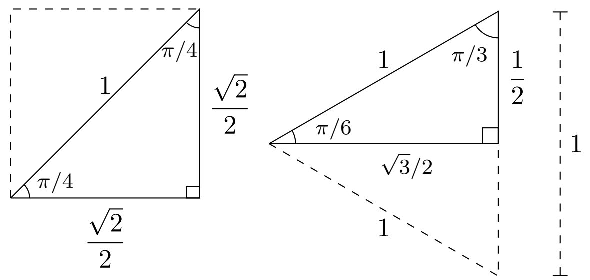
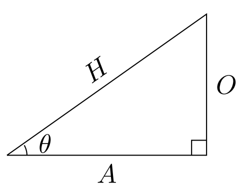
Formulaire de trigonométrie

Triangles remarquables



Rapports trigonométriques



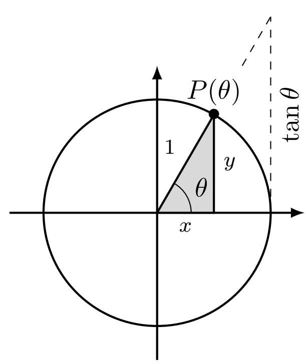
$$\sin(\theta) = \frac{O}{H}$$

$$\cos(\theta) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\theta) = \frac{O}{A}$$

Cercle trigonométrique

On défini les six relations trigonométriques suivantes :



$$\cos\theta = x \qquad \sin\theta = y \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} \qquad \csc\theta = \frac{1}{y} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Identités fondamentales

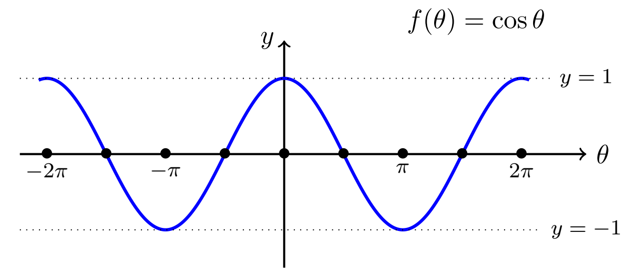
Les identités suivantes découlent directement du théorème de Pythagore et des définitions précédentes.

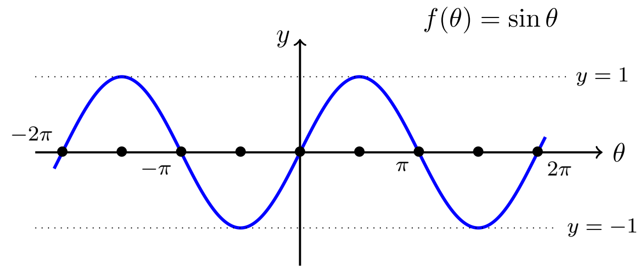
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

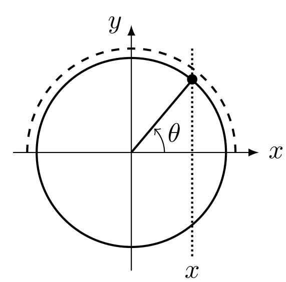
Fonctions trigonométriques





Rapports trigonométriques inverses

Les fonctions trigonométriques inverses permettent de trouver l'angle θ associé à un rapport trigonométrique connu.



