2 Dérivées partielles

2.1 Fonction à plusieurs variables

Q.1 Évaluer la fonction au point donné.

a) $f(x,y) = x^2 + \sqrt{y^2-1}$ au point $(2,-3)$

b) $f(x,y) = y\cos x + \sin(xy)$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-z}$ au point $(2,-3,1)$

d) $f(x,y,z) = \log_2\left(x^2-y+z\right)$ au point $(2,-3,9)$

Q.2 Trouver le domaine de la fonction donnée et le représenter graphiquement.

a) $f(x,y) = \ln(y-x)$

b) $f(x,y) = x^2 + \sqrt{1-y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy^2+5xy+6x}$

Q.3 Tracer au moins quatre courbes de niveau pour chacune des fonctions données.

a) $f(x,y) = x+y$

b) $f(x,y) = xy$

c) $f(x,y) = x^2+y^2$

d) $f(x,y) = 1-x^2-y^2$

e) $f(x,y) = x-y^2$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$

h) $f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}$

Q.4 Donner une description de chacune des surfaces du numéro précédent ou essayer de les dessiner.

Q.5 Associer les fonctions suivante à leur graphique à leurs courbes de niveau .

a) $f(x,y) = \sin(xy)$

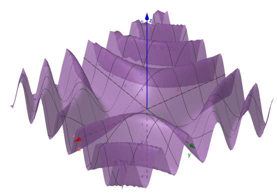
b) $f(x,y) = \sin(x-y)$

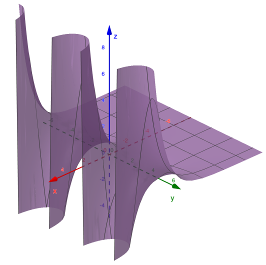
c) $f(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$

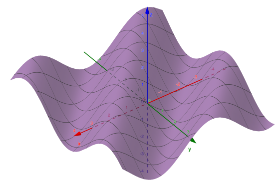
d) $f(x,y) = e^x\cos y$

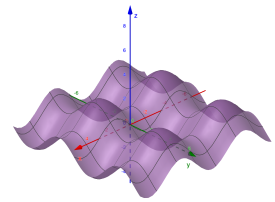
e) $f(x,y) = \sin x - \cos y$

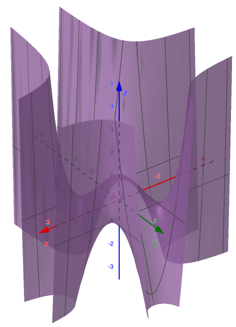
f) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$

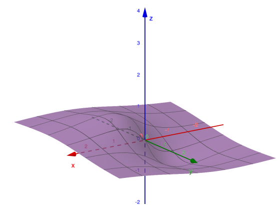

I)

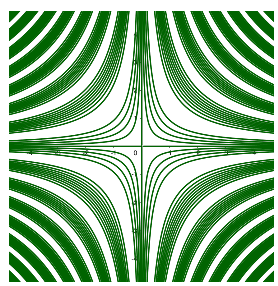

IV)

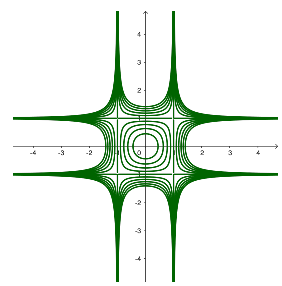

II)

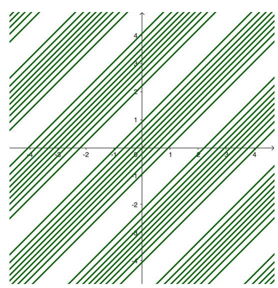

V)

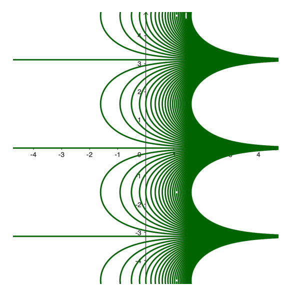

III)

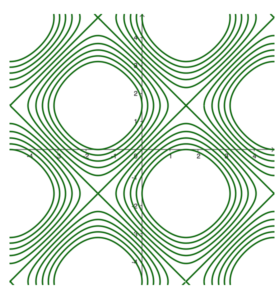

VI)

