2.6 MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

cours 14

Au dernier cours, nous avons vu

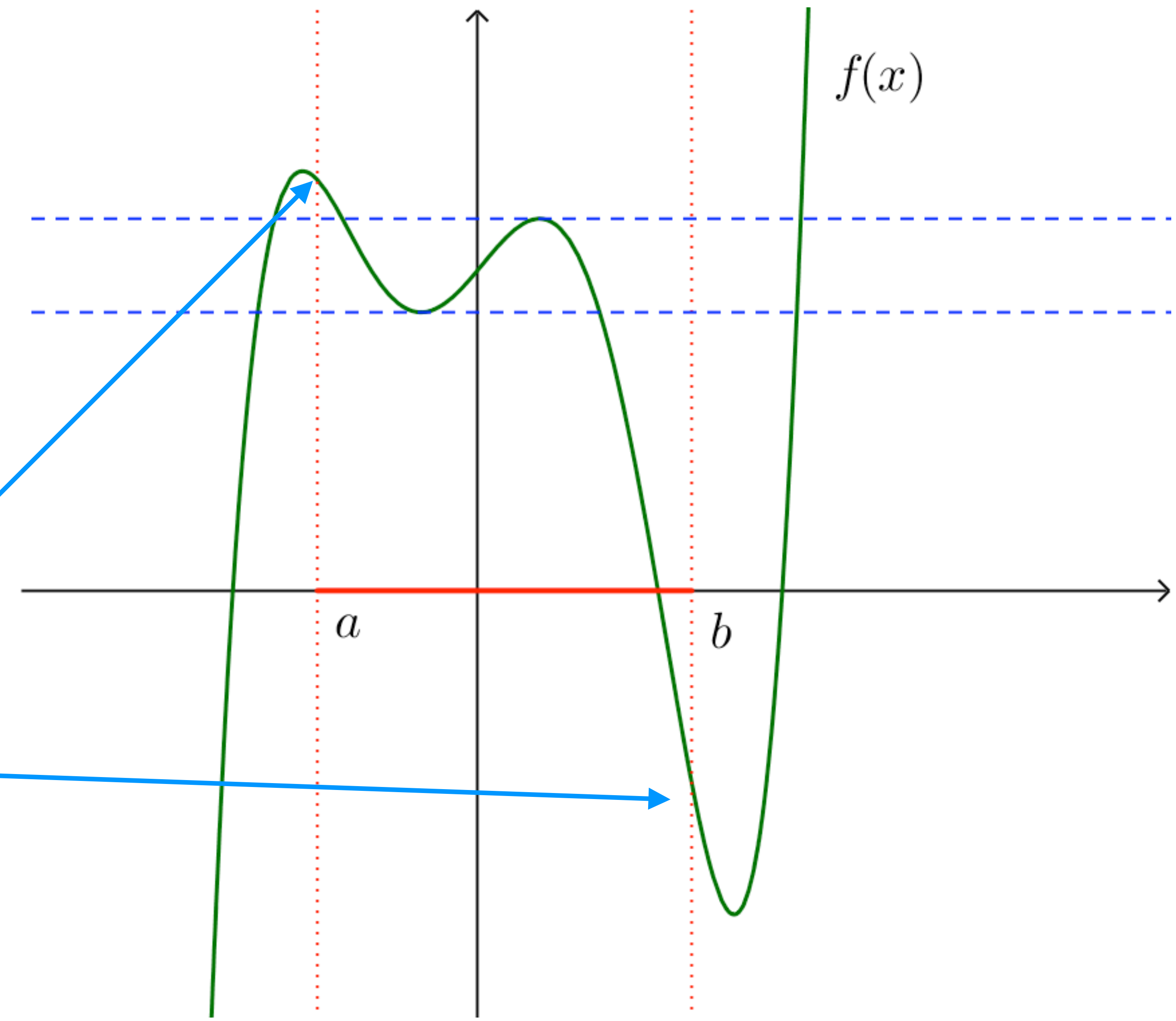
- Extremums
- Test de la dérivée seconde
- Hessien

Aujourd’hui, nous allons voir

- Extremums sur une région bornée
- Multiplicateur de Lagrange

Avec les fonctions à une variable, il arrivait parfois qu'on veuille trouver le maximum ou le minimum absolu sur un intervalle.

On commence par trouver les extremums relatifs comme précédemment.



Et on compare avec les points frontière pour trouver la plus grande et la plus petite valeur.

Avec les fonctions à deux variables, c'est un peu la même chose, mais on doit préciser quel type de généralisation d'un intervalle on veut considérer.

Un ensemble sera dit fermé s'il contient tous ces points frontière.

(le concept d'ensemble fermé est légèrement plus compliqué que ça, mais nous nous contenterons de cette définition)

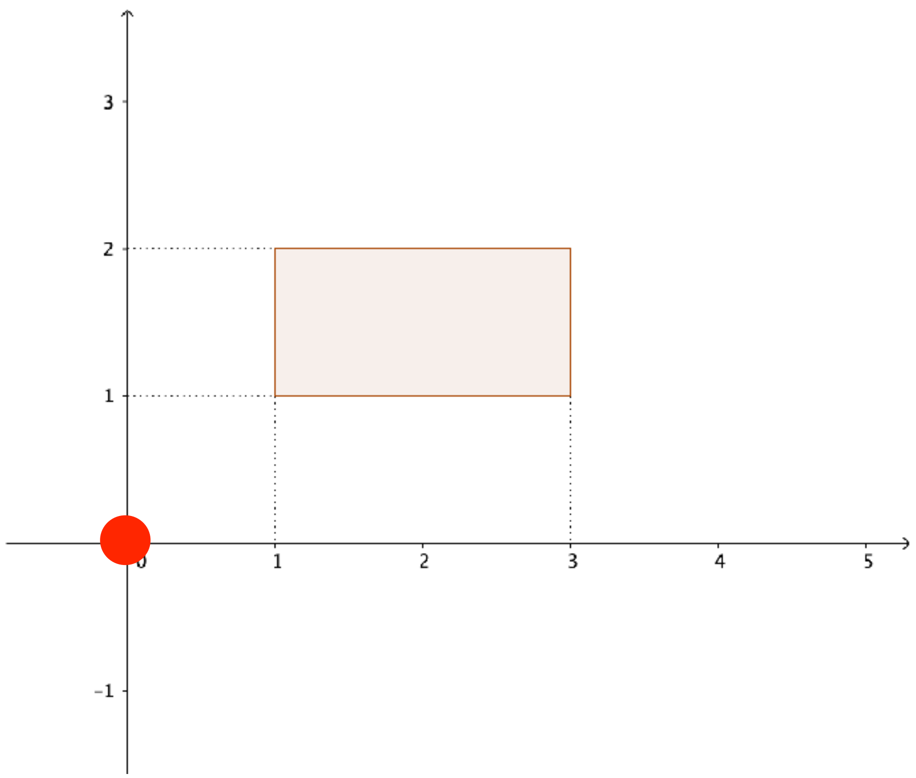
Un ensemble A est dit borné s'il existe un nombre r tel que

