3.4 INTÉGRALE TRIPLE

cours 21

Au dernier cours, nous avons vu

- Applications de l’intégrale double.
- L’aire d’une surface.

Aujourd'hui, nous allons voir

- Intégrale triple
- Type I, II et III
- Volumes
- Applications

On sait déjà qu'il est difficile de visualiser les fonctions à plus de deux variables.

$$w = f(x, y, z)$$

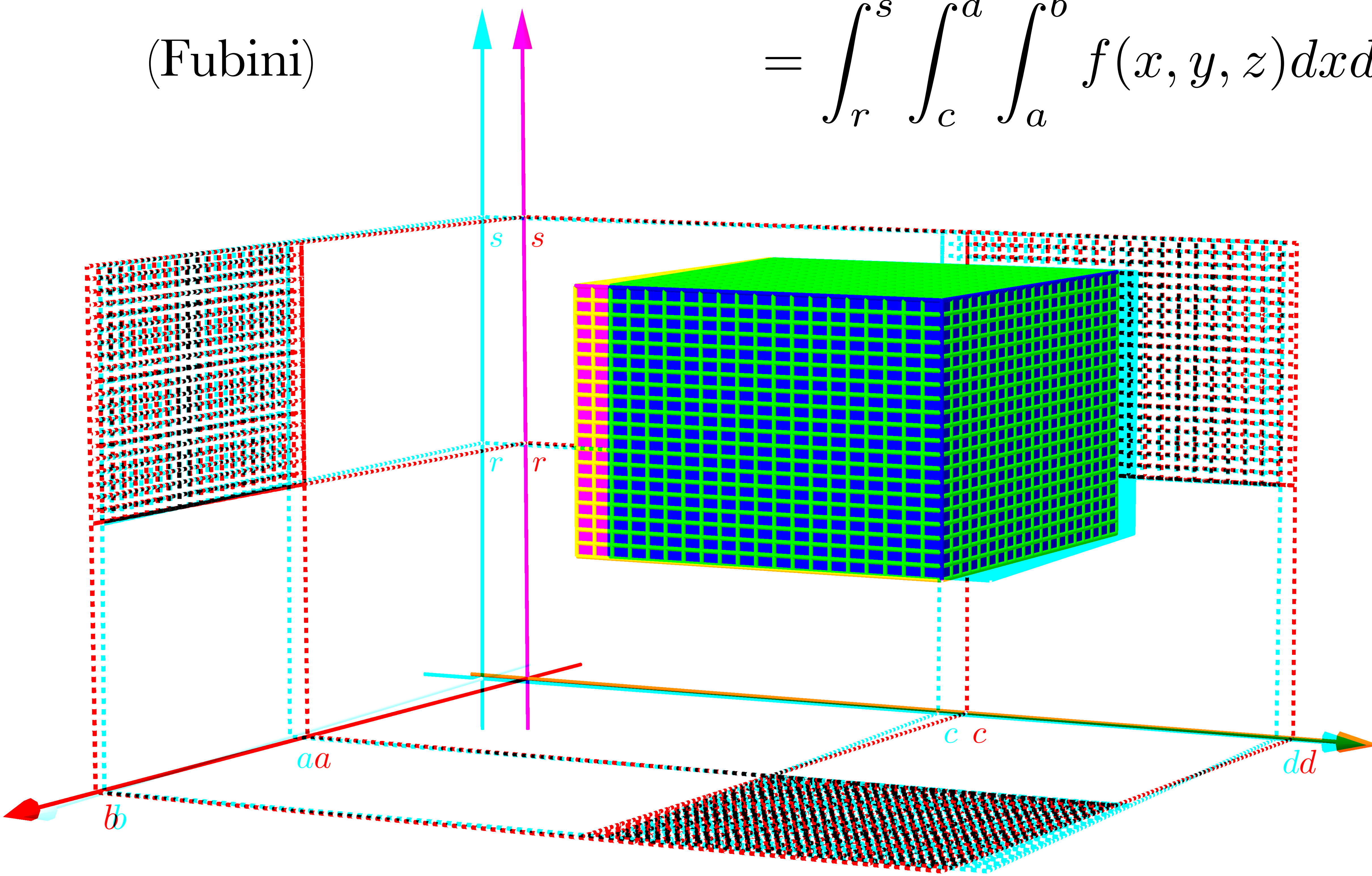
Car son graphe est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$.

