1 Courbes dans l'espace

1.1 Révision

Q.1 Les fonctions trigonométriques hyperboliques sont définies par

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

a) Montrer que $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

b) Montrer que $\big(\cosh t\big)' = \sinh t$.

c) Montrer que $\big(\sinh t\big)' = \cosh t$.

Q.2 Évaluer la dérivée des fonction suivante.

a) $4x^5 - 3\sqrt{x} + 3^{x^2} + \dfrac{2}{x} + 7^{\frac{1}{3}}$

b) $\dfrac{2x}{(x^3 + 2x - 4)}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+1}$

d) $\dfrac{(x^2+4)}{(2-x)^2(5-x^2)^3}$

e) $4\tan^3(xe^x)$

f) $\dfrac{\log_5(\sqrt{4x^7-3})}{\sin x}$

g) $4^x \sqrt[5]{x^3}\cos x + \dfrac{\log_6 \pi^2}{\csc^3 x}$

h) $\cot\left(5^{\cos(x^2+1)}\right)$

Q.3 Évaluer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

c) $\displaystyle\int x^2 e^{4x} dx$

d) $\displaystyle\int \cos(\ln x) dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x} dx$

f) $\displaystyle\int e^{e^{e^{e^x}}} e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx$

Q.4 Évaluer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 3x \, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2e^x+3}{e^{2x}-3e^x} dx$

c) $\displaystyle\int_1^9 \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^2-x^3} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-9x^2}}$

f) $\displaystyle\int \sin^5 x \sec^2 x \, dx$

g) $\displaystyle\int \sin 3x \cos^2 2x \, dx$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3} dx$

Q.5 Soient $\vec{u} = (2,3,-4)$, $\vec{v} = (-5,0,-2)$ et $\vec{w} = (0,-1,3)$, calculer

a) $3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w}$

b) $\|\vec{w}\|$

c) $\vec{u} \cdot \vec{w}$

d) $\vec{w}_{\vec{v}}$

e) $\vec{w} \times \vec{u}$

Q.6 Trouver

a) L'équation vectorielle de la droite passant par les points $(1,2,3)$ et $(4,2,-1)$;

b) L'équation symétrique de la droite perpendiculaire au plan $3x - 2y + 7z = 2$ et passant par le point $(0,-5,3)$;

c) L'équation normale du plan passant par les points $(-1,-2,4)$, $(1,0,3)$ et $(5,-4,1)$;

1.2 Fonction vectorielle

Q.7 Déterminer une fonction vectorielle de la droite de l'espace qui satisfait les conditions données.

a) La droite passent par les points $A(1,2,-3)$ et $B(-3,5,9)$.

b) La droite est perpendiculaire au plan $x + 2y - z = 0$ et passe par l'origine.

Q.8 Montrer que la courbe d'équation paramétrique

$$\vec{r}(t) = (\cosh t, \sinh t)$$

repose sur le l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.

Q.9 Montrer que la courbe d'équation paramétrique

$$\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$$

repose sur le cône $z^2 = x^2 + y^2$

Q.10 En quel point la courbe

$$\vec{r}(t) = (t, 0, 2t - t^2)$$

coupe-t-telle le paraboloïde $z = x^2 + y^2$

Q.11 Décrire le domaine des fonctions vectorielles suivantes

a) $\vec{r}(t) = \left(t^2, \sqrt{t-3}, \sqrt{7-t}\right)$

b) $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{t-2}{t+2}, \sin t, \ln(16-t^2)\right)$

Q.12 Associer les équations vectorielles suivantes aux graphiques des courbes spatiales correspondantes.

a) $\vec{r}(t) = \left(5 + 4\cos t, 5 + 4\sin t, 3 + \dfrac{2t}{\pi}\right)$

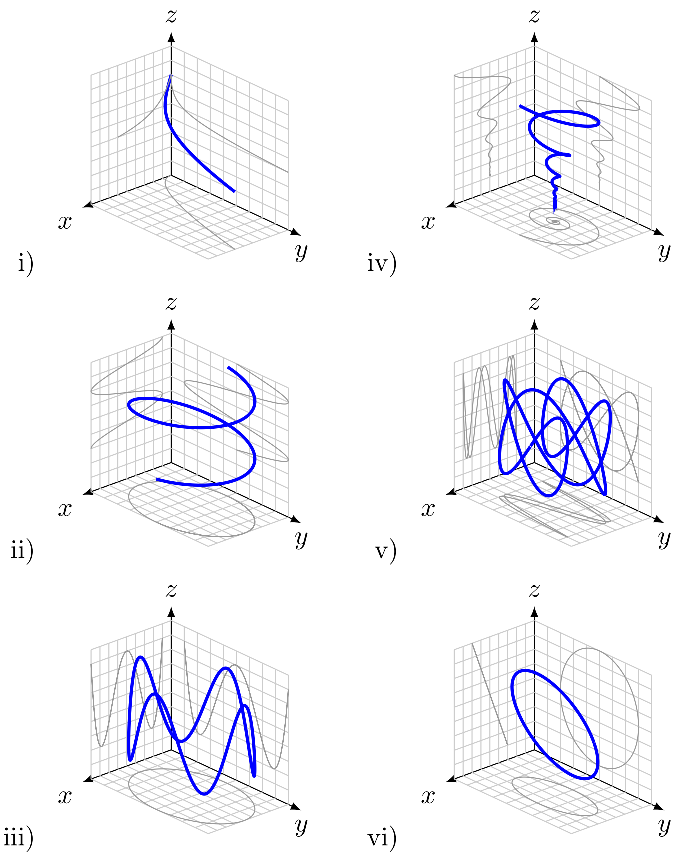
b) $\vec{r}(t) = \left(2t, t^2, 3 + \dfrac{4}{t+1}\right)$

c) $\vec{r}(t) = (5 + 2\sin(t), 5 + 3\cos(t), 5 + 4\sin(t))$

d) $\vec{r}(t) = \left(5 + 4^{1-t}\cos t, 5 + 4^{1-t}\sin t, 1 + \dfrac{8}{2^t}\right)$

e) $\vec{r}(t) = (5 + 3\sin(2t), 5 + 3\sin(3t), 5 + 3\sin(5t))$

f) $\vec{r}(t) = (5 + 4\cos t, 5 + 4\sin t, 3 + 3\sin 4t)$



Q.13 Évaluer les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2-9}{t+3}, \frac{t}{1-e^t}, \frac{\sin t}{t}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln t}{t}, \arctan t, \frac{3t^2-5t}{3-5t^2}\right)$