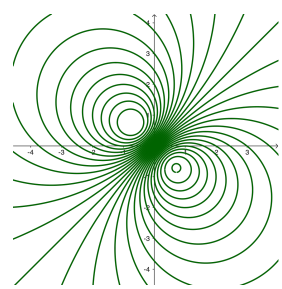

i)


iv)

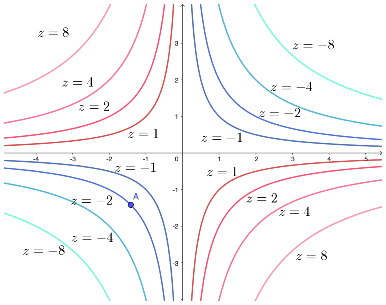

ii)


v)


iii)


vi)

Q.6 Soit la surface dont voici les courbes de niveau.



a) Donner les coordonnées du point A dans l'espace à trois dimensions.
b) Que vaut $f(1,-1)$?
c) Si l'on se trouve au point A, dans quelle direction doit-on se déplacer pour que la variation de z soit 0 ?
d) Si l'on se trouve au point A, dans quelle direction doit-on se déplacer pour que la variation de z soit maximale ?
e) Si l'on se trouve au point A, dans quelle direction doit-on se déplacer pour que la variation de z soit minimale ?

Q.7 Montrer que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Q.8 Évaluer la limite, si elle existe, ou démontrer qu'elle n'existe pas

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y}{x^2+y}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left(3x^2-2y^2\right)$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2y^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sin y+2}$

Q.9 Dire si la fonction f est continue en $(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & \text{si} \quad x\neq y \\ 0 & \text{si} \quad x=y \end{cases}$$

2.2 Dérivée partielle

Q.10 Soit la surface d'équation $z=xy^2$.

a) Tracer la courbe obtenue par l'intersection de cette surface avec le plan $x=1$ et donner son équation.
b) Sur le même dessin, tracer la droite tangente à cette courbe lorsque $y=2$ et donner sa pente.
c) Tracer la courbe obtenue par l'intersection de cette surface avec le plan $x=3$ et donner son équation.
d) Sur le même dessin, tracer la droite tangente à cette courbe lorsque $y=2$ et donner sa pente.
e) Le taux de variation moyen des pentes calculées en (b) et (d) correspond à l'expression

$$\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x} \quad \text{pour } \Delta x=2$$

Quel est ce taux lorsque $\Delta x\to 0$?

Q.11 Utiliser la définition de la dérivée pour calculer les deux dérivées partielles de la fonction

$$f(x,y)=3x^2+xy-y^2$$

au point $(1,2,1)$.

Q.12 Calculer l'expression demandée.

a) $\displaystyle\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,3)}$ si $z=y\ln(x+y)$

b) $f'_x(2,5)$ si $f(x,y)=\left(x^2+x-y\right)^7$

c) $\displaystyle\left.\frac{\partial N}{\partial q}\right|_{(p,q)=(1,2)}$ si $N=\mathrm{e}^{p/q}$

d) $\displaystyle\left.\frac{\partial z}{\partial \theta}\right|_{(r,\theta)=(2,\pi/3)}$ si $z=\dfrac{\tan\theta}{r}$

Q.13 Trouver toutes les premières dérivées partielles des fonctions données.

a) $z=x^2y+2x^5y$
b) $z=xe^{5y}$
c) $z=\ln(ye^{xy})$
d) $z=\arctan(x\sqrt{y})$
e) $z=\sin x\cos y$
f) $z=x^7+2^y+x^y$
g) $z=\sin\left(5x^3y-3xy^2\right)$
h) $z=\dfrac{y^3x+y}{1+x^2}$
i) $z=\sqrt{x}\sec\left(\dfrac{x}{y}\right)$
j) $f(x,y,z)=xze^{\sqrt{xy}}$

Q.14 Trouver une expression pour $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

a) $z=f(x)+g(y)$
b) $z=f(x)g(y)$
c) $z=\dfrac{f(x)}{g(y)}$
d) $z=f(x+y)$
e) $z=f(xy)$
f) $z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