Malgré ça, les idées développées pour l'intégrale double se généralisent très bien.

$$\lim_{n,m,l\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V = \iiint_B f(x,y,z)dV$$

(Fubini)

$$= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$



Exemple

$$\int_2^3 \int_0^2 \int_1^2 x^2yz \; dxdydz = \int_2^3 \int_0^2 \frac{x^3yz}{3}\Big|_1^2 dydz$$

$$= \int_2^3 \int_0^2 \frac{(2^3 - 1^3)yz}{3} dydz = \frac{7}{3} \int_2^3 \int_0^2 yzdydz$$

$$= \frac{7}{3} \int_2^3 \frac{y^2z}{2}\Big|_0^2 dz = \frac{7}{3} \int_2^3 \frac{(2^2 - 0^2)z}{2} dz = \frac{14}{3} \int_2^3 zdz$$

$$= \frac{14}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) = \frac{35}{3}$$

Exemple

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R} 3 + x^3 + 4\sin z \; dV$$

$$= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R} 3 \; dV + \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R} x^3 \; dV + \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R} 4\sin z \; dV$$

$$= 4\pi R^3$$

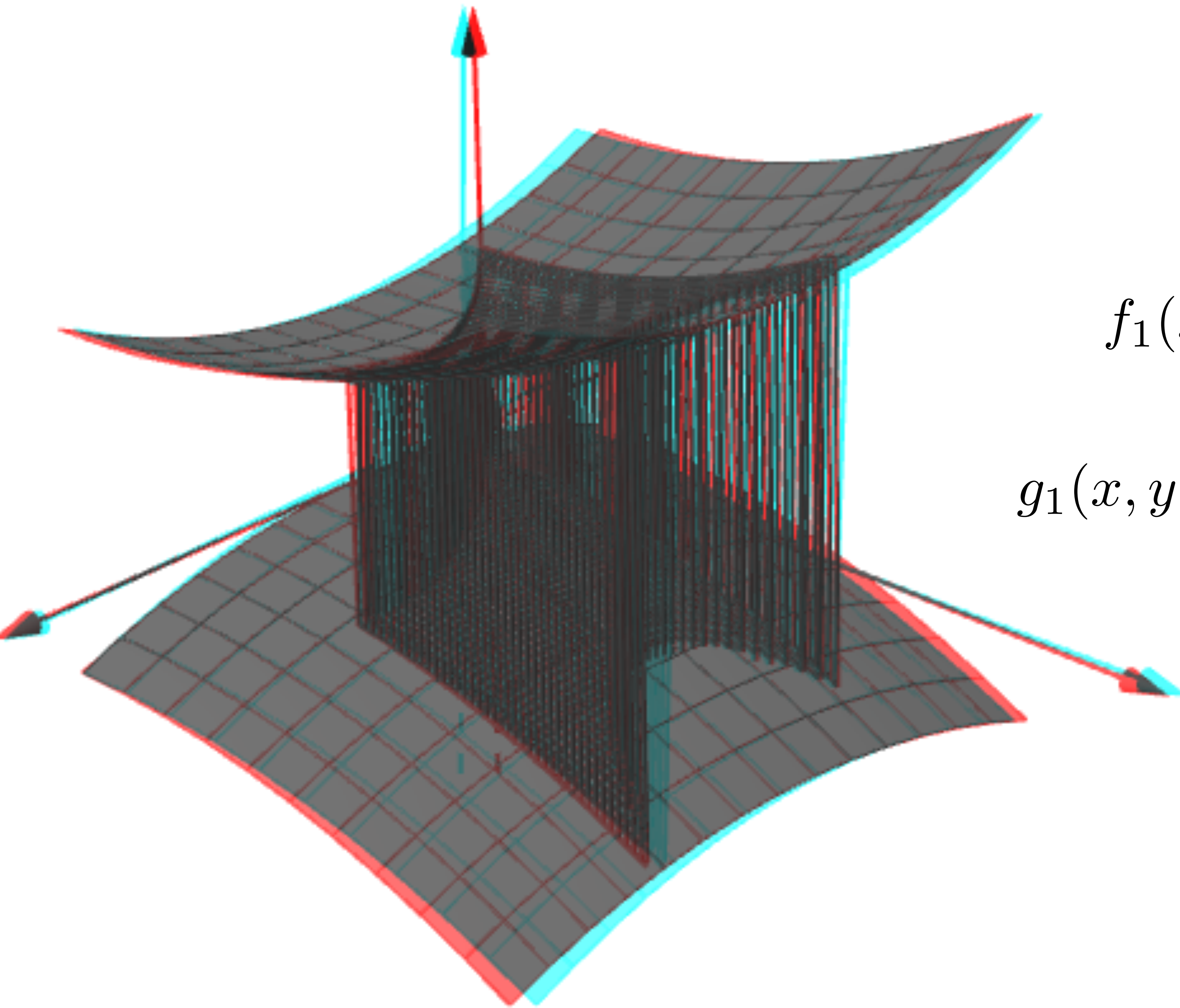
3 fois le volume de la sphère

0 car fonction impaire.

Faites les exercices suivants

p. 880 # 1 et 2

p. 880 # 1 et 2



Type I

$$a \le x \le b$$

$$f_1(x) \le y \le f_2(x)$$

$$g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$$

Type I

$$a \le x \le b \qquad c \le y \le d$$

$$f_1(x) \le y \le f_2(x) \qquad f_1(y) \le x \le f_2(y)$$

$$g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y) \qquad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)$$

Type II

$$g_1(y, z) \le x \le g_2(y, z)$$

Type III

$$g_1(x, z) \le y \le g_2(x, z)$$

