3.4 APPLICATIONS ET AIRE DE SURFACE

cours 20

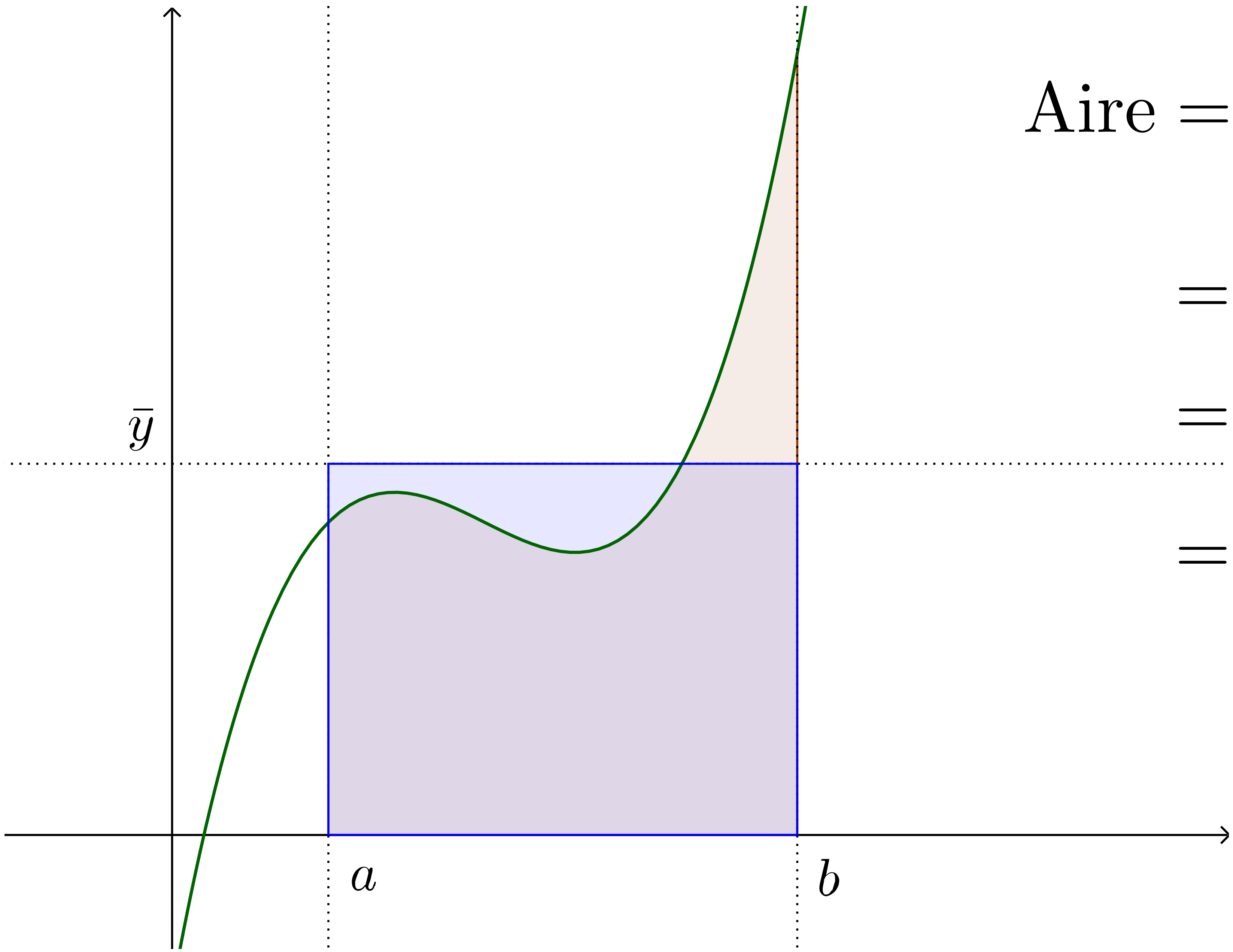
Au dernier cours, nous avons vu

- Coordonnées polaires.
- Changement de variables en coordonnées polaires.
- Une intégrale importante en probabilité.