Q.14 Associer les équations vectorielles suivantes aux graphiques des courbes spatiales correspondantes.

a) $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$

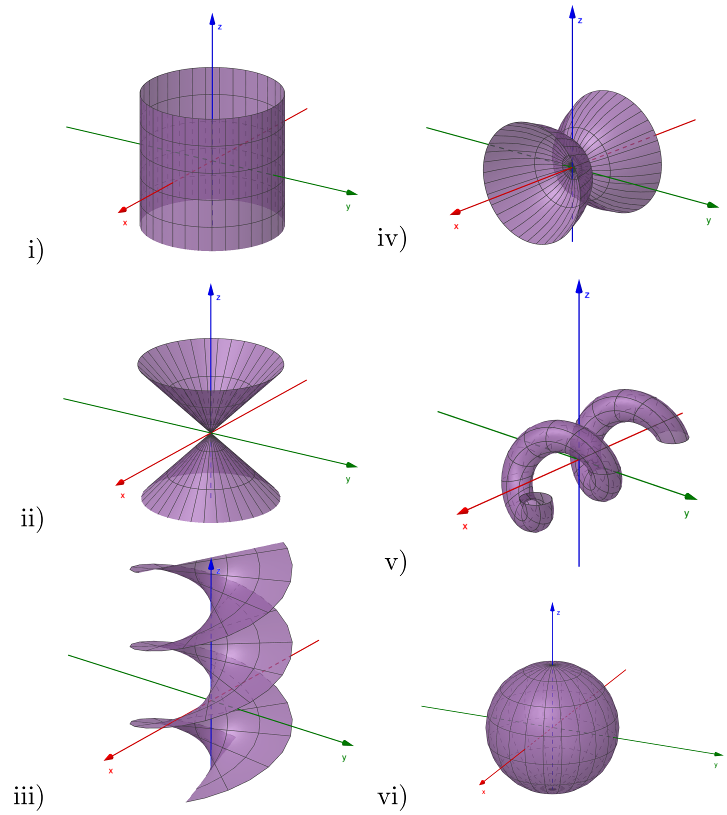
b) $\vec{r}(u,v) = (u+\cos v, (2+\sin v)\cos u, (2+\sin v)\sin u)$

c) $\vec{r}(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$

d) $\vec{r}(u,v) = (\cos u\sin v, \sin u\sin v, \cos v)$

e) $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$

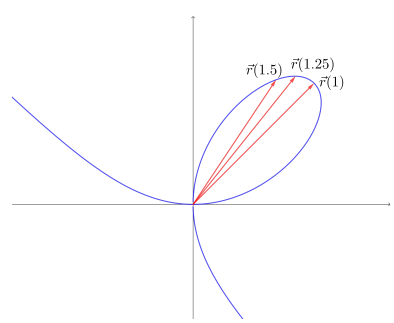
f) $\vec{r}(u,v) = \left(u^3, u\sin v, u\cos v\right)$



1.3 Dérivée de fonction vectorielle

Q.15 Le folium de Descartes est la courbe plane

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$



a) Représenter les vecteurs $\vec{r}(1.5)-\vec{r}(1)$ et $\vec{r}(1.25)-\vec{r}(1)$

b) Représenter les vecteurs

$$\frac{\vec{r}(1.5)-\vec{r}(1)}{0.5} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{r}(1.25)-\vec{r}(1)}{0.25}$$

c) Calculer $\vec{r}\,'(t)$ et représenter $\vec{r}\,'(1)$

Q.16 Pour chacune des fonctions vectorielles suivantes, déterminer le domaine de $\vec{r}(t)$ ainsi que les dérivées $\vec{r}\,'(t)$ et $\vec{r}\,''(t)$.

a) $\vec{r}(t) = \left(\sqrt{t}\right)\ \vec{\imath} + \left(\dfrac{3}{t^2}\right)\ \vec{\jmath} + (2t-5)\vec{k}$

b) $\vec{r}(t) = \left(e^{2t}\right)\ \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \left(\sin t\right)\ \vec{k}$

c) $\vec{r}(t) = \left(4t\right)\ \vec{\imath} + \left(t^{5/2}\right)\ \vec{\jmath} + \left(3\sec t\right)\ \vec{k}$

Q.17 Pour chacune des courbes spatiales $\mathcal{C}$ suivantes, donner la fonction vectorielle de la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point P donné.

a) $\vec{r}(t) = \left(2t, \dfrac{16}{t}, t^2\right)$, $\quad P(8,4,16)$

b) $\vec{r}(t) = (\sin t, t, \cos 3t)$, $\quad P(1,\pi/2,0)$

c) $\vec{r}(t) = \left(e^{2t}, \dfrac{2}{e^t}, te^t\right)$, $\quad P(1,2,0)$

Q.18 Pour chacune des courbes spatiales $\mathcal{C}$ suivantes, donner un vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}$ au point P donné.

a) $\vec{r}(t) = \left(2t^3-1, -3t^{-1}, 2\sqrt{t}\right)$, $\quad P(1,-3,2)$

b) $\vec{r}(t) = \left(\cos 2t, \sin 3t, t^2\right)$, $\quad P(1,0,\pi^2)$

c) $\vec{r}(t) = (1-\sin t, 2t, t\cos t)$, $\quad P(0,\pi,0)$

Q.19 Deux particules P et Q se déplacent sur les courbes définies par

$$\vec{P}(t) = \left(t, 1-t, 3+t^2\right),$$

$$\vec{Q}(s) = \left(3-s, s-2, s^2\right),$$

respectivement.

a) En quel(s) point(s) s'intersectent les trajectoires des particules P et Q ?

b) À l'intersection des trajectoires, laquelle des particules se déplace le plus vite ?

c) Calculer l'angle d'intersection entre les trajectoires des particules P et Q.