$$A \subset B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r\right\}$$

Nous regarderons donc des régions fermées et bornées.

Exemple Trouver la valeur maximale de $f(x,y) = x^2 + y^2$

dans le rectangle $[1,3] \times [1,2]$

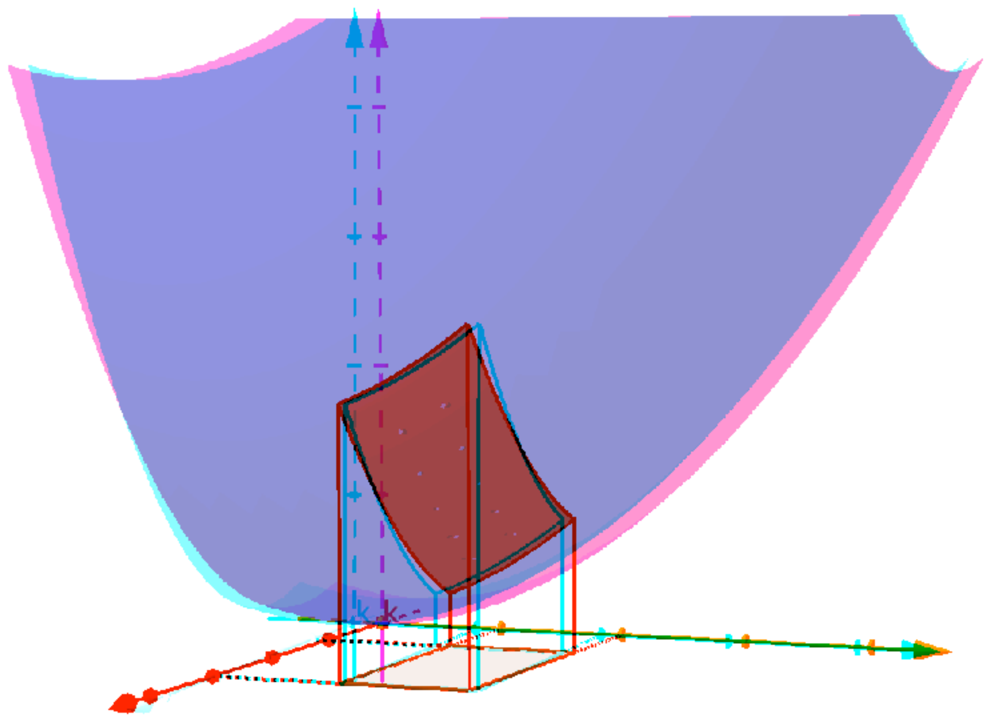


$$\nabla f = (2x, 2y)$$

Le seul point critique

$$(0,0) \notin [1,3] \times [1,2]$$

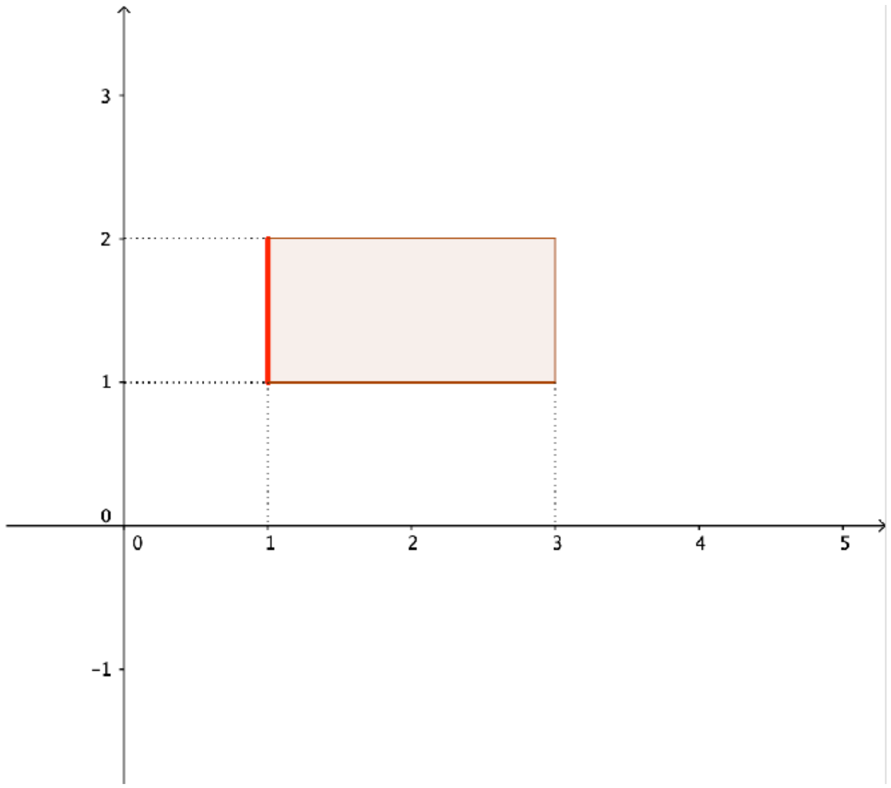
On doit aussi regarder sur la frontière



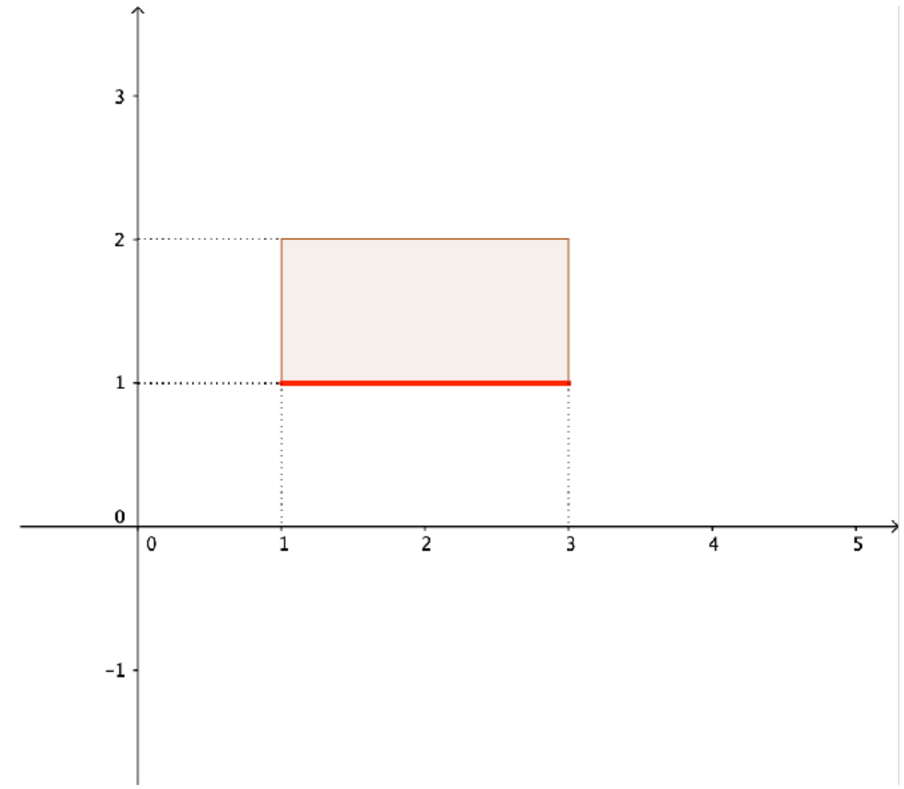
Exemple Trouver la valeur maximale de $f(x,y) = x^2 + y^2$