Aujourd'hui, nous allons voir

- Applications de l'intégrale double.
- L'aire d'une surface.

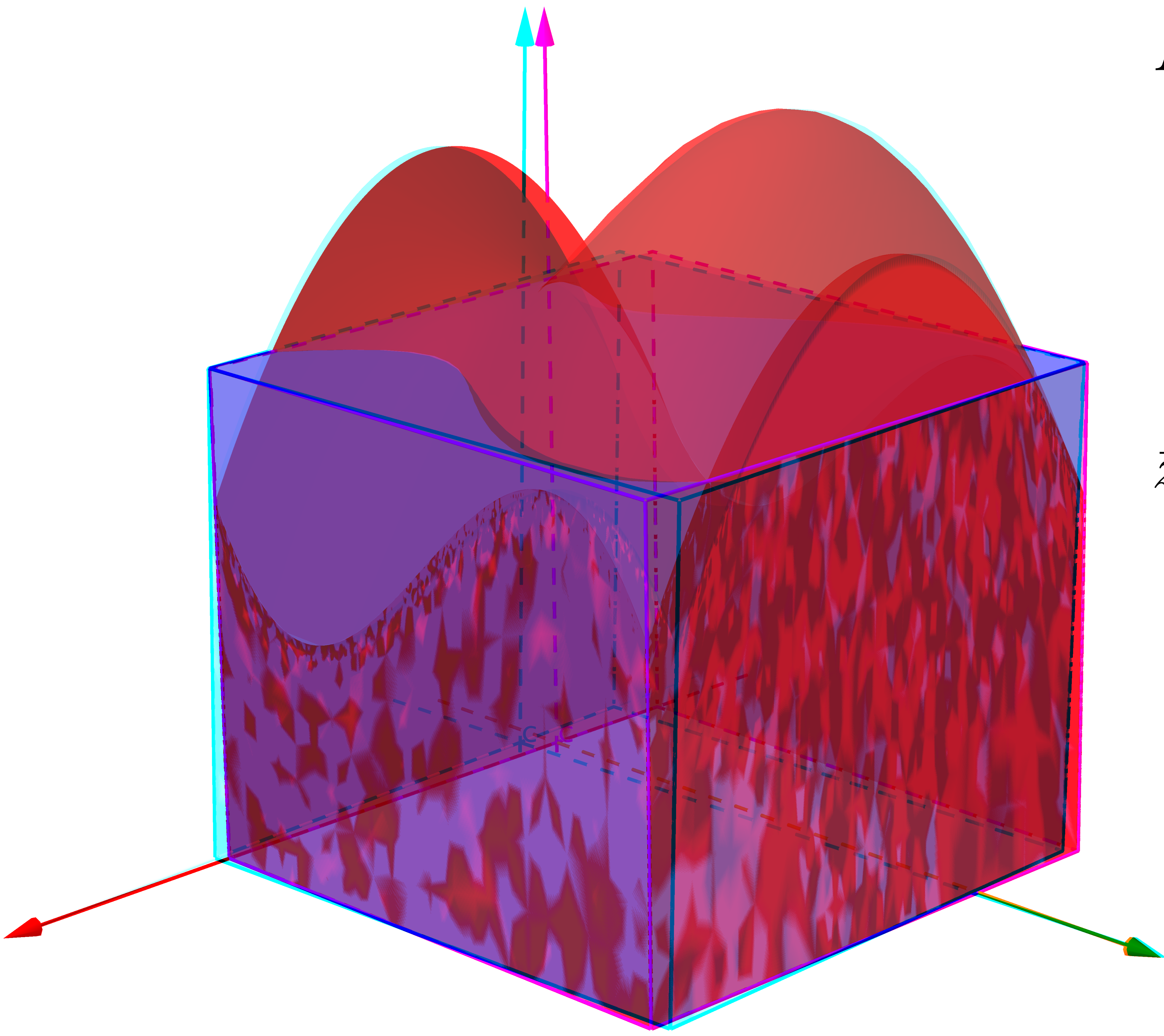
Valeur moyenne



$$\text{Aire} = \int_a^b f(x)dx$$
$$= \text{base} \times \text{hauteur}$$
$$= (b-a) \times \text{hauteur}$$
$$= (b-a) \times \bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\text{Volume} = \iint_R f(x,y)dV = \text{Aire}(R) \times \bar{z}$$



