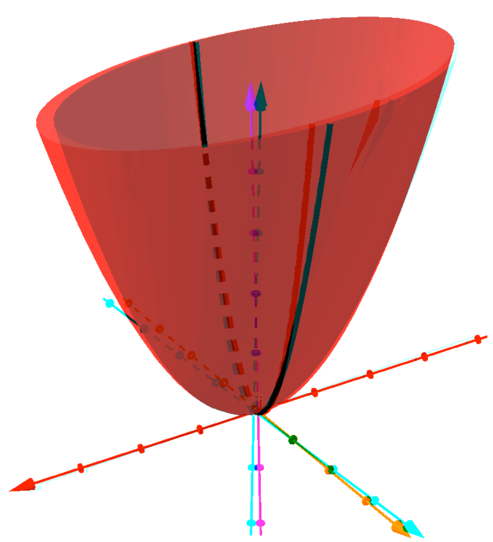
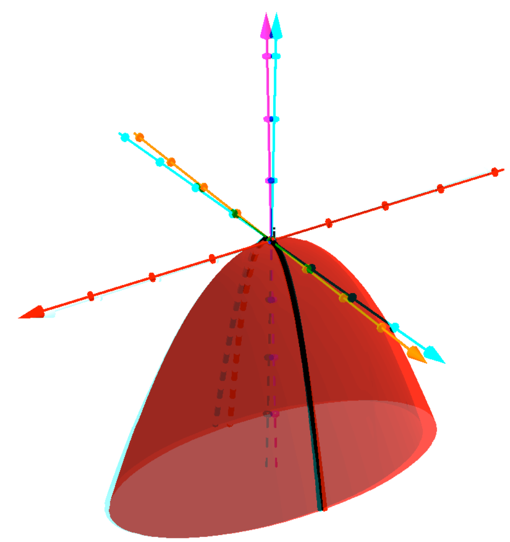
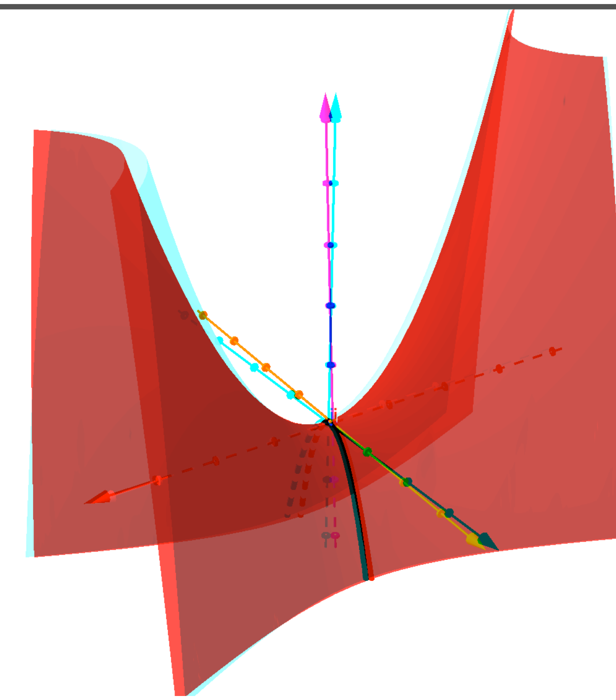
$$f''(a) < 0$$

Maximum



$$f''(a) = 0$$

???

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	 > 0	 < 0	 > 0
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	 > 0	 < 0	 < 0
	min ?	max ?	point de selle ?