Q.15 La fonction $P=g(A,i,t)$ détermine le versement mensuel à effectuer si l'on emprunte A $ à un taux d'intérêt mensuel i et que l'on rembourse sur une période de t mois. Interpréter les énoncés suivants selon le contexte.

a) $g(8000,1,24)=376,59$

b) $\displaystyle\left.\frac{\partial g}{\partial i}\right|_{(8000,1,24)}=44,83$

c) $\displaystyle\left.\frac{\partial g}{\partial a}\right|_{(8000,1,24)}=0,047$

Q.16 Vérifier la conclusion du théorème de Clairaut ;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

a) $z = x\sin(x+2y)$ b) $z = x^3y^4 - 4yx^5$

Q.17 Trouver les quatre dérivées partielles du deuxième ordre.

a) $f(x,y) = (x+y)^2$
b) $f(x,y) = x\mathrm{e}^y$
c) $f(x,y) = \sin\left(x^2+y^2\right)$
d) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}$

Q.18 Vérifier que la fonction $z = \mathrm{e}^{-ax}\sin(ay)$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a\frac{\partial z}{\partial x}$$

Q.19 Les fonctions différentiables $u(x,y)$ et $v(x,y)$ satisfont aux équations de **Cauchy-Riemann** si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Montrer que les fonctions données satisfont aux équations de Cauchy-Riemann.

a) $u = 2xy$ et $v = y^2 - x^2$
b) $u = \mathrm{e}^x\cos y$ et $v = \mathrm{e}^x\sin y$

Q.20 Une fonction $z(x,y)$ est **harmonique** si elle satisfait **l'équation de Laplace**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Montrer que les fonctions données sont harmoniques.

a) $z = x^3y - xy^3$
b) $z = \ln\left(ax^2 + ay^2\right)$
c) $z = \arctan x/y$

Q.21 Montrer que si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ ont des dérivées partielles de deuxième ordre continues et qu'elles satisfont aux équations de Cauchy-Riemann, alors u et v sont des fonctions harmoniques.

Q.22 L'énergie cinétique est donnée par

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Montrer que

$$K = \frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$$

2.3 Plan tangent et dérivée d'une composition

Q.23 Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation donnée au point indiqué.

a) $z = \sqrt{17 - x^2 - y^2}$ $P(3,2,2)$
b) $z = \dfrac{8}{xy}$ $P(1,2,4)$
c) $x = y^3z^7$ $P(1,-1,-1)$
d) $z = \cos x \sin y$ $P(0,\pi/2,1)$

Q.24 Trouver l'équation de la droite normale à la surface d'équation $z = xy + x - 2y + 4$ au point $(1,-1,6)$.

Q.25 Trouver la linéarisation $L(x,y) \approx f(x,y)$ des fonctions suivantes près des points spécifiés.

a) $f(x,y) = x^2y$ $P(3,1)$
b) $f(x,y) = e^{-x}\sin y$ $P\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$
c) $f(x,y) = \sqrt{x + e^{4y}}$ $P(3,0)$

Q.26 Comparer les valeurs de Δz et de dz lorsque (x,y) passe de $(1,2)$ à $(1.05, 2.1)$ dans la fonction

$$f(x,y) = 5x^2 + y^2$$

Q.27 Trouver la différentielle totale df.

a) $f(x,y) = 3x^3 - 2y^2$
b) $f(x,y) = \sec^2\left(\mathrm{e}^{x+2y}\right)$
c) $f(x,y,z) = \dfrac{3x+y^2}{z}$
d) $f(x,y,z) = \ln\left(x^3 + 5xy + 4z^2\right)$

Q.28 Calculer $\dfrac{df}{dt}$ pour les fonctions suivantes.

a) $f(x,y) = 4x\sqrt{y} - \dfrac{y^2}{x}$, $x(t) = t^3$ et $y(t) = t^{-3}$
b) $f(x,y) = \sin x \cos y$, $x(t) = \pi t$ et $y(t) = \sqrt{t}$
c) $f(x,y) = 5^{3x}\ln(y)$, $x(t) = \sec t$ et $y(t) = \tan t$

Q.29 Trouver $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

a) $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$; $x = 3u + v^2$; $y = \dfrac{u}{v}$
b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $x = 3\mathrm{e}^u\sin v$; $y = 3\mathrm{e}^u\cos v$

Q.30 La production annuelle de blé B dépend de la température moyenne T et des précipitations P. On suppose que la température moyenne croît présentement à un rythme de 0,15 ^{o}C/an et que les précipitations diminuent de 0,1 cm/an. Supposons également que

$$\frac{\partial B}{\partial T} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial B}{\partial P} = 8$$

Selon ces données, quel est le taux actuel de variation de la production de blé $\dfrac{dB}{dt}$?