$$\text{Aire}(R) = \iint_R dV$$

$$\bar{z} = \frac{\iint_R f(x,y)dV}{\iint_R dV}$$

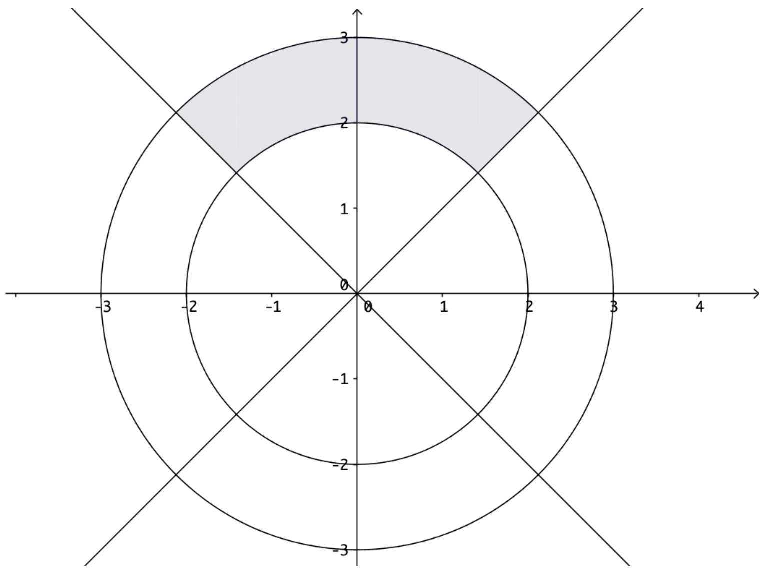
Exemple

Trouver la valeur moyenne de la fonction

$$f(x) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

sur la région délimitée par

$$y = x \qquad x^2+y^2 = 4$$
$$y = -x \qquad x^2+y^2 = 9$$
$$0 \leq y$$



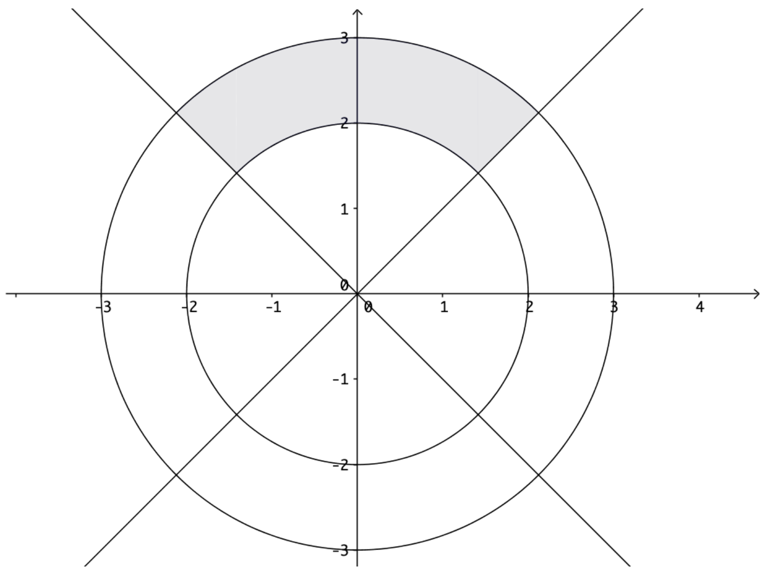
$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_2^3 r\ dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 5 d\theta = 5\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{2}$$