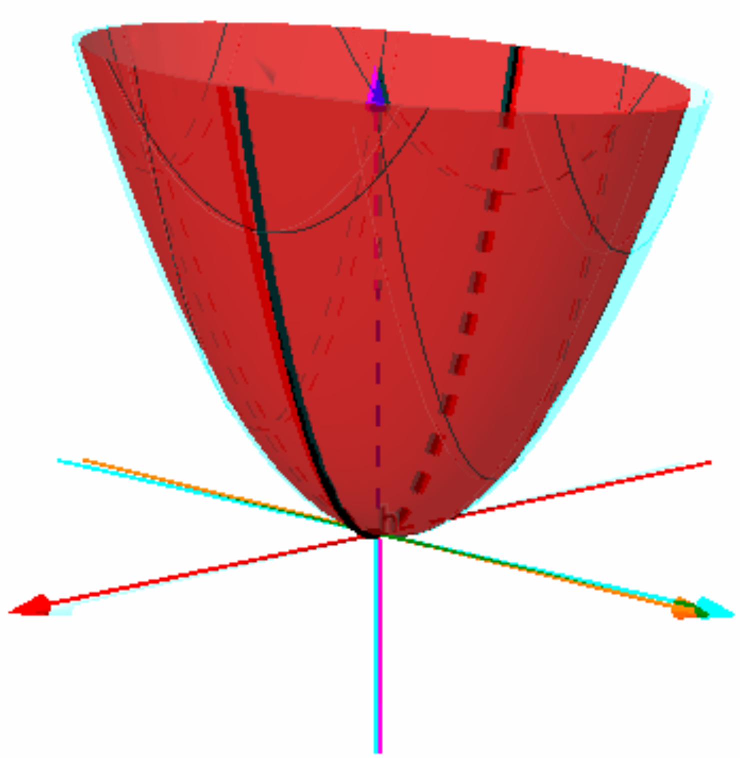
Par contre, il y a une autre dérivée seconde

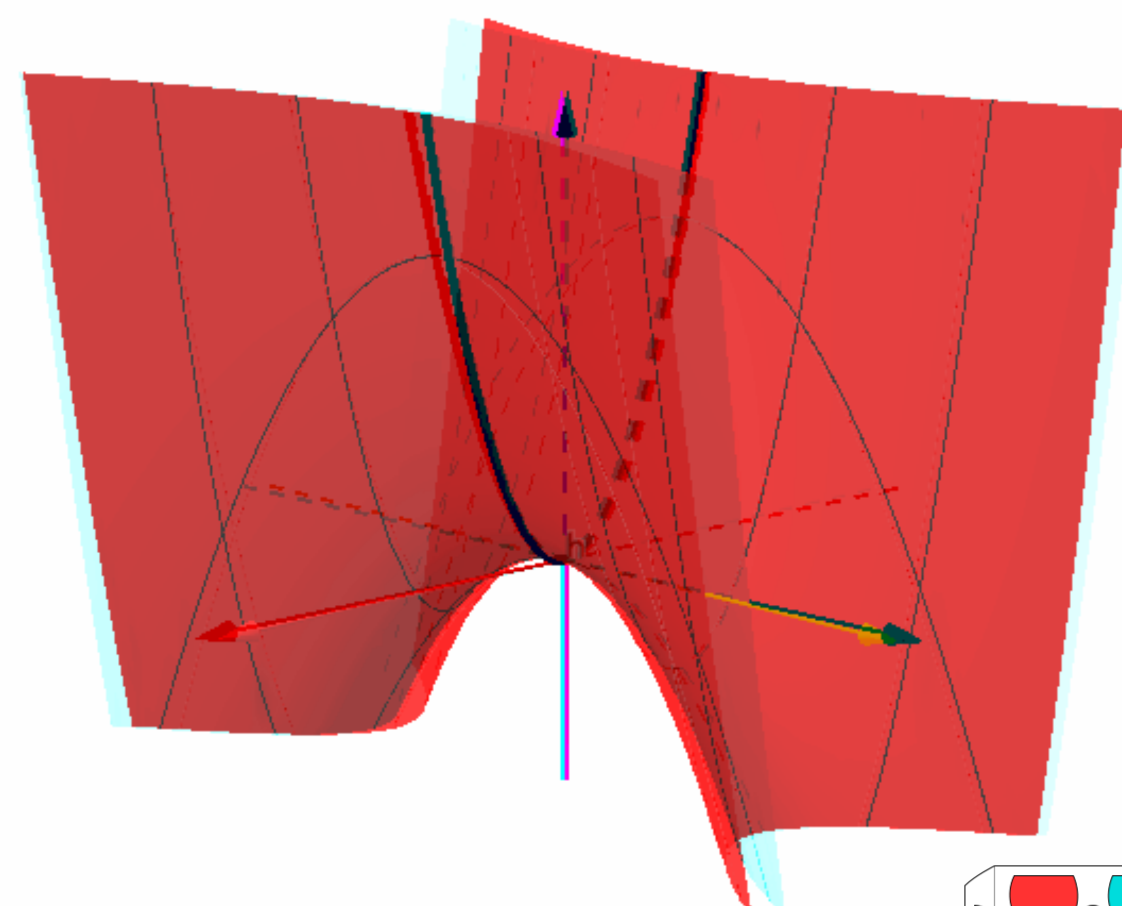
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

qui vient brouiller les cartes!