Exemple $$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} \int_{-1}^{x-y} xy + z \; dzdydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-x}^{x^2} xyz + \frac{z^2}{2}\bigg|_{-1}^{x-y} dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-x}^{x^2} xy(x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + xy - \frac{1}{2} dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-x}^{x^2} x^2y - xy^2 + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} + xy - \frac{1}{2} \; dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-x}^{x^2} x^2y - xy^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1}{2} \; dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} - \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{6} - \frac{y}{2}\bigg|_{-x}^{x^2} \; dx$$

Exemple $$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} \int_{-1}^{x-y} xy + z \; dzdydx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} - \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{6} - \frac{y}{2}\Bigg|_{-x}^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3(1-2x)}{6} + \frac{y(x^2-1)}{2}\Bigg|_{-x}^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^6(1-2x)}{6} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3(1-2x)}{6} - \frac{x(x^2-1)}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} \; dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^4}{3} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \; dx$$

Exemple

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} \int_{-1}^{x-y} xy + z \; dz dy dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^4}{3} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \; dx$$

$$= \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{42} - \frac{x^8}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} \bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{42} - \frac{1}{24} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{42} - \frac{7}{42} - \frac{1}{4} = \frac{8}{60} - \frac{6}{42} - \frac{15}{60} = -\frac{1}{7} - \frac{7}{60}$$