Q.20 Calculer les intégrales.

a) $\displaystyle\int \left(te^t\ \vec{\imath} + \sec^2\ \vec{\jmath} + 3t\sin t^2\ \vec{k}\right) dt$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{4+t^2}\ \vec{\imath} + \frac{7}{3t-5}\ \vec{\jmath} + \frac{4t-1}{(t-1)(2t-7)}\ \vec{k}\right) dt$

Q.21 Soit $\vec{r}(t)$ une fonction vectorielle dérivable pour tout t dans l'intervalle $[a,b]$. Montrer que si le vecteur $\vec{r}(t) \times \vec{r}\,'(t)$ est constant, alors $\vec{r}(t)$ est parallèle à $\vec{r}\,''(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

Q.22 Trouver la formule de la dérivée du produit mixte

$$\Big(\vec{r}(t) \cdot \left(\vec{s}(t) \times \vec{q}(t)\right)\Big)'$$

Q.23 Si $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$, montrer que

$$\frac{d}{dt}\|\vec{r}(t)\| = \frac{1}{\|\vec{r}(t)\|}\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)$$

Q.24 Démontrer que si un courbe est telle que sont vecteur position $\vec{r}(t)$ fait toujours un angle droit avec son vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$, alors la courbe est entièrement à la surface d'une sphère.

1.4 Longueur d'arc

Q.25 La fonction

$$\vec{r}(t) = (1+2t, 3-t, 9-2t)$$

décrit une droite dans l'espace.

a) Trouver la longueur du segment de droite reliant $\vec{r}(0)$ à $\vec{r}(3)$.

b) Utiliser $\displaystyle\int_a^b \|\vec{r}\,'\|dt$ pour retrouver le même résultat.

Q.26 Considérons la *caténaire* définie par

$$\vec{r}(t) = \left(t, \cosh t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la longueur d'arc d'une caténaire entre l'origine et le point $P(t)$ est donnée par

$$s(t) = \sinh t.$$

Q.27 Calculer la longueur de l'arc des courbes suivantes.

a) $\vec{r}(t) = (t^2, t^2, t^3)$ $\quad 0 \le t \le 1$

b) $\vec{r}(t) = \left(8\sqrt{t^3}, 3t^2, 12t\right)$ $\quad 0 \le t \le 1$

c) $\vec{r}(t) = \left(\cos t + t\sin t, t^2, \sin t - t\cos t\right)$ $\quad 0 \le t \le \pi$

d) $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

Q.28 Donner une paramétrisation en terme de l'abscisse curviligne des courbes suivantes mesurées à partir de $t=0$ vers $t>0$.

a) $\vec{r}(t) = (1-2t, t+4, 3t+2)$

b) $\vec{r}(t) = \left(e^{2t}\cos 2t, e^{2t}\sin 2t\right)$

c) $\vec{r}(t) = (3\sin t, 2t, 3\cos t)$

Q.29 Calculer les vecteurs $\vec{T}, \vec{N}$ et $\vec{B}$ aux points indiqués.

a) $\vec{r}(t) = \left(t^2, t, \dfrac{2t^3}{3}\right)$ $\quad P\left(1, 1, \dfrac{2}{3}\right)$

b) $\vec{r}(t) = (e^t\cos t, e^t, e^t\sin t)$ $\quad P(1,1,0)$

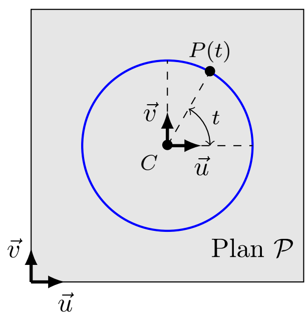
Q.30 Calculer le repère de Frenet $\left\langle \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t) \right\rangle$ de l'ellipse définie par les équations paramétriques

$$x = x_o + a\cos t, \quad y = y_o + b\sin t \quad \text{et} \quad z = z_o.$$

Q.31 Calculer le repère de Frenet $\left\langle \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t) \right\rangle$ du cercle de rayon a centré en $C(x_o, y_o, z_o)$ définie par l'équation vectorielle

$$\vec{r}(t) = (x_o, y_o, z_o) + \big(a\cos t\big)\vec{u} + \big(a\sin t\big)\vec{v}$$

où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.



Q.32 Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie par

$$\vec{r}(t) = \big(\sqrt{2}t, e^t, -e^{-t}\big)$$

Calculer le repère de Frenet $\left\langle \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t) \right\rangle$.

Q.33 Une hélice d'ADN est portée par un cylindre dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des z et le rayon mesure 10 angström (1Å$= 10^{-8}$cm). À chaque tour complet, l'hélice gravit une hauteur de 34Å. Sachant qu'une hélice d'ADN qui compte au minimum 2.5×10^8 tours, montrer que sa longueur est strictement supérieur à 1.5 mètres.

1.5 Courbure

Q.34 Considérons l'hélice circulaire définie par

$$\vec{r}(t) = \big(a\cos t, a\sin t, bt\big)$$

où $a > 0$ et $b > 0$.

a) Calculer le repère de Frenet $\left\langle \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t) \right\rangle$.

b) Montrer que le vecteur normal unitaire $\vec{N}(t)$ est perpendiculaire à l'axe de symétrie du cylindre qui porte la courbe.

c) Montrer que l'angle entre le vecteur tangent unitaire $\vec{T}(t)$ et le plan xy est constant.

d) Montrer que la courbure est constante.