dans le rectangle $[1,3] \times [1,2]$

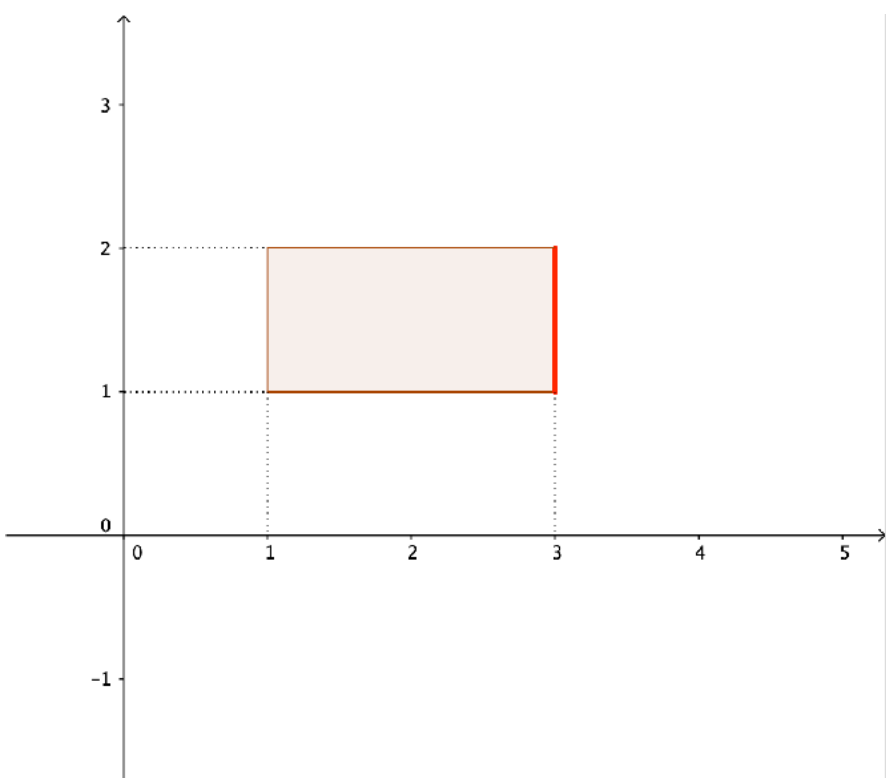
$x = 1$



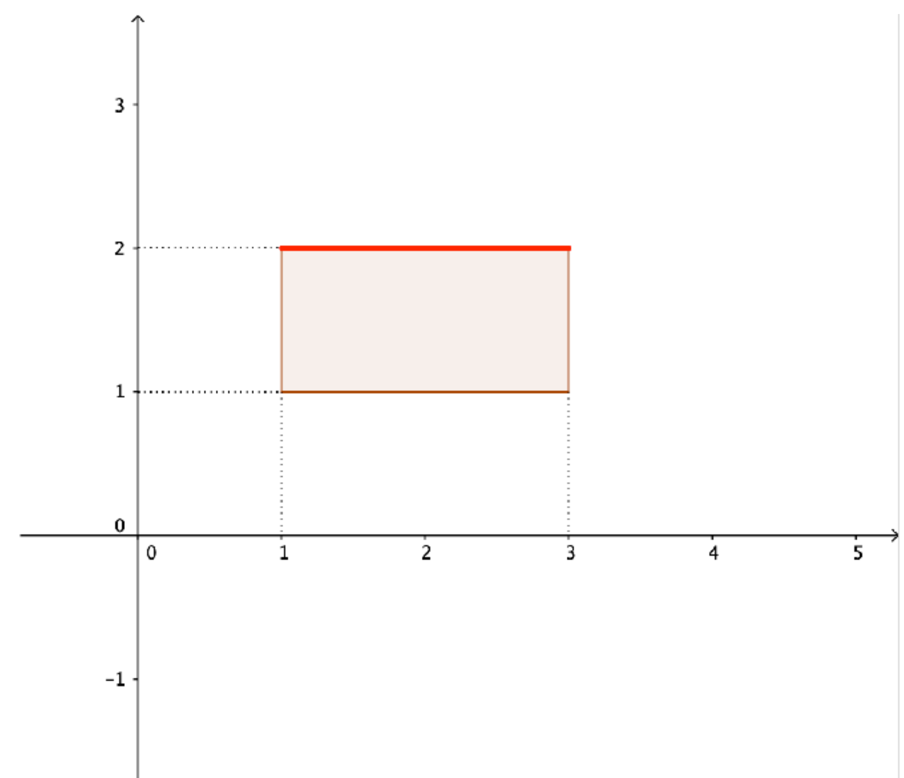
$y = 1$



$x = 3$



$y = 2$



Exemple Trouver la valeur maximale de $f(x,y) = x^2 + y^2$

dans le rectangle $[1,3] \times [1,2]$

$x = 1$ $\quad z = 1 + y^2$ $\qquad y = 1$ $\quad z = x^2 + 1$

$$\frac{dz}{dy} = 2y \qquad \frac{dz}{dx} = 2x$$

toutes des fonctions croissantes sur leurs intervalles sans point critique

$x = 3$ $\quad z = 9 + y^2$ $\qquad y = 2$ $\quad z = x^2 + 4$

$$\frac{dz}{dy} = 2y \qquad \frac{dz}{dx} = 2x$$

Exemple Trouver la valeur maximale de $f(x,y) = x^2 + y^2$

dans le rectangle $[1,3] \times [1,2]$

$x = 1$ $\quad z = 1 + y^2$

min: $y = 1$ $\quad z = 2$

max: $y = 2$ $\quad z = 5$

$x = 3$ $\quad z = 9 + y^2$

min: $y = 1$ $\quad z = 10$

max: $y = 2$ $\quad z = 13$

$y = 1$ $\quad z = x^2 + 1$