$$= -\frac{60}{420} - \frac{49}{420} = -\frac{109}{420}$$

Faites les exercices suivants

p.880 # 3 à 8

p.880 # 3 à 6

Exemple $\displaystyle\iiint_E xy\ dV$ où E est le tétraèdre de sommets

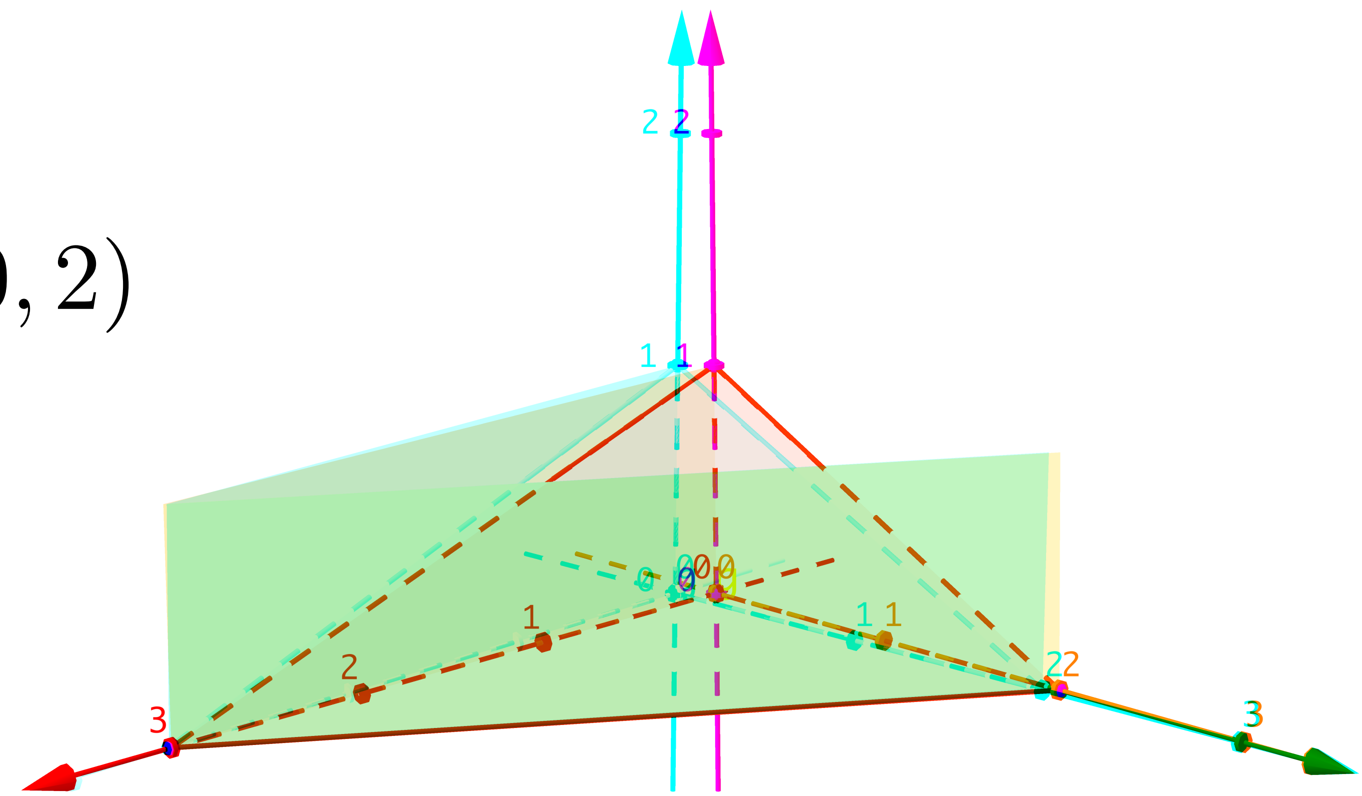
$(0,0,0) \quad (3,0,0) \quad (0,2,0) \quad (0,0,1)$

$$0 \leq x \leq 3$$

La droite passant par $(3,0)$ $(0,2)$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$0 \leq y \leq -\frac{2}{3}x + 2$$