Q.35 Calculer la courbure de la courbe

$$\vec{r}(t) = \big(\cos t, \sin t, \sin 3t\big)$$

au point $P(-1, 0, 0)$.

Q.36 Considérons l'ellipse définie par les équations paramétriques $x = a\cos t$ et $y = b\sin t$ où $a > b$.

a) Calculer la courbure κ de l'ellipse.

b) Montrer que la courbure κ de l'ellipse est maximale aux extrémités du grand axe et minimale aux extrémités du petit axe.

Q.37 Trouver une équation normale du plan normal et une du plan osculateur des fonctions à la question 29 aux points spécifiés.

Q.38 Considérons la courbe définie par

$$\vec{r}(t) = \big(t^2, 2t, 3t^2\big)$$

a) Calculer le repère de Frenet $\left\langle \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t) \right\rangle$.

b) Déduire que $\mathcal{C}$ est une courbe plane et déterminer l'équation du plan qui porte cette courbe.

Q.39 Considérons l'hélice circulaire définie par

$$\vec{r}(t) = \big(a\cos t, a\sin t, bt\big)$$

a) Montrer que la courbure de l'hélice est constante.

b) Montrer que le centre Q du cercle osculateur de l'hélice au point $P(t)$ est donné par

$$Q(x,y,z) = \left(\left(a - \frac{a^2+b^2}{a}\right)\cos t, \left(a - \frac{a^2+b^2}{a}\right)\sin t, bt\right).$$

Q.40 Trouver les équations des cercles osculateurs de l'ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ aux points $(3, 0)$ et $(0, 2)$.

Q.41 Montrer que le cercle osculateur d'une courbe $\vec{r}(t)$ en un point $P(t_o)$ est défini par l'équation vectorielle

$$(x, y, z) = Q_o + \left(\frac{1}{\kappa_o}\cos\theta\right)\vec{T}_o + \left(\frac{1}{\kappa_o}\sin\theta\right)\vec{N}_o, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Q.42 Déterminer la courbure des courbes suivantes à l'aide de la formule

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}.$$

a) $\vec{r}(t) = \big(t^3, 3, t^2\big)$

b) $\vec{r}(t) = \big(e^t, t, -t\big)$

c) $\vec{r}(t) = \left(e^{-t}, -\sqrt{2}t, e^t\right)$

d) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$

Q.43 Déterminer la courbure des courbes planes suivantes à l'aide de la formule

$$\kappa = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$$

a) $y = \sin x$ b) $y = xe^x$ c) $y = x^3$

Q.44 Considérons la courbe plane représentée par le graphique de la parabole $y = x(x-3)$.

a) Déterminer le(s) point(s) de la parabole où la courbure est égale à $1/\sqrt{2}$.
b) Déterminer l'équation du cercle osculateur de rayon $\sqrt{2}$ qui est tangent à la parabole et à la droite $y = x - 4$.
c) Représenter graphiquement la parabole, le cercle osculateur et la droite tangente $y = x - 4$.

Q.45 Considérons la courbe plane représentée par

$$\vec{r}(t) = (t, \ln t), \quad t > 0.$$

Déterminer pour quelle(s) valeurs de t la courbure κ est maximale. Que vaut cette courbure maximale ?

Q.46 Calculer la courbure κ de la *caténaire* définie par

$$\vec{r}(t) = \big(t, \cosh t\big), \quad t \in \mathbb{R}$$

et déterminer l'équation du cercle osculateur au point $P(0,1)$. Représenter graphiquement la caténaire et son cercle osculateur.

1.6 Torsion et mouvement dans l'espace

Q.47 Déterminer la torsion des courbes suivantes à l'aide de la formule

$$\tau(t) = \frac{\Big(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\Big) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|^2}$$

a) $\vec{r}(t) = \big(t^2+1, 2t^2, 4t^2+5t\big)$
b) $\vec{r}(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3}\right)$
c) $\vec{r}(t) = e^t\,(\cos t, \sin t, 1)$

Q.48 Est-ce que l'identité suivante est vraie ? Justifier.

$$\frac{\Big(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\Big) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|^2} = \frac{\vec{r}\,'(t) \cdot \Big(\vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'''(t)\Big)}{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|^2}$$

Q.49 Monter que la torsion de l'hélice circulaire définie par

$$\vec{r}(t) = \big(a\cos t, a\sin t, bt\big)$$

où $a > 0$ et $b > 0$ est constante. Jumelé avec la question 34, on peut conclure que l'hélice est de courbure et torsion constante

Q.50 Trouver le vecteur tangent unitaire $\vec{T}$, le normal $\vec{N}$, le binormal $\vec{B}$, la courbure κ et la torsion τ de la courbe

$$\vec{r}(t) = (\sin t\cos t, \sin^2 t, \cos t)$$

a) en $t = 0$ b) en $t = \dfrac{\pi}{4}$

Q.51 Montrer que pour la courbe

$$\vec{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3),$$

on a que $\kappa(t) = \tau(t)$.

Q.52 Déterminer le vecteur position $\vec{r}(t)$ et le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dont l'accélération, la position initiale et la vitesse initiale sont les suivantes :

a) $\vec{a}(t) = (2t, \sin t, \cos 2t), \vec{v}(0) = (1,0,0)$ et $\vec{r}(0) = (0,1,0)$
b) $\vec{a}(t) = \left(t, e^t, e^{-t}\right), \vec{v}(0) = (0,0,1)$ et $\vec{r}(0) = (0,1,1)$

Q.53 Réécrire la formule de la courbure et celle de la torsion en terme $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$.