min: $x = 1$ $\quad z = 2$

max: $x = 3$ $\quad z = 10$

$y = 2$ $\quad z = x^2 + 4$

min: $x = 1$ $\quad z = 5$

max: $x = 3$ $\quad z = 13$

Exemple Trouver la valeur maximale de $f(x, y) = x^2 + y^2$

dans le rectangle $[1, 3] \times [1, 2]$

$x = 1$ $\quad z = 1 + y^2$

min: $y = 1$ $\quad z = 2$

max: $y = 2$ $\quad z = 5$

$y = 1$ $\quad z = x^2 + 1$

min: $x = 1$ $\quad z = 2$

max: $x = 3$ $\quad z = 10$

$x = 3$ $\quad z = 9 + y^2$

min: $y = 1$ $\quad z = 10$

max: $y = 2$ $\quad z = 13$

$y = 2$ $\quad z = x^2 + 4$

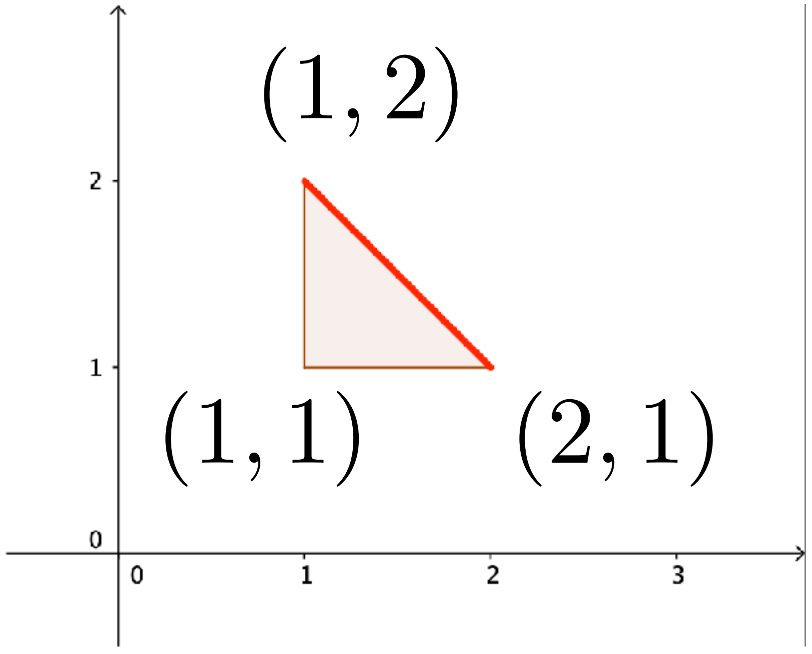
min: $x = 1$ $\quad z = 5$

max: $x = 3$ $\quad z = 13$

Exemple Trouver les extrémums absolus de la fonction

$f(x, y) = x^2 - 2y^2$ sur le triangle passant par

$\nabla f = (2x, -4y) \qquad (0,0) \notin T$



$x = 1$

$y = 1$

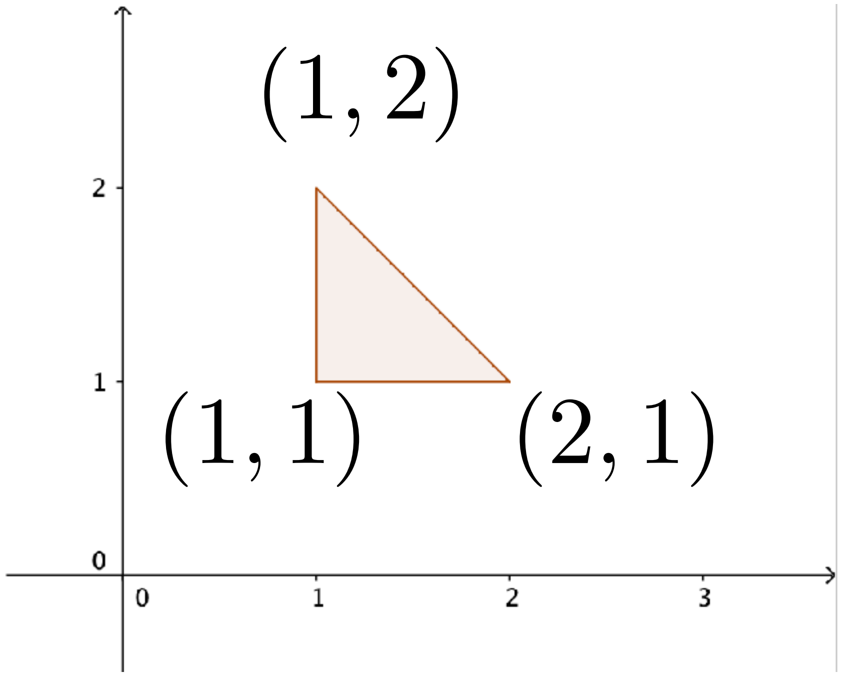
La droite passant par $(1, 2)$ et $(2, 1)$