L'équation du plan $\displaystyle\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1 \implies z = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$

$$0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$

Exemple $\iiint_E xy\, dV$ où E est le tétraèdre de sommets

$(0,0,0) \quad (3,0,0) \quad (0,2,0) \quad (0,0,1)$

$$0 \le x \le 3 \qquad 0 \le y \le -\frac{2}{3}x + 2 \qquad 0 \le z \le 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$

$$\int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} xy\; dzdydx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} xy\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\; dydx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} \left(x - \frac{x^2}{3}\right) y - \frac{xy^2}{2}\; dydx$$

$$= \int_0^3 \left(x - \frac{x^2}{3}\right)\frac{y^2}{2} - \frac{xy^3}{6}\bigg|_0^{-\frac{2}{3}x+2}\; dx$$

Exemple $\displaystyle\iiint_E xy\;dV$ où E est le tétraèdre de sommets

$(0,0,0)$ $(3,0,0)$ $(0,2,0)$ $(0,0,1)$

$$\int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2}\int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} xy\;dzdydx$$

$$=\int_0^3 \left(x-\frac{x^2}{3}\right)\frac{y^2}{2}-\frac{xy^3}{6}\Bigg|_0^{-\frac{2}{3}x+2}\;dx$$

$$=\int_0^3 \left(x-\frac{x^2}{3}\right)\frac{\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^2}{2}-\frac{x\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^3}{6}\;dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^3 (3x-x^2)\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^2-x\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^3\;dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^3 (3x-x^2)\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x+4\right)-x\left(-\frac{8}{27}x^3+\frac{8}{3}x^2-8x+8\right)\;dx$$

Exemple $\displaystyle\iiint_E xy\,dV$ où E est le tétraèdre de sommets

$(0,0,0)\quad(3,0,0)\quad(0,2,0)\quad(0,0,1)$

$$\int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2}\int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} xy\ dzdydx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^3 (3x-x^2)\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x+4\right)-x\left(-\frac{8}{27}x^3+\frac{8}{3}x^2-8x+8\right)\ dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^3 \frac{4}{3}x^3-8x^2+12x-\frac{4}{9}x^4+\frac{8}{3}x^3-4x^2+\frac{8}{27}x^4-\frac{8}{3}x^3+8x^2+8x\ dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^3 -\frac{4}{27}x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+20x\ dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(-\frac{4x^5}{5\ 3^3}+\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3}+10x^2\bigg|_0^3\right)$$

Exemple $\iiint_E xy\ dV$ où E est le tétraèdre de sommets

$(0,0,0) \quad (3,0,0) \quad (0,2,0) \quad (0,0,1)$

$$\int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} xy\ dzdydx$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{4x^5}{5\ 3^3} + \frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3} + 10x^2\Big|_0^3\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{36}{5} + 27 - 36 + 90\right) \quad = \frac{1}{6}\left(-\frac{36}{5} + 99\right)$$