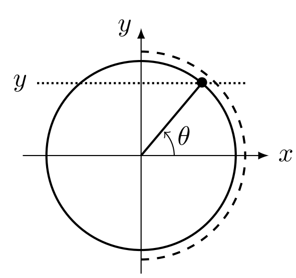
$x = \cos(\theta)$

alors

$\theta = \arccos(x)$

avec

$\theta \in [0, \pi]$



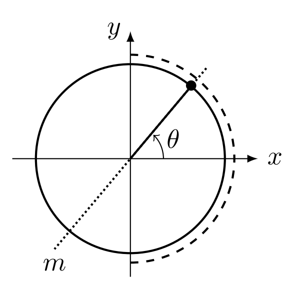
$y = \sin(\theta)$

alors

$\theta = \arcsin(x)$

avec

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$m = \tan(\theta)$

alors

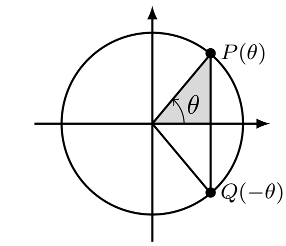
$\theta = \arctan(x)$

avec

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

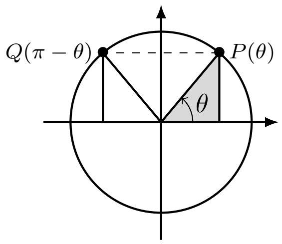
Symétries par réflexions

Les figures suivantes illustrent la réflexion Q du point $P(\theta)$ par rapport aux axes de coordonnées.



$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

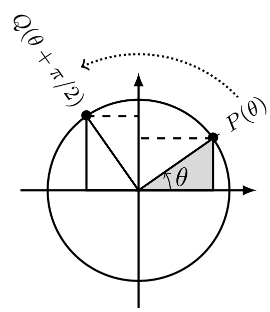


$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

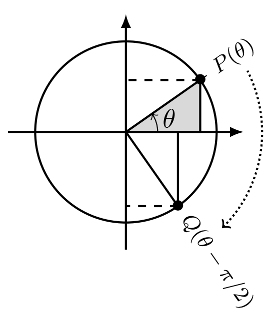
Symétries par rotations

La figure suivante illustre la rotation du point $P(\theta)$ par rapport au centre par un multiple de $\dfrac{\pi}{2}$.



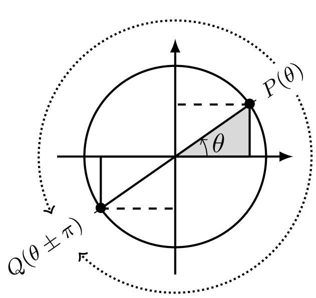
$$\cos(\theta + \pi/2) = -\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$$



$$\cos(\theta - \pi/2) = \sin(\theta)$$

$$\sin(\theta - \pi/2) = -\cos(\theta)$$

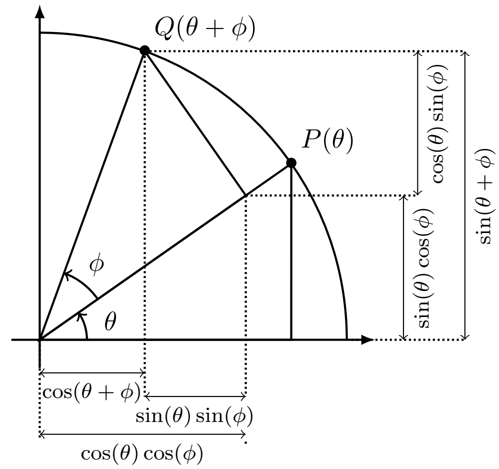


$$\cos(\theta \pm \pi) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta \pm \pi) = -\sin(\theta)$$

Identités trigonométriques

Toutes les identités trigonométriques que nous utiliserons par la suite peuvent être obtenues à l'aide du croquis suivant.



Sommes d'angles

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$$

Multiples d'angles

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

Carrés de sinus et cosinus

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$
$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

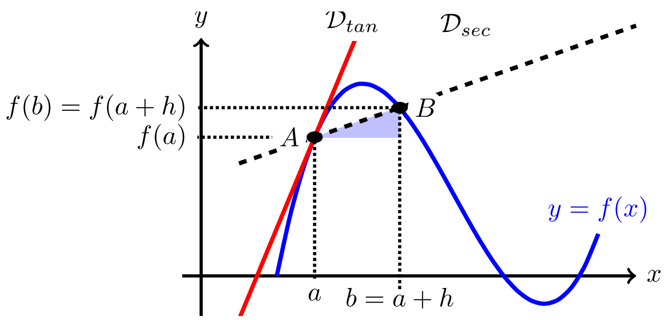
Produits de sinus et cosinus

$$\sin(\theta)\cos(\varphi) = \frac{\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)}{2}$$
$$\cos(\theta)\sin(\varphi) = \frac{\sin(\theta - \varphi) - \sin(\theta + \varphi)}{2}$$
$$\cos(\theta)\cos(\varphi) = \frac{\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)}{2}$$
$$\sin(\theta)\sin(\varphi) = \frac{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)}{2}$$