$y = -x + b \qquad 2 = -1 + b \qquad b = 3$

$$y = -x + 3$$

Exemple Trouver les extrémums absolus de la fonction

$f(x,y) = x^2 - 2y^2$ sur le triangle passant par



$x = 1 \qquad z = 1 - 2y^2 \qquad [1,2]$

$\frac{dz}{dy} = -4y$ décroissante

$y = 1 \qquad z = x^2 - 2 \qquad [1,2]$

$\frac{dz}{dx} = 2x$ croissante

$y = -x + 3 \qquad z = x^2 - 2(-x+3)^2 \; = -x^2 + 12x - 9 \qquad [1,2]$

$\frac{dz}{dx} = -2x + 12$ croissante

Exemple Trouver les extrémums absolus de la fonction

$f(x,y) = x^2 - 2y^2$ sur le triangle passant par

$x = 1$ $\quad z = 1 - 2y^2$ $\quad [1,2]$ décroissante

min $\quad y = 2$ $\quad z = -7$ $\qquad$ max $\quad y = 1$ $\quad z = -1$

$y = 1$ $\quad z = x^2 - 2$ $\quad [1,2]$ croissante

min $\quad x = 1$ $\quad z = -1$ $\qquad$ max $\quad x = 2$ $\quad z = 2$

$y = -x + 3$ $\quad z = -x^2 + 12x - 9$ $\quad [1,2]$ croissante

$y = -2 + 3 = 1$

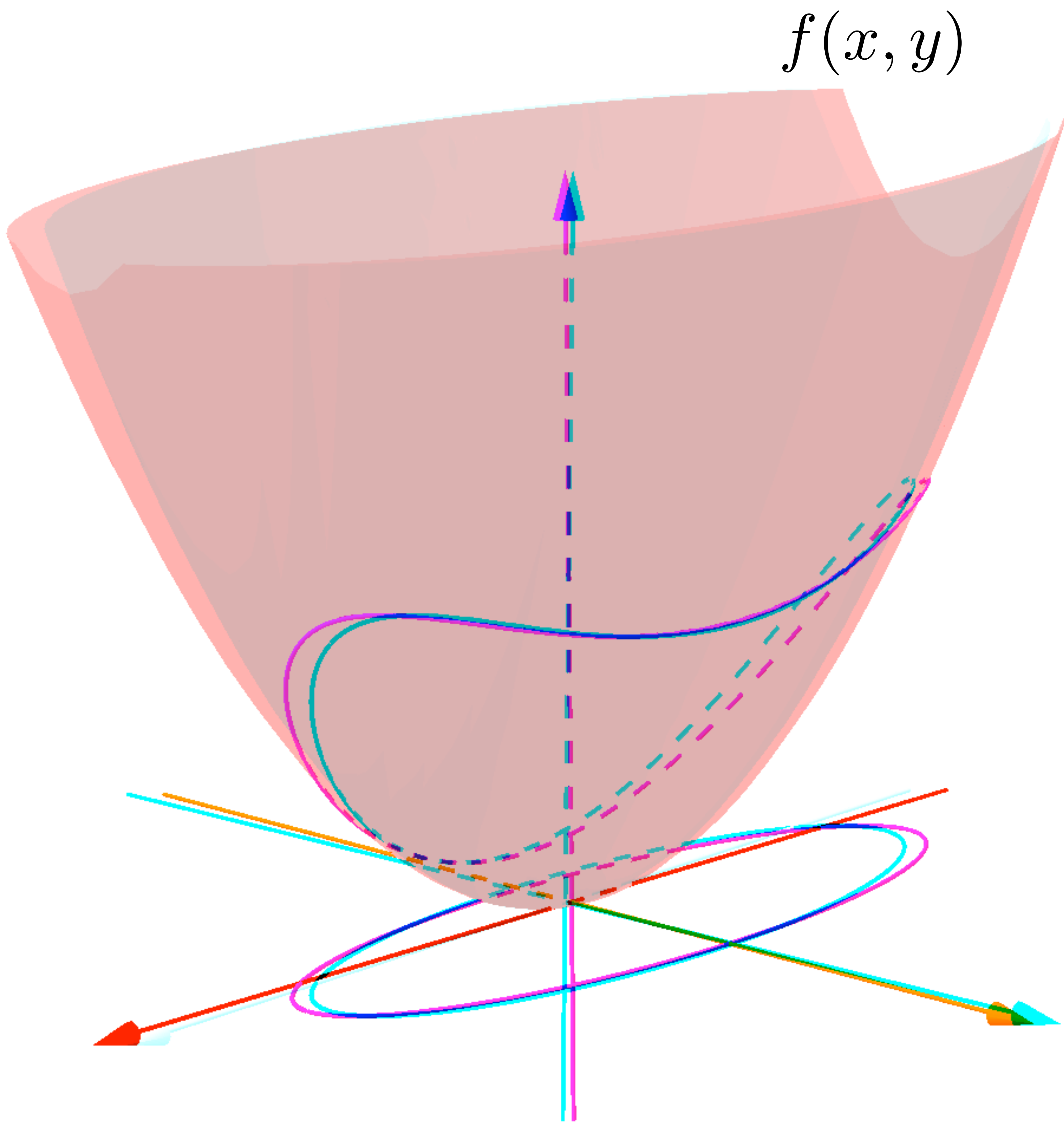
min $\quad x = 1$ $\quad z = 2$ $\qquad$ max $\quad x = 2$ $\quad z = 11$

Faites les exercices suivants

p.810 #27 à 32

(p.810 #25 à 30)

On cherche le max ou le min d'une fonction



sous la contrainte

$$h(x, y) = k$$

si on pose

$$g(x, y) = h(x, y) - k$$

la contrainte devient

$$g(x, y) = 0$$

On cherche donc la hauteur maximale ou minimale de la courbe sur la fonction.