Exemple Trouver la valeur moyenne de la fonction

$$f(x) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

sur la région délimitée par

$$y = x \qquad x^2+y^2=4$$
$$y = -x \qquad x^2+y^2=9$$
$$0 \leq y$$



$$A = \frac{5\pi}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{2}{5\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_2^3 \frac{r\sin\theta}{r^2} r\ drd\theta = \frac{2}{5\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_2^3 \sin\theta\ drd\theta$$

$$= \frac{2}{5\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 5\sin\theta\ d\theta = \frac{2}{\pi}\left(-\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Faites les exercices suivants

p.858 # 33 et 34

Pour trouver la masse d'une plaque occupant une région R

$$M = \iint_R dm$$

Mais si la masse est répartie selon une fonction de densité

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

$$M = \iint_R \rho(x, y) dA$$

Exemple Trouver la masse d'un disque de rayon 2 dont la densité est donnée par

$$\rho(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r}{1 + r^2} dr d\theta$$

$$u = 1 + r^2$$

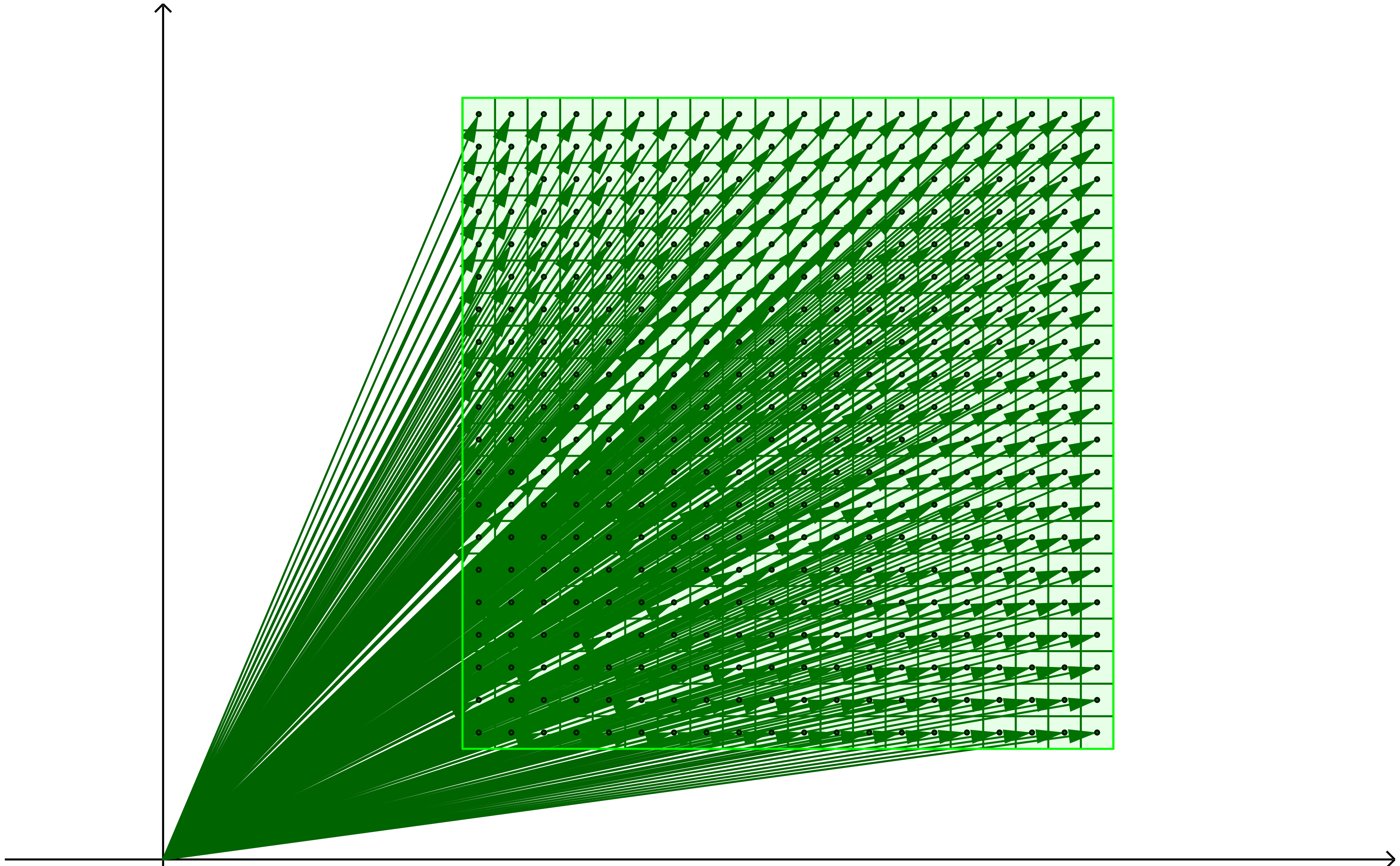
$$du = 2r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \left. \frac{\ln|1 + r^2|}{2} \right|_0^2 d\theta \quad = \int_0^{2\pi} \frac{\ln 5}{2} d\theta = \pi \ln 5$$