Q.31 Quel est le taux de croissance du volume d'un cylindre circulaire dont le rayon augmente de 1 cm/min et la hauteur augmente de 50 cm/min ?

Q.32 Une voiture circule sur une route perpendiculaire à une voie ferrée. Alors qu'elle se trouve à 2 km du chemin de fer, elle roule à une vitesse de 50 km/h vers celui-ci. Au même moment, un train se situe à 10 km de la route et s'en approche à une vitesse de 100 km/h. À cet instant, à quelle vitesse la voiture et le train s'approchent-ils l'un de l'autre ?

Q.33 Si $x(u, v)$ et $y(u, v)$ sont des fonctions différentiables décrivant un changement de variables, on définit le jacobien de cette transformation comme

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Trouver le jacobien

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$$

de la transformation en coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Q.34 Si $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ et $z(u, v, w)$ sont des fonctions différentiables décrivant un changement de variables, on définit le jacobien de cette transformation comme

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

a) Trouver le jacobien

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}$$

de la transformation en coordonnées cylindriques

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

b) Trouver le jacobien

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$$

de la transformation en coordonnées sphériques

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\phi$$

Q.35 Une ville circulaire a un rayon de r km et une densité de population moyenne de ρ habitants/km^2. Actuellement, sa population est de 3 millions d'habitants, son rayon est de 25 km et ce dernier croît à raison de 0,1 km/an. Si $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 200$ hab./km^{2}an, à quel taux la population de la ville augmente-t-elle ?

Q.36 Soit $w = f(x, y, z) = 3xy + yz$. Supposons que x, y et z sont des fonctions de u et v données par

$$x = \ln u + \cos v, \quad y = 1 + u\sin v, \quad z = uv$$

a) Trouver $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ lorsque $(u, v) = (1, \pi)$.

b) Si u et v sont des fonctions de t données par

$$u = 1 + \sin(\pi t), \quad v = \pi t^2$$

Calculer $\dfrac{dw}{dt}$ lorsque $t = 1$.

2.4 Dérivée directionnelle et gradient

Q.37 Trouver la dérivée directionnelle de la fonction f au point P dans la direction du vecteur $\vec{v}$.

a) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$; $P = (3, 2)$; $\vec{v} = (1, -2)$

b) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \tan y + 2x^2y$; $P = (0, \pi/4)$; $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$

Q.38 Trouver le taux de variation instantané de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ au point $(1, 2)$ lorsqu'on se dirige vers le point $(-2, -2)$.

Q.39 Trouver la dérivée seconde de $f(x, y)$ dans la direction de $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Q.40 Trouver la dérivée directionnelle de la fonction

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

au point $(1, 1)$ dans la direction de l'angle $\pi/6$ par rapport à l'axe des x positif.

Q.41 Trouver le gradient de la fonction f au point indiqué.

a) $f(x, y) = \sin\dfrac{x}{y}$ au point $(\pi, 1)$

b) $f(x, y) = (x + y)e^y$ au point $(2, 0)$

c) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{\sqrt{y}}$ au point $(-1, 4)$

d) $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{2x - 3y}$ au point $(3, 1)$

Q.42 Dans quelle direction la fonction $z = \sqrt{\tan x + y}$ augmente-t-elle le plus rapidement au point $(0,1)$?

Q.43 Calculer le taux de variation maximum au point donné et indiquer la direction selon laquelle il se produit.

a) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ au point $(2,4)$

b) $f(x,y) = xe^{-y} + ye^{-x}$ au point $(0,0)$

c) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ au point $(\pi,4)$

d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ au point $(1,-2)$

Q.44 Si l'on dépose une bille au dessus du point $(1,-3)$ sur la surface d'équation $z = x^2 y$. Dans quelle direction se déplacera-t-elle initialement si la gravité agit en direction des z négatifs ?