Pour faire cela, nous allons regarder les courbes de niveau.

On peut voir

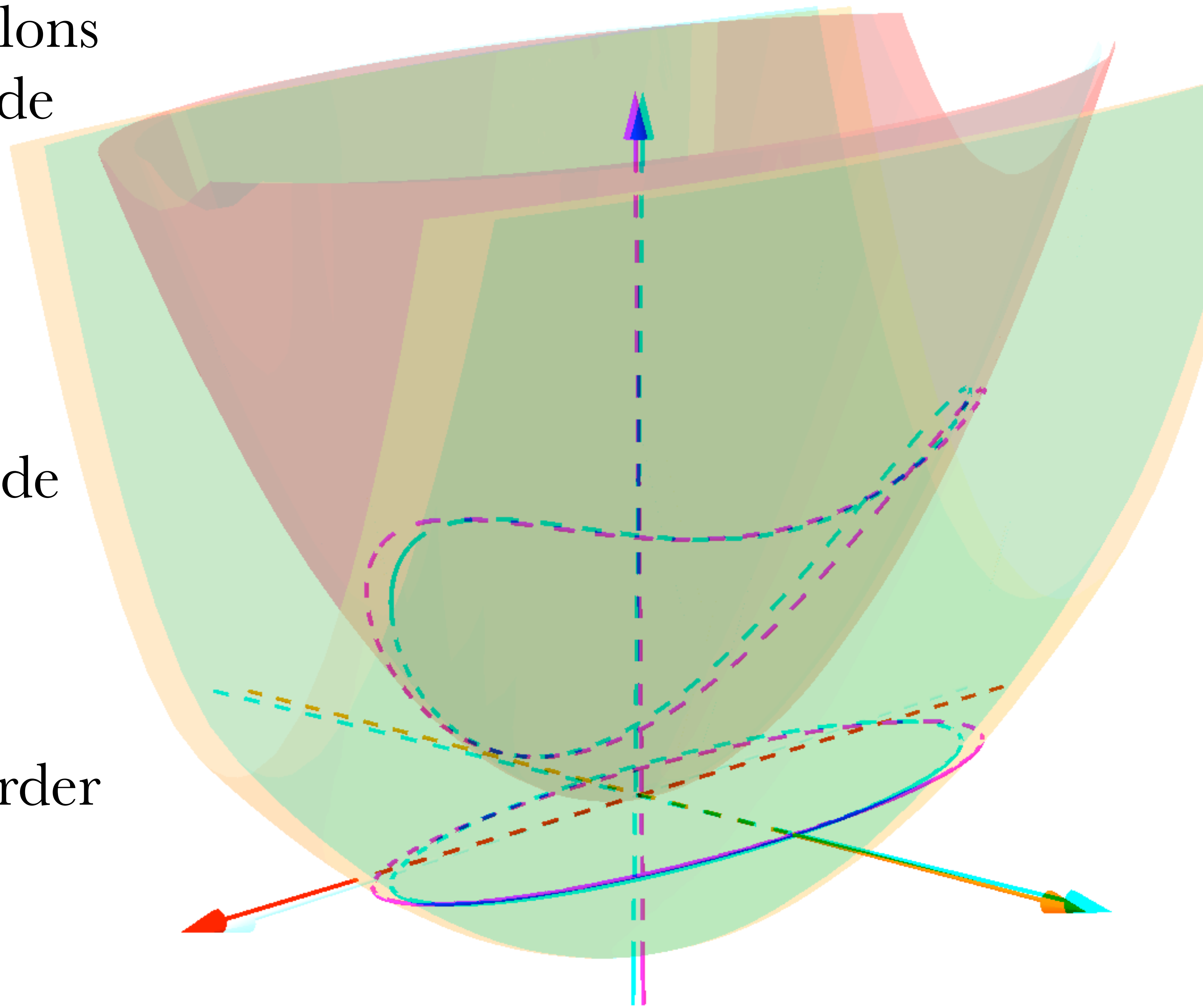
$$g(x, y) = 0$$

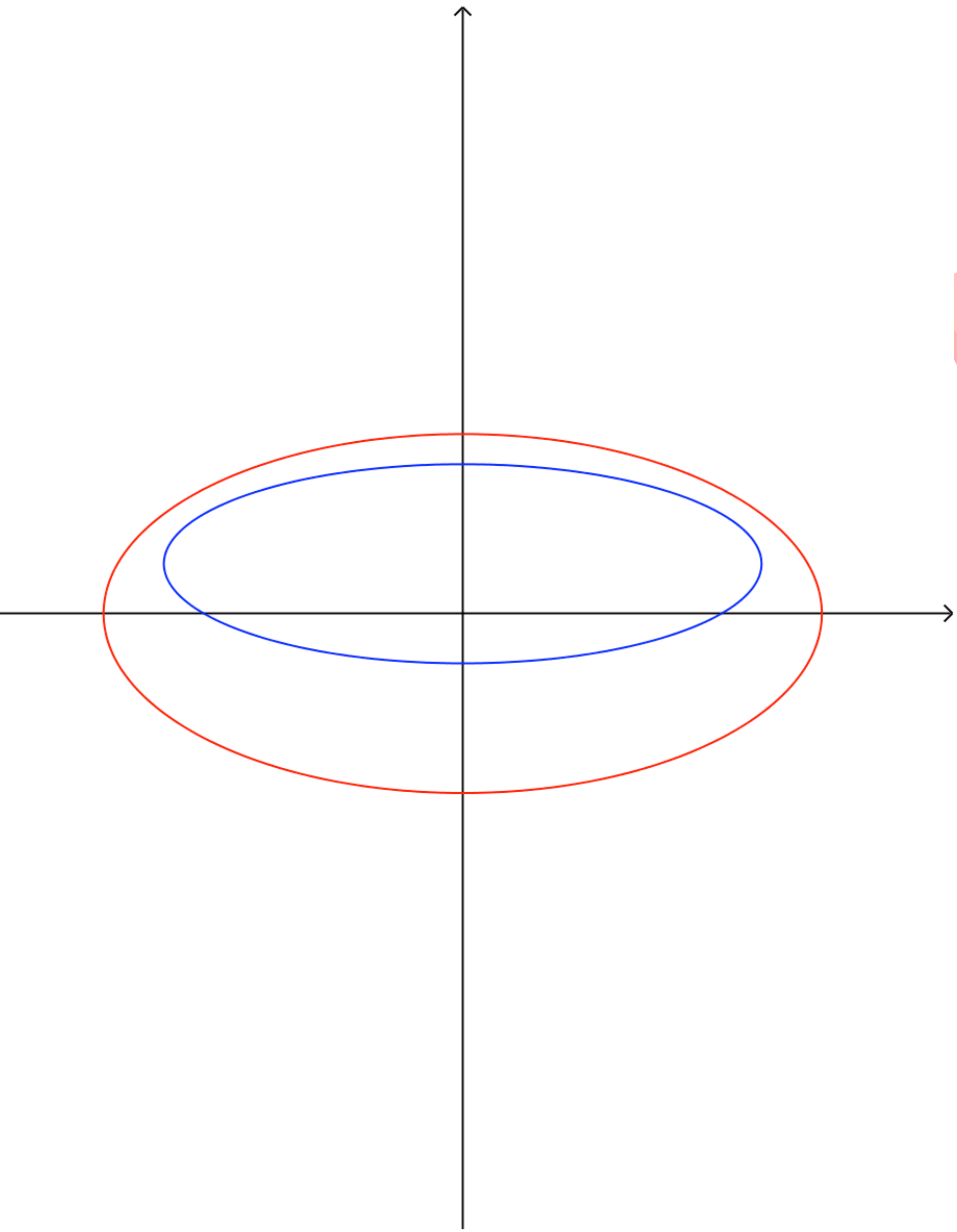
comme une courbe de niveau de

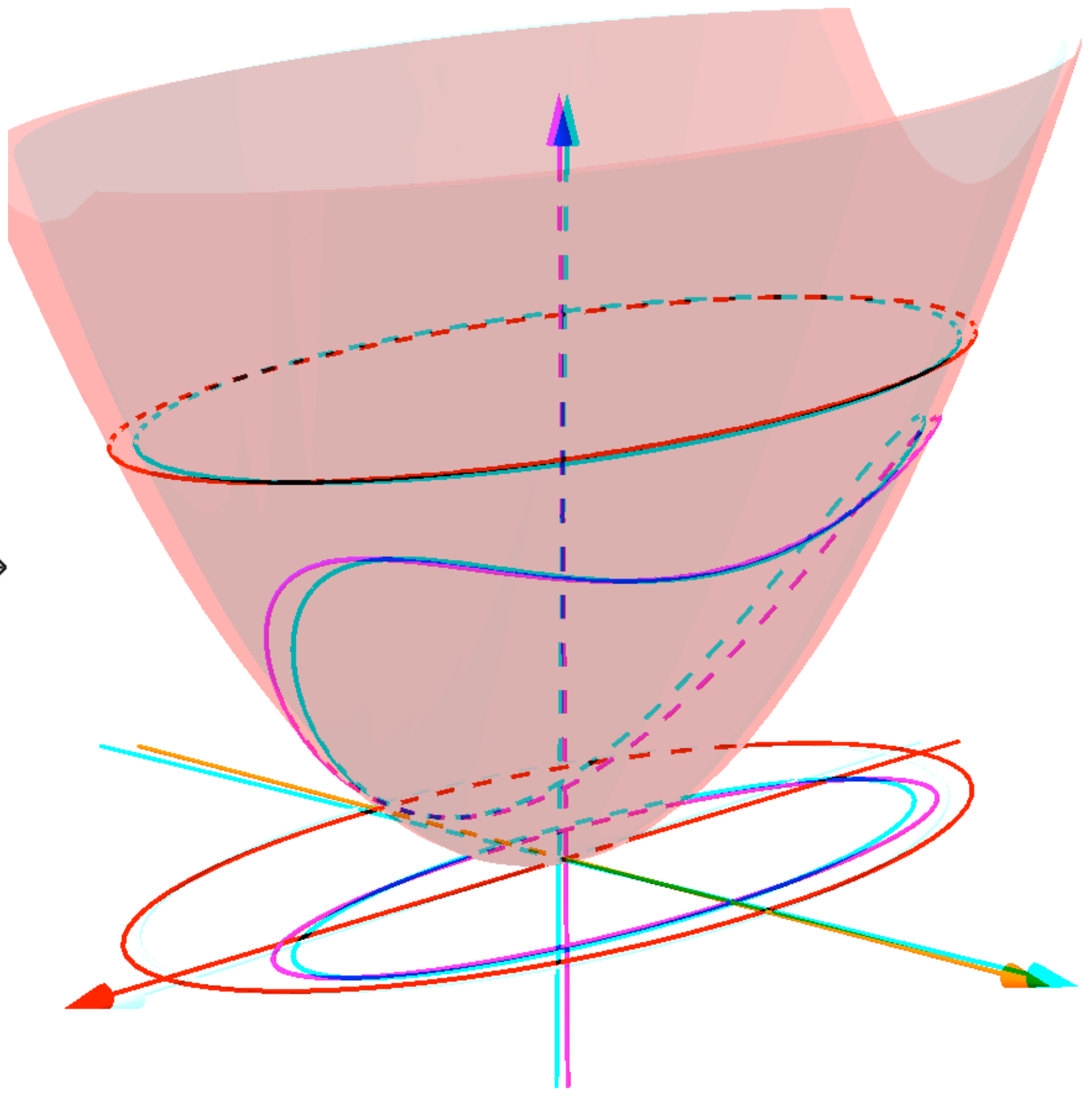
$$z = g(x, y)$$

On pourra donc regarder les gradients

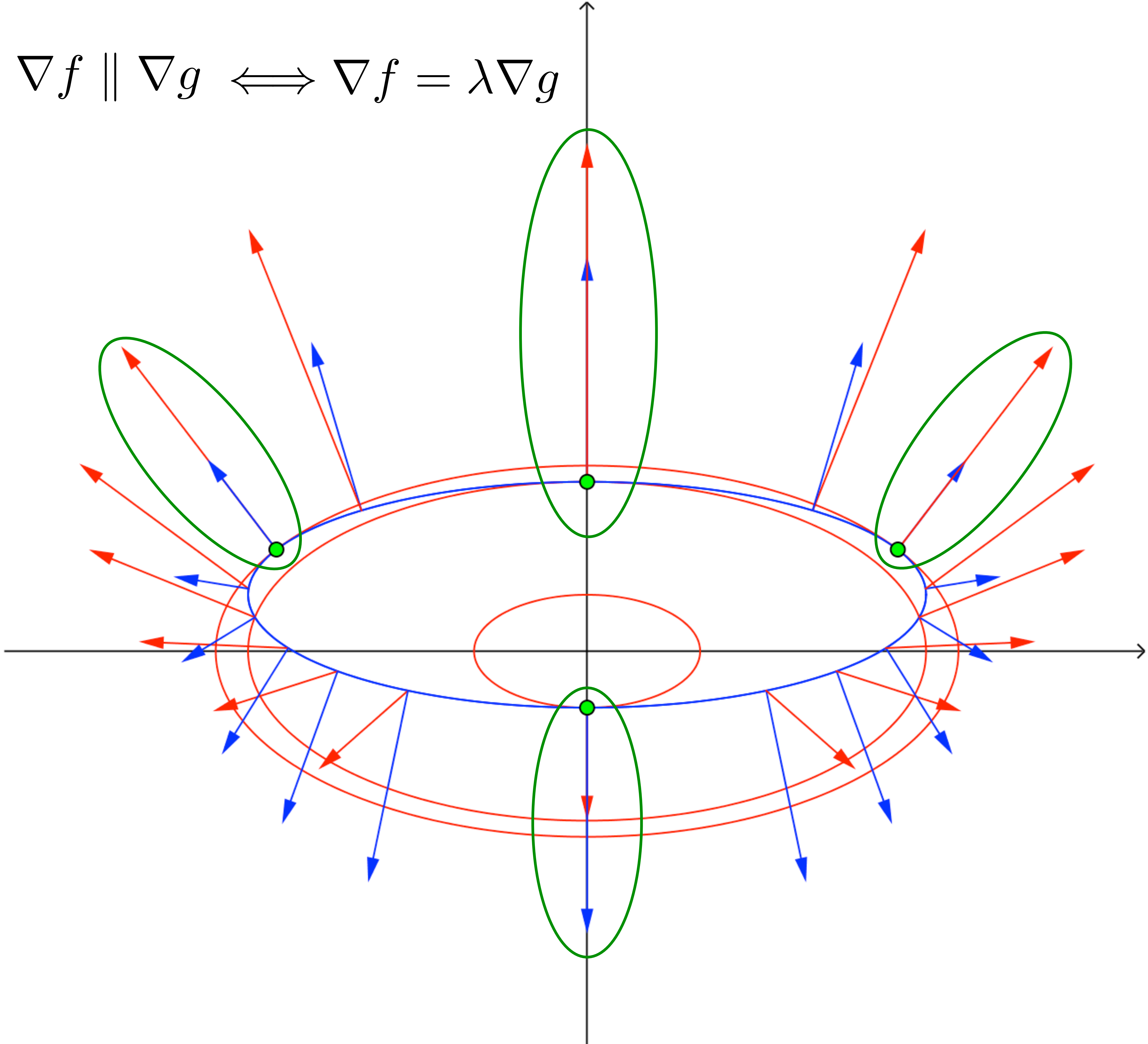
$$\nabla f \quad \text{et} \quad \nabla g$$







$$\nabla f \parallel \nabla g \iff \nabla f = \lambda \nabla g$$



Donc pour trouver les extrémums d'une fonction $f(x, y) = z$

soumis à une contrainte $g(x, y) = 0$

On cherche donc les points (a, b)

tels que

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

et

$$g(x, y) = 0$$

λ le multiplicateur de Lagrange

Le lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$\nabla L = \vec{0}$$

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

Exemple Trouver la plus petite distance entre l'origine et la courbe

$$x^2 y = 16$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad g(x,y) = x^2 y - 16$$