En algèbre linéaire, on a vu comment trouver le barycentre d'un ensemble de points.

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OP}_k$$

Mais qu'arrive-t-il si le nombre de points est infini?



$$\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i, y_j) = \left(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i, \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\right)$$

$$= \left(\frac{1}{nm\Delta A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\Delta A, \frac{1}{nm\Delta A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\Delta A\right)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i, y_j)
&= \left(\frac{1}{nm\Delta A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \Delta A, \frac{1}{nm\Delta A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \Delta A\right) \\
&= \left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \Delta A, \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \Delta A\right) \\
&= \left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \Delta x_i \Delta y_j, \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \Delta x_i \Delta y_j\right)
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i, y_j) = \left(\frac{\iint_R x \; dxdy}{\iint_R \; dxdy}, \frac{\iint_R y \; dxdy}{\iint_R \; dxdy}\right)
$$

En jumelant cette idée et celle de la masse, on peut trouver le centre de masse.

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\iint_R x\rho(x,y)\ dxdy}{\displaystyle\iint_R \rho(x,y)\ dxdy} \qquad \bar{y} = \frac{\displaystyle\iint_R y\rho(x,y)\ dxdy}{\displaystyle\iint_R \rho(x,y)\ dxdy}$$

Exemple Une plaque à une forme d'un secteur circulaire de rayon 3 et d'angle d'ouverture $\frac{\pi}{3}$.

Trouver son centre de masse si sa densité en chaque point est 2 fois le carré de sa distance au centre.

$$\rho(x,y) = 2(x^2+y^2) = 2r^2$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^3 2r^2 \; r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^4}{2}\Big|_0^3 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3^4}{2} d\theta = \frac{27\pi}{2}$$

Exemple Une plaque à une forme d'un secteur circulaire de rayon 3 et d'angle d'ouverture $\frac{\pi}{3}$.

Trouver son centre de masse si sa densité en chaque point est 2 fois le carré de sa distance au centre.

$$\rho(x,y) = 2(x^2+y^2) = 2r^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad M = \frac{27\pi}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{27\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^3 2r^4\cos\theta \; dr d\theta = \frac{4}{3^3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3^5}{5}\cos\theta \; d\theta$$

$$= \frac{4\cdot 3^2}{5\pi}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\right) = \frac{18\sqrt{3}}{5\pi}$$

Exemple Une plaque à une forme d'un secteur circulaire de rayon 3 et d'angle d'ouverture $\frac{\pi}{3}$.

Trouver son centre de masse si sa densité en chaque point est 2 fois le carré de sa distance au centre.

$$\rho(x,y) = 2(x^2+y^2) = 2r^2 \qquad y = r\sin\theta \qquad M = \frac{27\pi}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{18\sqrt{3}}{5\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{27\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^3 2r^4\sin\theta\ drd\theta$$

$$= \frac{36}{5\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\ d\theta = \frac{36}{5\pi}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 0\right) = \frac{18}{5\pi}$$

Exemple Une plaque à une forme d'un secteur circulaire de rayon 3 et d'angle d'ouverture $\frac{\pi}{3}$.