Q.54 Si la position d'une particule satisfait à

$$\vec{v}(t) = \vec{c} \times \vec{r}(t)$$

où $\vec{c}$ est un vecteur constant et notons θ l'angle entre $\vec{c}$ et $\vec{r}(0)$. Montrer que

a) $\|\vec{r}(t)\|$ est constant ;
b) $\vec{v}(t) \perp \vec{c}$ et $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$;
c) $\kappa(t) = \dfrac{1}{\|\vec{r}(0)\| \sin\theta}$ et donc constante ;
d) $\tau(t)$ est nulle ;
e) $\vec{r}(t)$ est le cercle d'intersection entre la sphère de rayon $\|\vec{r}(0)\|$ et le plan normal à $\vec{c}$ passant par $\vec{r}(0)$

Q.55 Trouver $\vec{r}(t)$ si

$$\vec{v}(t) = \vec{k} \times \vec{r}(t) \quad \text{et} \quad \vec{r}(0) = (1,0,1)$$

et décrire cette courbe.

Q.56 Montrer que si une particule se déplace avec une vitesse scalaire constante alors $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$.

Q.57 Calculer la composante tangentielle et normale du vecteur accélération.

a) $\vec{r}(t) = (3t^2, 3t - t^3)$ c) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$
b) $\vec{r}(t) = (t^2 - 2t, t + 1)$ d) $\vec{r}(t) = (t^2, 3t, t)$

Q.58 Lorsqu'une particule de masse m se déplace avec position $\vec{r}(t)$, alors son moment cinétique est défini par

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)$$

et son moment de force (torque en anglais) par

$$\vec{\tau}(t) = \vec{r}(t) \times m\vec{a}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t).$$

Montrer que $\vec{L}\,'(t) = \vec{\tau}(t)$.

Q.59 Si la position $\vec{r}(t)$, la vitesse $\vec{v}(t)$ et l'accélération $\vec{a}(t)$ d'une particule satisfont à

$$\vec{a}(t) = f(t)\vec{r}(t) + g(t)\vec{v}(t),$$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions scalaires et que $\vec{v} \times \vec{a} \neq \vec{0}$, montrer que la trajectoire de la particule est plannaire.

1.7 Solutionnaire

R.1

a) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ $\quad \begin{cases} \cosh^2 t &= (e^{2t}+2+e^{-2t})/4 \\ \sinh^2 t &= (e^{2t}-2+e^{-2t})/4 \end{cases}$

b) $(\cosh t)' = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right) = 1/2(e^t - e^{-t}) = \sinh t$

c) $(\sinh t)' = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right) = 1/2(e^t + e^{-t}) = \cosh t$

R.2

a) $20x^4 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + 2x3^{x^2}\ln 3 - \dfrac{2}{x^2}$

b) $\dfrac{-4x^2-8}{(x^3+2x-4)^2}$

c) $\dfrac{1}{8\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+1}\sqrt{\sqrt{x+1}+1}\sqrt{x+1}}$

d) $\dfrac{-6x^4+8x^3-32x^2+68x+40}{(2-x)^3(5-x^2)^4}$

e) $12e^x(1+x)\tan^2(xe^e)\sec^2(xe^x)$

f) $\dfrac{14x^6\sin x - \ln 5(4x^7-3)\log_5(4x^7-3)\cos x}{2\ln 5(4x^7-3)\sin^2 x}$

g) $4^x\left(\ln 4\sqrt[5]{x^3}\cos x + \dfrac{3}{\sqrt[5]{x^2}}\cos x\right) + 3\sin^2 x\cos x\log_6 \pi^2$

h) $2x\csc^2\left(5^{\cos(x^2+1)}\right)5^{\cos(x^2+1)}\ln 5\sin(x^2+1)$

R.3

a) $\sin(\ln x) + C$

b) $\sqrt{x^2-1} - \arctan\sqrt{x^2-1} + C$

c) $\dfrac{x^2e^{4x}}{4} - \dfrac{xe^{4x}}{8} + \dfrac{e^{4x}}{32} + C$

d) $\dfrac{x\cos\ln x + x\sin\ln x}{2} + C$

e) $\ln|x| + 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$

f) $e^{e^{e^{e^x}}} + C$

R.4

a) $\dfrac{-1}{4}$

b) $-x+e^{-x}+\ln|e^x-3|+C$

c) $\dfrac{264}{5}$

d) $-\dfrac{1}{x} - 3\ln|x-1| + C$

e) $-\dfrac{\sqrt{25-9x^2}}{25x} + C$

f) $\sec x + 2\cos x - \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$

g) $-\dfrac{\cos 3x}{6} + \dfrac{2}{7}\sin 3x\sin 4x + \dfrac{3}{14}\cos 3x\cos 4x + C$

h) $13\ln 2 - 4\ln 5$

R.5

a) $(-19, 11, -28)$

b) $\sqrt{10}$

c) -15

d) $\left(\dfrac{30}{29}, 0, \dfrac{12}{29}\right)$

e) $(-5, 6, 2)$

R.6

a) $(x,y,z) = (1,2,3) + k(3,0,-4)$

b) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z-3}{7}$

c) $x + 2z = 7$

R.7

a) $\vec{r}(t) = (1-4t, 2+3t, -3+12t), \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\vec{r}(t) = (t, 2t, -t), \quad t \in \mathbb{R}$

R.8

R.9 Laissé à l'étudiant.e

R.10 $(0,0,0)$ et $(1,0,1)$

R.11

a) $[3,7]$

b) $]-4,-2[\,\cup\,]-2,4[$

R.12

a) ii) b) i) c) vi) d) iv) e) v) f) iii)

R.13

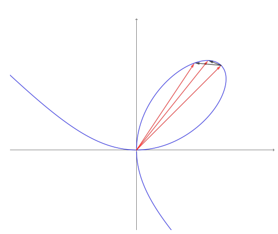
a) $(-3,-1,1)$

b) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{3}{5}\right)$

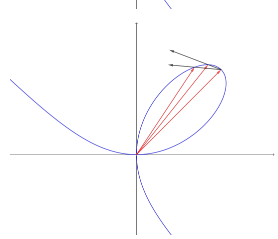
R.14

a) ii) b) v) c) i) d) vi) e) iii) f) iv)