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 y - 16) \qquad \nabla L = \vec{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2xy\lambda = 2x(1+\lambda y) = 0 \implies \cancel{x = 0} \text{ ou } 1 + \lambda y = 0$$

$$\lambda y = -1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + x^2\lambda = 0 \implies 2y^2 + x^2 \lambda y = 0 \implies 2y^2 - x^2 = 0$$

$$\implies x^2 = 2y^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 y - 16 = 0 \implies 2y^3 = 16 \implies y = 2$$

$$\implies x = \pm 2\sqrt{2}$$

distance: $\sqrt{f(\pm 2\sqrt{2}, 2)} = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$

Faites les exercices suivants

p. 818 # 1, 3 à 6

(p. 819 # 1, 3 à 6)

On peut faire la même chose pour des fonctions à trois variables

$f(x,y,z)$ avec la contrainte $g(x,y,z)=0$

Mais l'interprétation géométrique est un peu plus compliquer à visualiser.

$g(x,y,z)=0$ est une surface de niveau

Les valeurs extrêmes se produiront lorsqu'une surfaces de niveau de $f(x,y,z)$ sera tangente à la surface de niveau $g(x,y,z)=0$

et donc leurs plans tangents seront confondus.

Donc leurs vecteurs normal seront parallèles.

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$$

Exemple Trouver les valeurs extrêmes de $f(x, y, z) = x + y - z$

sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + 2\lambda x = 0 \quad \Longrightarrow x = -\frac{1}{2\lambda} \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + 2\lambda y = 0 \quad \Longrightarrow y = -\frac{1}{2\lambda} \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= -1 + 2\lambda z = 0 \Longrightarrow z = \frac{1}{2\lambda}
\end{aligned}\right\} \quad x = y = -z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Exemple Trouver les valeurs extrêmes de $f(x, y, z) = x + y - z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$x = y = -z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow 3x^2 = 1 \quad \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \qquad \text{max}$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \qquad \text{min}$$

Faites les exercices suivants

p. 819 # 7 à 13

(p. 819 # 7 à 13)

Aujourd'hui, nous avons vu

- Extremums sur une région bornée
- Multiplicateur de Lagrange

Devoir:

p. 810 # 27 à 32

p. 818 # 1, 3 à 13

(p. 810 # 25 à 30)

(p. 819 # 1, 3 à 13)