Trouver son centre de masse si sa densité en chaque point est 2 fois le carré de sa distance au centre.

$$\rho(x, y) = 2(x^2 + y^2) = 2r^2 \qquad y = r\sin\theta$$

$$M = \frac{27\pi}{2}$$

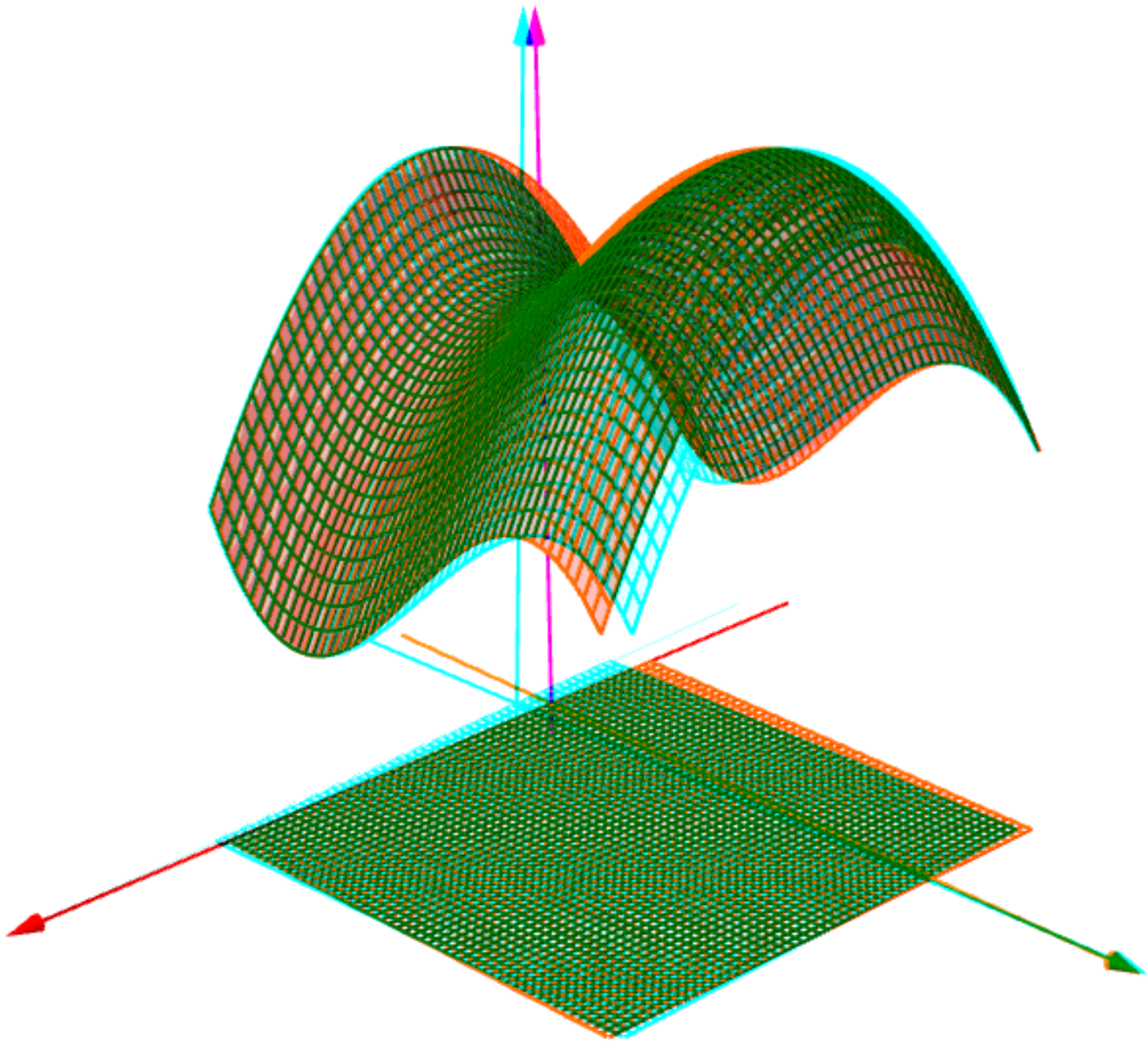
$$\bar{x} = \frac{18\sqrt{3}}{5\pi} \qquad \bar{y} = \frac{18}{5\pi}$$