Q.45 Dans quelle direction la dérivée directionnelle de la fonction

$$f(x,y,z) = \frac{y}{x} - xz$$

est-elle maximale au point $(1,2,-1)$?

Q.46 Dans quelle direction la dérivée directionnelle de la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x+y}$$

est-elle nulle au point $(2,2)$?

Q.47 Trouver l'équation du plan tangent à la surface

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

au point $P\left(-1, 1, \dfrac{\sqrt{23}}{6}\right)$.

Q.48 Trouver l'équation de la droite tangente à la surface d'équation

$$z = \frac{4x - 2y}{x^2 + y^2}$$

au point $(1,1,3)$ dans le plan $x + y = 2$.

Q.49 On se trouve dans un espace tridimensionnel où la température en un point (x,y,z) est donnée par la fonction

$$T(x,y,z) = \frac{3x+y}{z^2}$$

À partir du point $(0,1,-1)$, dans quelle direction doit-on se déplacer si l'on veut fuir la chaleur le plus possible.

Q.50 La dérivée directionnelle de $z = f(x,y)$ du point $(2,1)$ en direction du point $(1,3)$ est $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. Celle qui part du même point et s'oriente vers le point $(5,5)$ est 1. Trouver $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ au point $(2,1)$.

Q.51 Soit une fonction $f(x,y)$ telle que

$$f'_x(4,1) = 2 \quad \text{et} \quad f'_y(4,1) = -1$$

Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de niveau de f passant par le point $(4,1)$.

Q.52 Soient $f(x,y)$ et $g(x,y)$ des fonctions différentiables. Démontrer les propriétés suivantes.

a) $\nabla(af + bg) = a\nabla(f) + b\nabla(g)$

b) $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$

c) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

d) $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla(f)$ si $n \in \mathbb{N}$.

Q.53 Trouver les points sur la surface d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8$$

où le plan tangent est parallèle au plan $x - y + 3z = 0$.

2.5 Extrémum

Q.54 Le point $(1,3)$ est un point critique de la fonction f, dont les dérivées de deuxième ordre sont continues. Selon les informations suivantes, dire s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point de selle.

a) $f_{xx}(1,3) = 4$; $f_{yy}(1,3) = 6$; $f_{xy}(1,3) = 5$

b) $f_{xx}(1,3) = -2$; $f_{yy}(1,3) = -8$; $f_{xy}(1,3) = 3$

c) $f_{xx}(1,3) = 124$; $f_{yy}(1,3) = 10$; $f_{xy}(1,3) = 9$

Q.55 Pour chacune des fonctions données, trouver les points critiques et déterminer si ce sont des maximums locaux, des minimums locaux ou des points de selle.

a) $f(x,y) = xy$

b) $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$

c) $f(x,y) = x^3 + \mathrm{e}^{-y^2}$

d) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$

e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{5}{x} - y$

f) $f(x,y) = 8xy - \dfrac{(x+y)^4}{4}$

g) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^4 + y^4 + 2}$

h) $f(x,y) = 1 - \cos x + y^2/2$

i) $f(x,y) = \sin x \sin y$

Q.56 Trouver les coordonnées du point du plan

$$x + 2y - z + 3 = 0$$

le plus près du point $(2,1,0)$.

Q.57 Soit

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

Le hessien de cette fonction en $(0,0)$ est nul et on ne peut donc pas conclure sur la nature de ce point critique.

a) Montrer que $f(x,y)$ admet un minimum relatif en (0,0) si on se restreint à des chemin qui sont des droites passant par l'origine, $y = kx$.
b) Est-ce que c'est la même chose lorsqu'on se restreint au chemin $y = 2x^2$?
c) Que pouvez-vous conclure sur la nature de ce point critique ?

Q.58 Une compagnie de boisson aux fruits met en marché une boisson aux pommes dont les coûts de production sont donnés par la fonction

$$C(s,p) = 2200 + 27s^3 - 72sp + 8p^2$$

où s est la concentration de sucre et p, la concentration de pommes. Quelles sont les concentrations de sucre et de pommes qui minimisent ces coûts de production ?