Pour pouvoir en tenir compte, c'est plutôt la dérivée seconde dans n'importe quelle direction qu'on aimerait qu'elle ait toujours le même signe.

$$f''_{\vec{u}\vec{u}}(a,b)$$





$$f'_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = \nabla\left(\nabla f \cdot \vec{u}\right) \cdot \vec{u} = \nabla\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (u_1, u_2)\right) \cdot \vec{u}$$

$$= \boxed{\nabla}\left(\frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2\right) \cdot \vec{u}$$

$$= \left(\boxed{\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2\right), \boxed{\frac{\partial}{\partial y}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2\right)\right) \cdot \vec{u}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}u_2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u_2\right) \cdot (u_1, u_2)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}u_2 u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u_2^2$$

$$
\begin{aligned}
f''_{\vec{u}\vec{u}} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}u_2 u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u_2^2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u_2^2
\end{aligned}
$$

On aimerait savoir si cette expression est toujours positive

Mais avant de faire ça, remarquons que nous pouvons réécrire cette expression sous forme matricielle.

$$
\begin{aligned}
f''_{\vec{u}\vec{u}} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u_2^2 \\
&\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_1 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}u_2 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}u_1 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}u_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}u_1 u_2 + + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u_2^2 \right) = (f''_{\vec{u}\vec{u}})
\end{aligned}
$$

Cette matrice ce nomme la matrice hessienne

$$\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

et son déterminant le hessien (ou discriminant hessien).

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2$$

Nous allons voir que le hessien apparait dans le test de la dérivée seconde des fonctions à plusieurs variables.

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

Remarquons ici qu'au point critique les dérivées secondes sont constantes.

Pour alléger l'écriture, on peut réécrire l'expression

$$A u_1^2 + 2 B u_1 u_2 + C u_2^2$$

Si $A = 0$ et $C = 0$

La dérivée directionnelle seconde prendra des valeurs positives et négatives et sera donc un point de selle.

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = 2B u_1 u_2$$

Pour voir ceci, il suffit de prendre les directions

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = (1, 1) \qquad \vec{u} = (u_1, u_2) = (1, -1)$$

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

Reste donc à voir ce qui ce passe si $A \neq 0$, si $C \neq 0$, ou les deux.

Supposons $A \neq 0$ (le cas $C \neq 0$ serait similaire)

et on fait une complétion de carré.

$$A u_1^2 + 2 B u_1 u_2 + C u_2^2 = A \left(u_1^2 + \frac{2 B u_2}{A} u_1 \right) + C u_2^2$$

$$= A \left(u_1^2 + \frac{2 B u_2}{A} u_1 + \left(\frac{B u_2}{A} \right)^2 - \left(\frac{B u_2}{A} \right)^2 \right) + C u_2^2$$

$$= A \left(u_1^2 + \frac{2 B u_2}{A} u_1 + \left(\frac{B u_2}{A} \right)^2 \right) - \frac{(B u_2)^2}{A} + C u_2^2$$

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

Supposons $A \neq 0$

$$A u_1^2 + 2B u_1 u_2 + C u_2^2$$

$$= A\left(u_1^2 + \frac{2Bu_2}{A} u_1 + \left(\frac{Bu_2}{A}\right)^2\right) - \frac{(Bu_2)^2}{A} + Cu_2^2$$

$$= A\left(u_1 + \frac{Bu_2}{A}\right)^2 - \frac{(Bu_2)^2}{A} + \frac{ACu_2^2}{A}$$

$$= A\left(u_1 + \frac{Bu_2}{A}\right)^2 + \left(AC - B^2\right)\frac{u_2^2}{A}$$

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

Supposons $A \neq 0$

$$A u_1^2 + 2 B u_1 u_2 + C u_2^2 = A\left(u_1 + \frac{B u_2}{A}\right)^2 + \left(AC - B^2\right)\frac{u_2^2}{A}$$

Puisque ceci est toujours positif, si

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = AC - B^2 > 0 \quad \text{(Le hessien)}$$

c'est donc le signe de A qui détermine le signe de $f''_{\vec{u}\vec{u}}$

si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A > 0$ alors $f''_{\vec{u}\vec{u}}$ sera toujours positive donc un min.

si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A < 0$ alors $f''_{\vec{u}\vec{u}}$ sera toujours négative donc un max.