Faites les exercices suivants

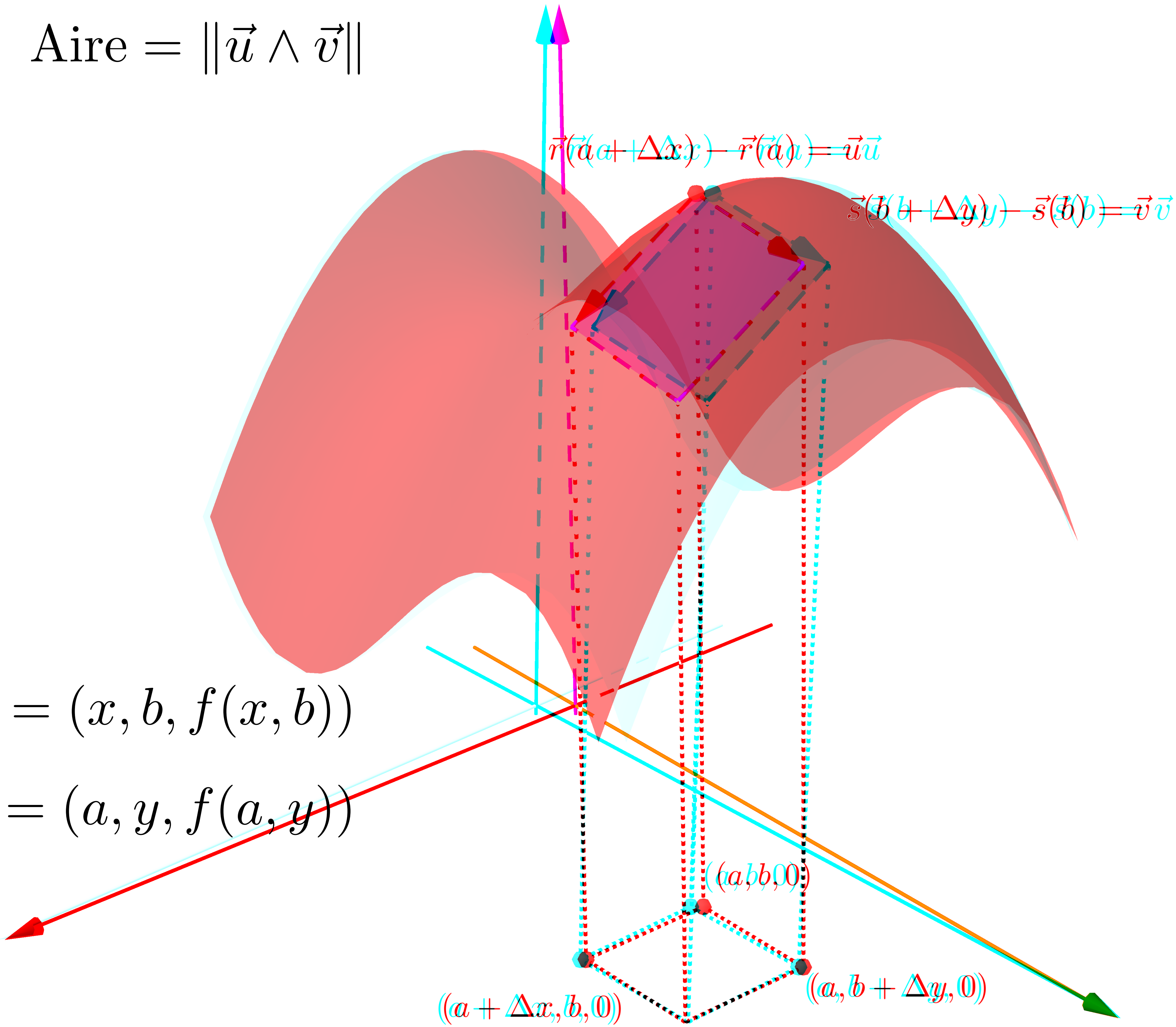
p.866 # 3 à 10

p.867 # 3 à 10

Aire d'une surface



$$\text{Aire} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$



$$\vec{r}(x) = (x, b, f(x, b))$$

$$\vec{s}(y) = (a, y, f(a, y))$$

$$\vec{u} = \vec{r}(a + \Delta x) - \vec{r}(a) \; = \; \frac{\vec{r}(a + \Delta x) - \vec{r}(a)}{\Delta x} \Delta x$$

$$\vec{v} = \vec{s}(b + \Delta y) - \vec{s}(b) \; = \; \frac{\vec{s}(b + \Delta y) - \vec{s}(b)}{\Delta y} \Delta y$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \left\| \left(\frac{\vec{r}(a + \Delta x) - \vec{r}(a)}{\Delta x} \Delta x \right) \wedge \left(\frac{\vec{s}(b + \Delta y) - \vec{s}(b)}{\Delta y} \Delta y \right) \right\|$$

$$= \left\| \left(\frac{\vec{r}(a + \Delta x) - \vec{r}(a)}{\Delta x} \right) \wedge \left(\frac{\vec{s}(b + \Delta y) - \vec{s}(b)}{\Delta y} \right) \right\| \Delta x \Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{r}\,'(a) \wedge \vec{s}\,'(b)\| dx dy$$

$$\vec{r}(x) = (x, b, f(x, b)) \qquad \vec{s}(y) = (a, y, f(a, y))$$

$$\vec{r}\,'(x) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \vec{s}\,'(y) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\vec{r}\,'(x) \wedge \vec{s}\,'(y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\|\vec{r}\,'(x) \wedge \vec{s}\,'(y)\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Donc la somme de Riemann