2.6 Multiplicateurs de Lagrange

Q.59 Trouver les extremums absolus de la fonction

$$f(x,y) = 3y - 2x^3 + 4$$

sur la région $R = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq 1\right\}$

Q.60 Trouver les extremums absolus de la fonction

$$f(x,y) = 4y - 5x + 1$$

sur le triangle dont les sommets sont en $(0,0)$, $(0,2)$ et $(3,0)$.

Q.61 Trouver les extremums absolus de la fonction

$$f(x,y) = xy^2$$

sur la région

$$R = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leq 3\right\}$$

Q.62 Trouver les extermums absolus de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2 - 5$$

sur la région $R = \left\{(x,y) \,\middle|\, |x| < 1 \quad \text{et} \quad |y| < 1\right\}$

Q.63 Trouver les extremums absolus de la fonction

$$f(x,y) = y^2 - 6x$$

soumise à la contrainte $x^2 + y^2 = 25$.

Q.64 Trouver les extremums absolus de la fonction

$$f(x,y) = 2x^2 + 4y^2$$

sur la frontière du cercle de rayon 1 et de centre $(0,0)$.

Q.65 Calculer la distance entre l'origine et le plan d'équation $3x - 2y + z = 9$

a) en utilisant l'algèbre linéaire
b) en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Q.66 Trouver les extremums absolus de courbe d'intersection de la surface

$$z = x^3 - y^3$$

avec le plan $x - y = 2$.

Q.67 Trouver les extremums absolus de la fonction

$$f(x,y,z) = xyz$$

sur l'ellipsoïde d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 8$.

Q.68 Trouver les extremums absolus de la fonction

$$f(x,y,z) = xy + 2z$$

sur la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.

Q.69 Une plaque circulaire occupe la région donnée par l'équation $x^2 + y^2 \leq 4$. La température en un point (x,y) de la plaque est donnée par la fonction

$$T(x,y) = y^2 + 2x^2 - y$$

a) À quel endroit la plaque est-elle la plus chaude ?
b) À quel endroit la plaque est-elle la plus froide ?

Q.70 La température **sur la surface** d'une planète d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par la fonction

$$f(x,y,z) = 3x^2 - y + z$$

a) Trouver l'endroit le plus chaud sur cette planète.
b) Trouver l'endroit le plus froid sur cette planète.

2.7 Solutionnaire

Solution 1

a) $4+2\sqrt{2}$

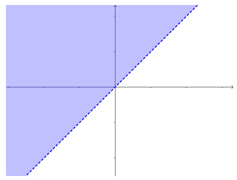
b) $1+\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

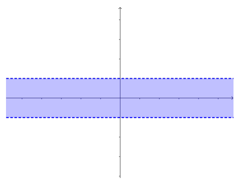
d) 4

Solution 2

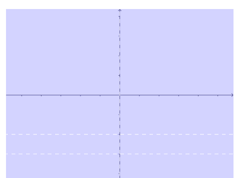
a) $y > x$



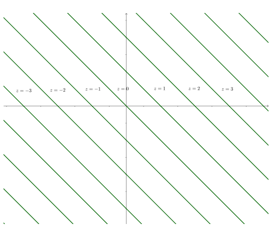
b) $-1 \leq y \leq 1$

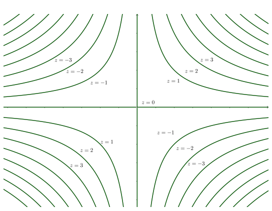


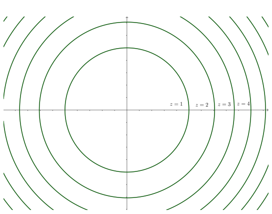
c) $x \neq 0,\ y \neq -2,\ y \neq -3$

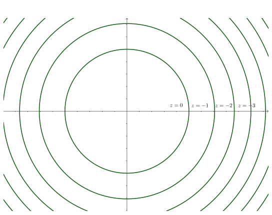


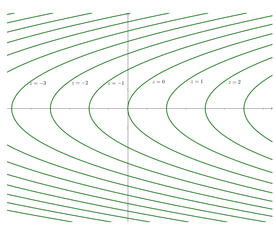
Solution 3

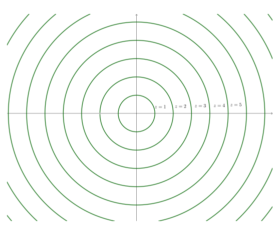
a) 