R.15

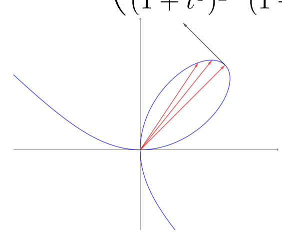


a)



b)

c) $\vec{r}\,'(t) = \left(\dfrac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}, \dfrac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}\right)$



R.16

a) On a $\quad D_r = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \right\}$ et

$$\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\,\vec{\imath} - \left(\frac{6}{t^3}\right)\,\vec{\jmath} + 2\,\vec{k},$$

$$\vec{r}\,''(t) = \left(-\frac{1}{4\sqrt{t^3}}\right)\,\vec{\imath} + \left(\frac{18}{t^4}\right)\,\vec{\jmath}.$$

b) On a $\quad D_r = \mathbb{R}$ et

$$\vec{r}\,'(t) = \left(2e^{2t}\right)\,\vec{\imath} + \left(\cos t\right)\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,''(t) = \left(4e^{2t}\right)\,\vec{\imath} - \left(\sin t\right)\,\vec{k}$$

c) On a $\quad D_r = \left\{ t \geq 0 \mid t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ et

$$\vec{r}\,'(t) = 4\,\vec{\imath} + \left(\frac{5\sqrt{t^3}}{2}\right)\,\vec{\jmath} + \left(3\sec t \tan t\right)\,\vec{k},$$

$$\vec{r}\,''(t) = \left(\frac{15\sqrt{t}}{4}\right)\,\vec{\jmath} + 3\sec t\Big(\tan^2 t + \sec^2 t\Big)\,\vec{k},$$

R.17

a) $\vec{d}(t) = (8 + 2t, 4 - t, 16 + 8t)$

b) $\vec{d}(t) = \left(1, \frac{\pi}{2} + t, 3t\right)$

c) $\vec{d}(t) = (1 + 2t, 2 - 2t, t)$

R.18

a) $\vec{T}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{46}}(6, 3, 1)$

b) $\vec{T}(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 9}}(0, -3, 2\pi)$

c) $\vec{T}(\pi/2) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^2 + 16}}(0, 4, -\pi)$

R.19

a) Les trajectoires se croisent en $(1, 0, 4)$.

b) La particule Q se déplace plus rapidement.

c) $\theta = \text{acos}\left(\dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{18}}\right)$

R.20

a) $\left(te^t - e^t + C_1, \tan t + C_2, -\dfrac{3}{2}\cos t^2 + C_3\right)$

b) $\left(\dfrac{5\arctan\frac{t}{2}}{2}, \dfrac{7\ln|3t-7|}{3}, \dfrac{-3\ln|t-1| + 13\ln|2t-7|}{5}\right) + \vec{C}$

R.21 Il suffit d'utiliser la formule de dérivation d'un produit vectoriel et de noter que $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,'(t) = 0$.

R.22 $\vec{r}\,'(t) \cdot \big(\vec{s}(t) \times \vec{q}(t)\big) + \vec{r}(t) \cdot \big(\vec{s}\,'(t) \times \vec{q}(t)\big) + \vec{r}(t) \cdot \big(\vec{s}(t) \times \vec{q}\,'(t)\big)$

R.23 Il suffit d'utiliser l'égalité $\|\vec{r}(t)\|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)$.

R.24 Utiliser la question précédente pour déduire que $\|\vec{r}(t)\|$ est constant.

R.25

a) 9

b) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{4 + 1 + 4}dt = 9$

R.26 On a $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$, d'où

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du = \int_0^t \cosh u\,du = \sinh t$$

R.27

a) $\dfrac{\sqrt{17^3} - \sqrt{8^3}}{27}$

b) 15

c) $\dfrac{\sqrt{5}\pi^2}{2}$

d) $\pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2\pi + \sqrt{2 + 4\pi^2}}{\sqrt{2}}\right|$

R.28

a) On a $\quad s = \displaystyle\int_0^t \sqrt{14}du = \sqrt{14}t$, d'où $\quad t = \dfrac{s}{\sqrt{14}}$

$$\vec{r}(s) = \left(1 - 2\frac{s}{\sqrt{14}}, \frac{s}{\sqrt{14}} + 4, 3\frac{s}{\sqrt{14}} + 2\right)$$

b) On a $\quad s = \displaystyle\int_0^t \sqrt{8}e^{2u}du = \sqrt{2}\left(e^{2t} - 1\right)$, d'où

$$2t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \quad \text{et}$$

$$\vec{r}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)\right)$$

c) On a $\quad s = \displaystyle\int_0^t \sqrt{13}du = \sqrt{13}t$, d'où $\quad t = \dfrac{s}{\sqrt{13}}$

$$\vec{r}(s) = \left(3\sin\left(\frac{s}{\sqrt{13}}\right), \left(\frac{2s}{\sqrt{13}}\right), 3\cos\left(\frac{s}{\sqrt{13}}\right)\right)$$

R.29

a) $\vec{T} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right), \quad \vec{N} = \left(\dfrac{-1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

et $\vec{B} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

b) $\vec{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\quad \vec{N} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
et $\vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

R.30 On obtient les vecteurs unitaires

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\Big(-a\sin t, b\cos t, 0\Big)$$
$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\Big(-b\cos t, -a\sin t, 0\Big)$$

où nous avons utilisé le fait que $\vec{N} = \vec{T}_\perp$ dans $\mathbb{R}^2$. Cette ellipse étant contenu dans le plan xy, on conclut que le vecteur binormal est

$$\vec{B}(t) = \vec{k} = (0, 0, 1).$$

R.31 On obtient d'abord

$$\vec{r}\,'(t) = \big(-a\sin t\big)\vec{u} + \big(a\cos t\big)\vec{v}$$

d'où

$$\|\vec{r}\,'(t)\|^2 = \big(-a\sin t\big)^2\|\vec{u}\|^2 + \big(a\cos t\big)^2\|\vec{v}\|^2$$

ce qui donne $\|\vec{r}\,'(t)\| = a$, puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires. On obtient ensuite