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left\| \left(\frac{\vec{r}(x_i + \Delta x_i) - \vec{r}(x_i)}{\Delta x_i} \right) \wedge \left(\frac{\vec{s}(y_j + \Delta y_j) - \vec{s}(y_j)}{\Delta y_j} \right) \right\| \Delta x_i \Delta y_j$$

nous donnes

$$\text{Aire} = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Exemple

Calculer l'aire du plan $f(x, y) = 2x - 3y + 7$

dans le rectangle $1 \leq x \leq 3$ $0 \leq y \leq 2$

$$f_x = 2 \qquad f_y = -3$$

$$\int_1^3 \int_0^2 \sqrt{1 + 2^2 + 3^2}\,dydx = \int_1^3 2\sqrt{14}\,dx$$

$$= 2\sqrt{14}x\Big|_1^3$$

$$= 4\sqrt{14}$$

Exemple

Calculer l'aire d'une sphère

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Exemple Calculer l'aire d'une sphère

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$2\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$u = R^2 - r^2$$

$$du = -2rdr$$

$$= 2R\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}drd\theta$$

$$= R\int_0^{2\pi}\left(-2\sqrt{R^2 - r^2}\Big|_0^R\right)d\theta = R\int_0^{2\pi} 2Rd\theta = 4\pi R^2$$

Faites les exercices suivants

p.871 # 1, 2, 3, 5 et 6

p.871 # 1, 2, 3, 5 et 6

Aujourd'hui, nous avons vu

- Applications de l'intégrale double.
- L'aire d'une surface.

Devoir:

p.858 # 33 et 34

p.866 # 3 à 10

p.871 # 1, 2, 3, 5 et 6

p.867 # 3 à 10

p.871 # 1, 2, 3, 5 et 6