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

Supposons $A \neq 0$

$$A u_1^2 + 2 B u_1 u_2 + C u_2^2 = A\left(u_1 + \frac{B u_2}{A}\right)^2 + \left(AC - B^2\right)\frac{u_2^2}{A}$$

Si à la place on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = AC - B^2 < 0$$

(Le hessien)

Alors la dérivée directionnelle seconde prendra des valeurs différentes pour les directions

$$\vec{u} = (1, 0) \qquad \vec{u} = \left(-\frac{B}{A}, 1\right)$$

et donc on a un point de selle.

$$f''_{\vec{u}\vec{u}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

Supposons $A \neq 0$

$$Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2 = A\left(u_1 + \frac{Bu_2}{A}\right)^2 + \left(AC - B^2\right)\frac{u_2^2}{A}$$

De plus, si $C = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0 - B^2 > 0$$

(Le hessien)

un point de selle

Par symétrie, on aurait la même chose pour $C \neq 0$ et $A = 0$

De plus, on avait déjà remarqué que si $A = 0$ et $C = 0$

on avait un point de selle.

On vient donc de faire la preuve de

Théorème Soit une fonction $f(x, y)$ et un point (a, b) tel que

$$f'_x(a, b) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_y(a, b) = 0$$

si on note $D = \left(f''_{xx}(a, b) f''_{yy}(a, b)\right) - \left(f''_{xy}(a, b)\right)^2$ le hessien

Si $D > 0$ et $f''_{xx}(a, b) < 0$ le point est un maximum relatif.

Si $D > 0$ et $f''_{xx}(a, b) > 0$ le point est un minimum relatif.

Si $D < 0$ le point est un point de selle.

Si $D = 0$ On ne peut rien conclure.

(On dit que le point critique est dégénéré.)

Faites les exercices suivants

p.809 # 1 et 2

(p.809 # 1 et 2)

Exemple

Reprenons notre premier exemple

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y \qquad \text{pt. cr.} \quad (0,0) \qquad (1,1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (72x) - (-6)^2$$

$(0,0) \qquad D = -36 < 0 \qquad$ point de selle

$(1,1) \qquad D = 36 > 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = 12 > 0 \qquad$ minimum

Exemple $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$f'_x = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x^2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = y(1-x^2)\boxed{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}$$

$$f'_y = x(1-y^2)\boxed{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}$$

$$\boxed{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}} > 0$$

$$y(1-x^2) = 0 \qquad x = \pm 1 \qquad y = 0$$

$$x(1-y^2) = 0 \qquad x = 0 \qquad y = \pm 1$$

$$(0,0) \quad (1,1) \quad (1,-1) \quad (-1,1) \quad (-1,-1)$$

Exemple $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$(0,0)$ $(1,1)$ $(-1,-1)$
$(1,-1)$ $(-1,1)$

$f'_x = y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ $f'_y = x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$f''_{xx} = y(-2x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - y(1-x^2)(-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$= xy(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{yy} = xy(y^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{xy} = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - y^2(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$= (1-x^2)(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Exemple $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