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \big(-\sin t\big)\vec{u} + \big(\cos t\big)\vec{v},\\ \vec{N}(t) &= \big(-\cos t\big)\vec{u} + \big(-\sin t\big)\vec{v},\\ \vec{B}(t) &= \vec{u}\times\vec{v}.\end{aligned}$$

R.32 Après un travail acharné, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{1}{2\cosh t}\Big(\sqrt{2}, e^t, e^{-t}\Big),\\ \vec{N}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t}\Big(-\sqrt{2}\sinh t, 1, -1\Big),\\ \vec{B}(t) &= \frac{1}{4\cosh^2 t}\Big(2\sqrt{2}\cosh t, -(1+e^{-2t}), 1+e^{2t}\Big).\end{aligned}$$

R.33 On a 1Å$= 10^{-10}$m, donc on obtient l'hélice

$$\vec{r}(t) = 10^{-10}\Big(10\cos(2\pi t), 10\sin(2\pi t), 34t\Big)$$

où on a utilisé des axes gradués en mètre et le paramètre t dénote le nombre de tour. La longueur d'arc est donc

$$L \geq \int_0^{2.5\times 10^8} \|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

avec

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = 10^{-10}\sqrt{400\pi^2 + 34^2} > 10^{-10}\sqrt{3600 + 900}$$

puisque $\pi^2 > 10$ et $34^2 > 900$, ce qui donne

$$L \geq \int_0^{2.5\times 10^8} \|\vec{r}\,'(t)\|dt > (2.5\times 10^8)(10^{-10})(60) = 1.5\text{m}.$$

R.34

a) Après un peu de travail, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big(-a\sin t, a\cos t, b\Big)\\ \vec{N}(t) &= \Big(-\cos t, -\sin t, 0\Big)\\ \vec{B}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big(b\sin t, -b\cos t, a\Big)\end{aligned}$$

b) Il suffit de montrer que $\vec{k}\cdot\vec{N}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

c) Posons $\alpha = \angle\vec{k}, \vec{T}$, d'où $\theta = \pi/2 - \alpha$. On obtient ensuite

$$\vec{k}\cdot\vec{T} = \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ce qui implique que les angles α et θ sont constants.

d) $\kappa = \dfrac{a}{a^2+b^2}$

R.35 On obtient $\quad \kappa(\pi) = \dfrac{1}{10}$.

R.36

a) On a $\quad \kappa = \dfrac{ab}{\big(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\big)^{3/2}}$

b) On a $\quad \kappa'(t) = \dfrac{-3ab\,\big(a^2\sin t\cos t - b^2\sin t\cos t\big)}{\big(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\big)^{5/2}}$

ainsi $\kappa' = 0$, lorsque $\cos t = 0$ et/ou $\sin t = 0$, d'où

$$\kappa_{max} = \kappa(\pm\pi) = \frac{a}{b^2} \quad \text{aux points } (a,0) \text{ et } (-a,0)$$
$$\kappa_{min} = \kappa(\pm\pi/2) = \frac{b}{a^2} \quad \text{aux points } (0,b) \text{ et } (0,-b).$$

R.37

a) Plan normal : $6x + 3y + 6z = 13$
Plan osculateur : $6x - 6y - 3z = -2$

b) Plan normal : $x + y + z = 2$
Plan osculateur : $x - 2y + z = -1$

R.38

a) Après un peu de travail, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{10t^2+1}}\Big(t, 1, 3t\Big)\\ \vec{N}(t) &= \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10t^2+1}}\Big(1, -10t, 3\Big) = \vec{T}\,'(t)\\ \vec{B}(t) &= \frac{1}{\sqrt{10}}\Big(3, 0, -1\Big)\end{aligned}$$

b) La courbe $\mathcal{C}$ doit être plane puisque le vecteur binormal $\vec{B}(t)$ est constant. Ceci implique que la courbe $\mathcal{C}$ est portée par le plan perpendiculaire à $\vec{B}(t)$ (plan osculateur constant) dont l'équation est $3x - z = 0$.

R.39

a) On obtient $\kappa = \dfrac{a}{a^2+b^2}$.

b) Le centre Q du cercle osculateur est

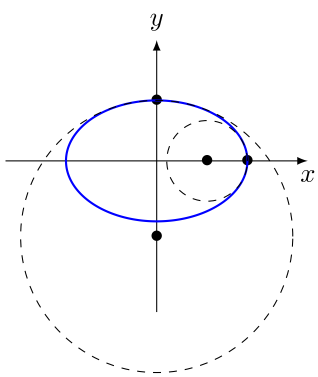
$$Q(x,y,z) = P(t) + \frac{1}{\kappa}\vec{N}(t)$$

avec

$$P(t) = \big(a\cos, a\sin t, bt\big) \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \big(-\cos t, -\sin t, 0\big)$$

d'où le résultat.