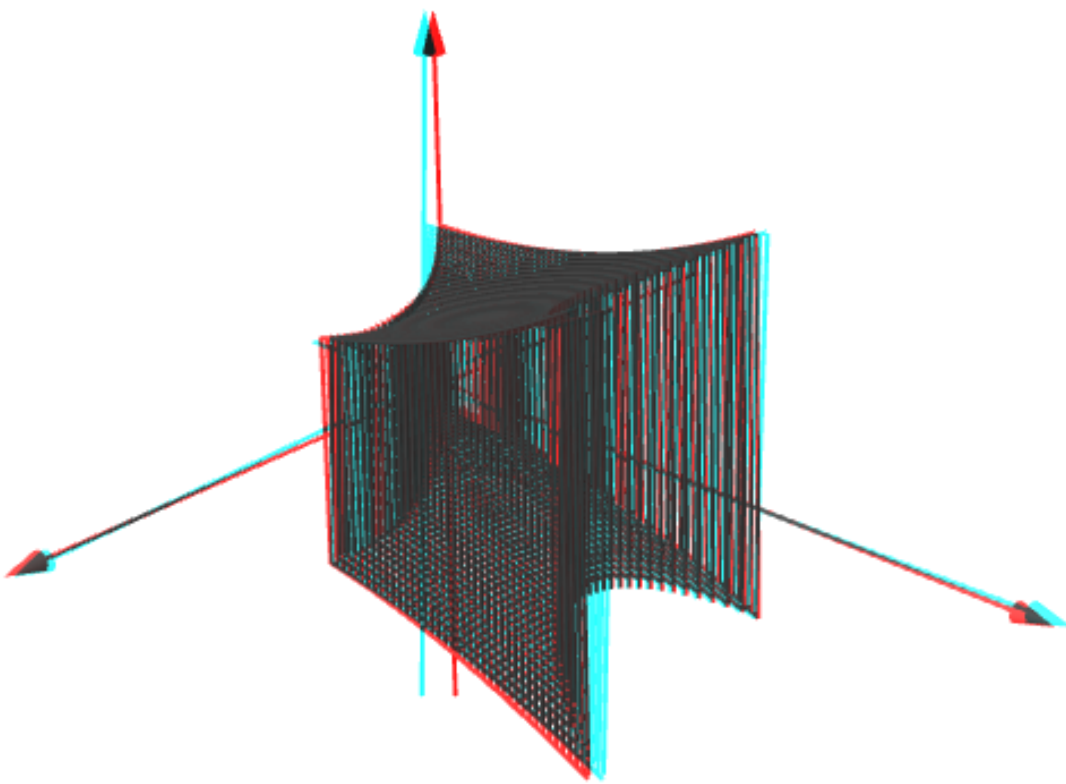
$$= \frac{495-36}{30} = \frac{459}{30} = \frac{153}{10}$$

Faites les exercices suivants

p. 880 # 9 à 18

p. 880 # 7 à 16

De la même manière dont on a utilisé l’intégrale double pour calculer l’aire d’une région, on peut utiliser l’intégrale triple pour calculer un volume.



$$V = \iiint_E dV$$

Exemple Calculer le volume du tétraèdre de sommets

$$(0,0,0) \quad (3,0,0) \quad (0,2,0) \quad (0,0,1)$$

$$0 \leq x \leq 3 \qquad 0 \leq y \leq -\frac{2}{3}x + 2 \qquad 0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$

$$\int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} dzdydx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} \, dydx$$

$$= \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) y - \frac{y^2}{4} \Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx$$

$$= \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) - \frac{\left(-\frac{2}{3}x + 2\right)^2}{4} \, dx$$

Exemple

Calculer le volume du tétraèdre de sommets

$$(0,0,0) \quad (3,0,0) \quad (0,2,0) \quad (0,0,1)$$

$$\int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} dzdydx$$

$$= \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) - \frac{\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^2}{4}\, dx$$

$$= \int_0^3 -\frac{2}{3}x + 2 + \frac{2x^2}{9} - \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}x - 1\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1\, dx \quad = \frac{x^3}{3^3} - \frac{x^2}{3} + x \Big|_0^3$$

$$= 1 - 3 + 3 \quad = 1$$

Faites les exercices suivants

p.881 # 19 à 22

p.880 # 17 à 20

Naturellement, on peut se demander l'intérêt de calculer un hypervolume d'un objet de dimension 4.

Bien que l'intégrale permette de résoudre des problèmes de géométrie, la géométrie n'est pas son seul champ d'application.

Par exemple

$$M = \iiint_E \rho(x, y, z)\ dV$$

nous permet de calculer une masse.

Et les objets dont on cherche la masse sont habituellement de dimension 3!

Faites les exercices suivants

p. 881 # 35 à 38

p. 882 # 37 à 40

Aujourd’hui, nous avons vu

- Intégrale triple
- Type I, II et III
- Volumes
- Applications

Devoir:

p.881 # 1 à 22 et 35 à 38

p.880 # 1 à 20 et 37 à 40