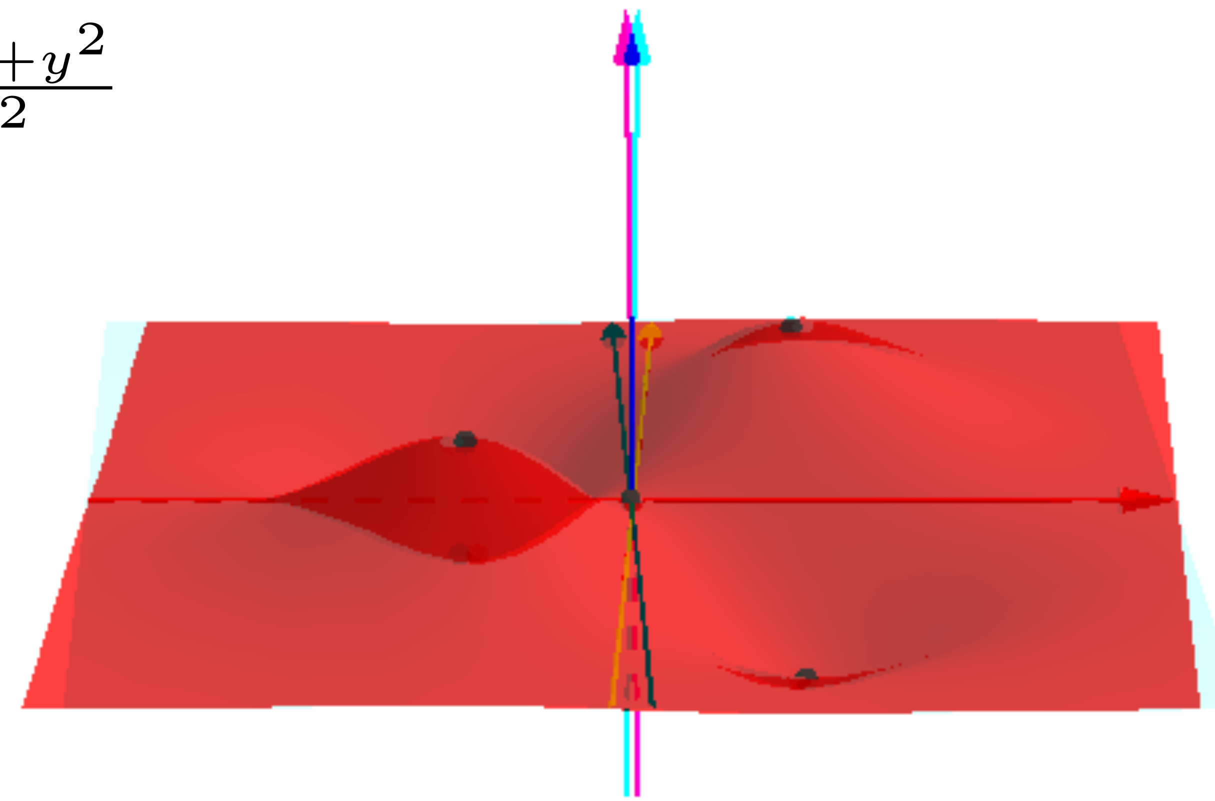
$$f''_{xx} = xy(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = A \qquad f''_{yy} = xy(y^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = C$$

$$f''_{xy} = (1-x^2)(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = B$$

$(0,0)$	$A=0$	$C=0$	$B=1$	$AC-B^2=-1$	selle
$(1,1)$	$A=-2$	$C=-2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	max
$(-1,-1)$	$A=-2$	$C=-2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	max
$(1,-1)$	$A=2$	$C=2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	min
$(-1,1)$	$A=2$	$C=2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	min

Exemple

$$f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$



$(0,0)$	$A=0$	$C=0$	$B=1$	$AC-B^2=-1$	selle
$(1,1)$	$A=-2$	$C=-2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	max
$(-1,-1)$	$A=-2$	$C=-2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	max
$(1,-1)$	$A=2$	$C=2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	min
$(-1,1)$	$A=2$	$C=2$	$B=0$	$AC-B^2=4$	min

Faites les exercices suivants

p.809 # 5 à 16

(p.810 # 5 à 16)

On peut utiliser la matrice hessienne pour écrire sous forme matricielle l'approximation du deuxième degré.

$$z \approx f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-b)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2\right)$$

$$\vec{x}=(x,y) \qquad \vec{a}=(a,b) \qquad \vec{x}-\vec{a}=(x-a,y-b)$$

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{a}) + \cancelto{0}{\nabla f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^T} + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})\mathbf{H}(f(\vec{a}))(\vec{x}-\vec{a})^T$$

Ce qui nous permet d'interpréter le test de la dérivée seconde;

Lorsqu'on a un point critique, le terme linéaire disparait

donc, avec le hessien on regarde l'approximation du deuxième degré.

Aujourd’hui, nous avons vu

- Extremum
- Test de la dérivée seconde
- Hessien

Devoir:

p.809 # 1 à 18

(p.809 # 1 à 18)