R.40

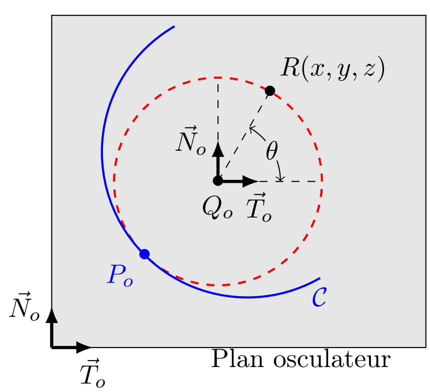


$$x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

R.41 On a

$$\overrightarrow{Q_oR} = \left(\frac{1}{\kappa_o}\cos\theta\right)\vec{T}_o + \left(\frac{1}{\kappa_o}\sin\theta\right)\vec{N}_o.$$



R.42

a) $\kappa(t) = \dfrac{6}{|t|\big(9t^2+4\big)^{3/2}}$

b) $\kappa(t) = \dfrac{\sqrt{2}e^t}{\big(e^{2t}+2\big)^{3/2}}$

c) $\kappa(t) = \dfrac{\sqrt{2}e^{2t}}{\big(1+e^{2t}\big)^2}$

d) $\kappa(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{\big(1+\cos^2 t\big)^{3/2}}$

R.43

a) $\kappa(x) = \dfrac{|\sin x|}{\big(1+\cos^2 x\big)^{3/2}}$

b) $\kappa(x) = \dfrac{|2+x|e^x}{\big(1+e^{2x}(1+x)^2\big)^{3/2}}$

c) $\kappa(x) = \dfrac{6|x|}{\big(1+9x^4\big)^{3/2}}$

R.44

a) On a

$$\kappa(x) = \frac{2}{(1+(2x-3)^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

aux points $A(1,-2)$ et $B(2,-2)$.

b) Au point $B(2,-2)$, le rayon de courbure est $\sqrt{2}$ et la droite $y = x-4$ est tangente à la parabole. On obtient les vecteurs unitaires

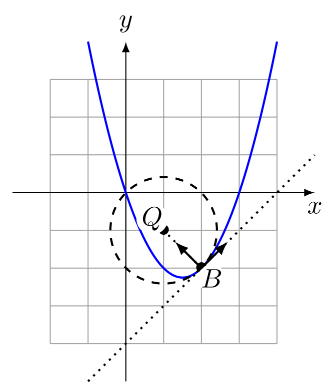
$$\vec{T}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \qquad \vec{N}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

ce qui donne le centre

$$Q = B + \sqrt{2}\vec{N} = (1,-1)$$

et l'équation Cartésienne du cercle osculateur

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

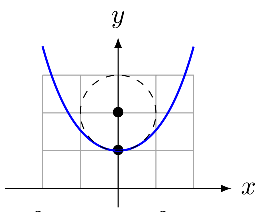


R.45 On obtient pour tout $t > 0$,

$$\kappa(t) = \frac{t}{\big(t^2+1\big)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \kappa'(t) = \frac{1-2t^2}{\big(t^2+1\big)^{3/2}}$$

Par conséquent, la courbure est maximale lorsque le paramètre $t = \sqrt{1/2}$, ce qui donne $\kappa_{max} = \dfrac{2}{\sqrt{27}}$.

R.46 On a $\kappa(t) = \dfrac{\cosh t}{(1+\sinh^2 t)^{3/2}} = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$, ce qui donne en $P(0,1)$



$x^2 + (y-2)^2 = 1$

$$R_o = \frac{1}{\kappa(0)} = 1,$$
$$\vec{T}_o = \vec{T}(0) = (1,0)$$
$$\vec{N}_o = \vec{N}(0) = (0,-1)$$
$$Q_o = P + R_o\vec{N}_o = (0,2)$$

R.47

a) $\tau(t) = 0$

b) $\tau(t) = \dfrac{2}{t^4+4t^2+1}$

c) $\tau(t) = \dfrac{-4\sin t(\sin t - \cos t) + 2}{e^t\left(2(\sin t - \cos t)^2 + 4\right)}$

R.48 Oui, car le produit mixte correspond au déterminant des trois vecteurs dans l'ordre.

R.49 $\tau(t) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$

R.50

a) $\vec{T} = (1,0,0)$, $\vec{N} = \left(0, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$,

$\vec{B} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\kappa = \sqrt{5}$ et $\tau = 0$.

b) $\vec{T} = \left(0, \sqrt{\dfrac{2}{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{N} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}\right)$,

$\vec{B} = \left(-\dfrac{6}{\sqrt{39}}, -\dfrac{1}{\sqrt{39}}, -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{39}}\right)$,

$\kappa = \dfrac{2\sqrt{39}}{9}$ et $\tau = -\dfrac{6\sqrt{2}}{13}$.

R.51

$$\kappa(t) = \frac{1}{3(1+t^2)^2} = \tau(t).$$

R.52

a) $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{t^3}{3} + t, -\sin t + t + 1, \dfrac{1-\cos(2t)}{4}\right)$

b) $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{t^3}{6}, e^t - t, e^{-t} + 2t\right)$

R.53

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{\|\vec{v}(t)\|^3},$$
$$\tau(t) = \frac{\left(\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\right) \cdot \vec{a}\,'(t)}{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|^2}$$

R.54 Lassé à l'étudiant.e

R.55 $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, c'est un cercle centré en $(0,0,1)$ dans le plan $z = 1$

R.56 Puisque $v(t) = c$, on a que $v'(t) = 0$ et donc $\vec{a}(t) = c^2\kappa(t)\vec{N}(t)$. On a donc que

$$\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t) = \left(c\vec{T}(t)\right)\cdot\left(c^2\kappa(t)\vec{N}(t)\right) = \left(c^3\kappa(t)\right)\left(\vec{T}(t)\cdot\vec{N}(t)\right) = 0.$$

R.57

a) $a_{\vec{T}}(t) = 6t$ $\quad a_{\vec{N}}(t) = -6$

b) $a_{\vec{T}}(t) = \dfrac{4t-4}{\sqrt{4t^2-8t+5}}$ $\quad a_{\vec{N}}(t) = \dfrac{2}{\sqrt{4t^2-8t+5}}$

c) $a_{\vec{T}}(t) = 0$ $\quad a_{\vec{N}}(t) = 1$

d) $a_{\vec{T}}(t) = \dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+10}}$ $\quad a_{\vec{N}}(t) = \dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{4t^2+10}}$

R.58 Laissé à l'étudiant.e

R.59 Il suffit de montrer que la torsion est nulle ;

$$\tau(t) = \frac{\left(\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\right) \cdot \left(f(t)\vec{r}(t) + g(t)\vec{v}(t)\right)'}{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|^2} = 0$$