Formulaire de dérivation

Définition de la dérivée

Considérons une fonction $f(x)$ continue dans un voisinage de $x = a$.



La fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ est

$$m_{tan}(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

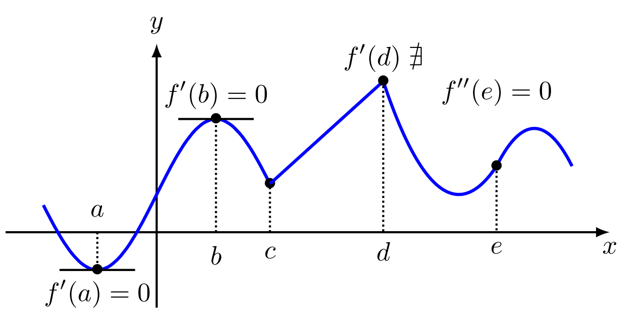
pourvu que cette limite existe.

Le taux de variation instantanée (TVI) de la fonction $f(x)$en $x = a$ correspond à la pente de la tangente en ce point.

$$TVI_a = m_{tan}(x = a) = f'(a)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x).$$

Dérivée, croissance et concavité



$$\begin{array}{lcll} f(x) & \nearrow & \Leftrightarrow & f'(x) \geq 0 \\ f(x) & \searrow & \Leftrightarrow & f'(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll} f(x) & \smile & \Leftrightarrow & f''(x) \geq 0 \\ f(x) & \frown & \Leftrightarrow & f''(x) \leq 0 \end{array}$$

$$f'(x) \nexists \quad \text{si} \quad x = c \quad \text{ou} \quad x = d$$

Propriétés de la dérivée

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables avec k et n des nombres réels.

$$\begin{aligned}
\big(k\big)' &= 0 \\
\big(x^n\big)' &= nx^{n-1} \\
\Big(k\ f(x)\Big)' &= k\ f'(x) \\
\Big(f(x) + g(x)\Big)' &= f'(x) + g'(x) \\
\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} \\
\Big(f\Big(g(x)\Big)\Big)' &= f'\Big(g(x)\Big) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques

$$\begin{array}{ll}
\big(\sin x\big)' = \cos x & \big(\csc x\big)' = -\csc x \cot x \\
\big(\cos x\big)' = -\sin x & \big(\sec x\big)' = \sec x \tan x \\
\big(\tan x\big)' = \sec^2 x & \big(\cot x\big)' = -\csc^2 x
\end{array}$$

Fonctions trigonométriques inverses

$$\begin{array}{ll}
\big(\arcsin x\big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \big(\text{arcsec}\ x\big)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \\
\big(\arccos x\big)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \big(\text{arccsc}\ x\big)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \\
\big(\arctan x\big)' = \dfrac{1}{1+x^2} & \big(\text{arccot}\ x\big)' = \dfrac{-1}{1+x^2}
\end{array}$$

Fonctions exponentielles et logarithmiques

$$\begin{array}{ll}
\big(b^x\big)' = k^x \cdot \ln b & \big(e^x\big)' = e^x \\
\big(\log_b x\big)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln b} & \big(\ln x\big)' = \dfrac{1}{x}
\end{array}$$

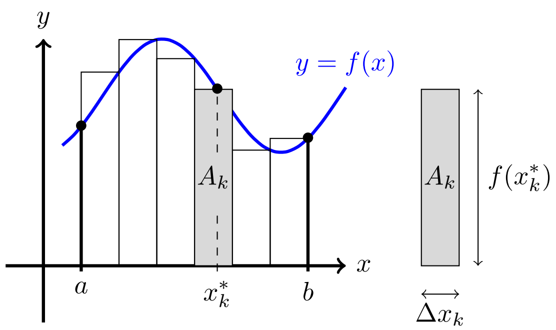
où b est un nombre réel positif tel que $b \neq 1$.

Formulaire d'intégration

Définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f'(x)dx = f(x) + C, \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

Intégrale définie et calcul d'aire



$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Théorème fondamental du calcul

Partie I : $\displaystyle\int_a^b f'(x)\, dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$

Partie II : $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x)$

Propriétés de l'intégrale définie

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Changement de variable

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

où $\quad u = g(x) \quad$ et $\quad du = g'(x)dx.$

Intégration par partie

$$\int_a^b u\; dv = \big(uv\big)\Big|_a^b - \int_a^b v\; du$$

Formules d'intégration de base

$$\int x^n\; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si} \quad a \neq -1$$

$$\int b^x\; dx = \frac{b^x}{\ln b} + C, \quad \text{si} \quad b > 0$$

$$\int \frac{1}{x}\; dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\; dx = -\cos x + C \qquad \int \csc^2 x\; dx = -\cot x + C$$

$$\int \cos x\; dx = \sin x + C \qquad \int \sec x \tan x\; dx = \sec x + C$$

$$\int \sec^2 x\; dx = \tan x + C \qquad \int \csc x \cot x\; dx = -\csc x + C$$

$$\int \tan x\; dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\; dx = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C$$

$$\int \sec x\; dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\; dx = \ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\; dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\; dx = \arctan x + C = -\text{arccot } x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\; dx = \text{arcsec} x + C = -\text{arccsc} x + C$$

Géométrie vectorielle

Base orthonormée de $\mathbb{R}^3$

Soit $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ une base othonormée de $\mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{u} = (a, b, c) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

et

$$\vec{v} = (d, e, f) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = e\vec{i} + d\vec{j} + f\vec{k}.$$

Opérations sur les composantes

- $\vec{u} + \vec{v} = (a + d, b + e, c + f)$
- $k\vec{u} = (ka, kb, kc), \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Norme et/ou module

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 0, \quad \forall \vec{u} \neq \vec{0}$$

Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$

et

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

Test parallélisme

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = k\vec{v} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}.$$

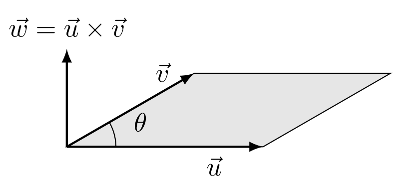
Test parallélisme

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Produit vectoriel

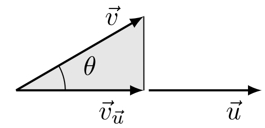
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

- Le vecteur $\vec{w}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$, et à $\vec{v}$, c'est-à-dire que
$$\vec{w} \perp \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{w} \perp \vec{v}$$
- La norme de $\vec{w}$ est égale à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire que
$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin\theta.$$



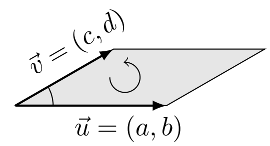
Projection orthogonale

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right) \vec{u}$$



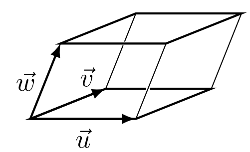
Déterminant 2×2 et aire orientée

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Déterminant 3×3 et volume orientée

$$V = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$



Test de coplanarité

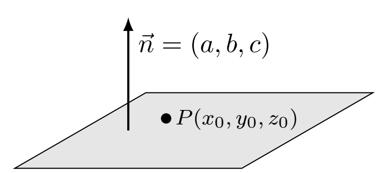
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si,

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

Équation normale d'un plan

Soit $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$, alors l'équation normale du plan est

$$ax + by + cz = d$$
avec
$$d = ax_0 + by_0 + z_0$$



Équation d'une sphère

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$