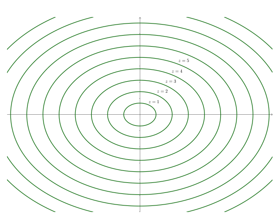
b) 

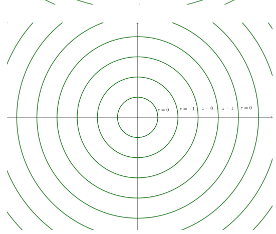
c) 

d) 

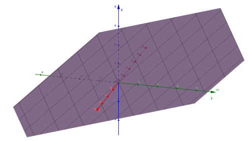
e) 

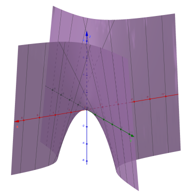
f) 

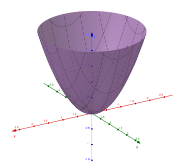
g) 

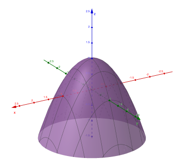
h) 

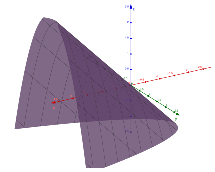
Solution 4

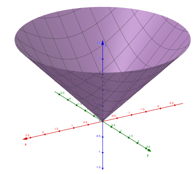
a) 

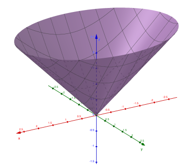
b) 

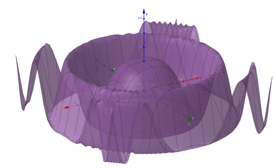
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

Solution 5

a) ii) b) v) c) i) d) vi) e) iii) f) iv)

Solution 6

a) $(-1,\ -1,\ -2)$

b) 2

c) Dans la direction du vecteur $(1,-1)$ ou du vecteur $(-1,1)$.

d) Dans la direction du vecteur $(1,1)$.

e) Dans la direction du vecteur $(-1,-1)$.

Solution 7 Approcher le point par des droites de pentes différentes passant par $(0,\ 0)$

Solution 8

a) 1

b) 0

c) $\nexists$

d) 0

e) $\nexists$

f) 0

Solution 9 f n'est pas continue en $(0,0)$.

Solution 10

a) $z = y^2$

b) pente$= \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 4$

c) $z = 3y^2$

d) pente$= \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,2)} = 12$

e) $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,2)} = 4$

Solution 11 $\quad f_x(1,2) = 8,\ f_y(1,2) = -3$

Solution 12

a) $\ln 5 + \dfrac{3}{5}$ b) 35 c) $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ d) 2

Solution 13

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 10x^4 y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2x^5$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{5y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 5xe^{5y}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 1/y$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\sqrt{y}}{1 + x^2 y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{y}(1 + x^2 y)}$

e) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cos y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y$

f) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 7x^6 + yx^{y-1},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2^y \ln 2 + x^y \ln x$

g) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (15x^2 y - 3y^2) \cos(5x^3 y - 3xy^2),$
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = (5x^3 - 6xy) \cos(5x^3 y - 3xy^2)$

h) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^3 - x^2 y^3 - 2xy}{(1 + x^2)^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3y^2 x + 1}{1 + x^2}$

i) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sec\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{\sqrt{x}}{y} \sec\left(\dfrac{x}{y}\right) \tan\left(\dfrac{x}{y}\right),$
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\sqrt{x^3}}{y^2} \sec\left(\dfrac{x}{y}\right) \tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

j) $f_x = z\mathrm{e}^{\sqrt{xy}}\left(1 + \dfrac{\sqrt{xy}}{2}\right),\ f_y = \dfrac{x^2 z e^{\sqrt{xy}}}{2\sqrt{xy}},\ f_z = xe^{\sqrt{xy}}$

Solution 14

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = g'(y)$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x)g(y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = f(x)g'(y)$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{f'(x)}{g(y)}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-g'(y)f(x)}{g^2(y)}$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x + y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(x + y)$

e) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yf'(xy), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = xf'(xy)$

f) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y} f'\left(\dfrac{x}{y}\right), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-xy'}{y^2} f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$

Solution 15

a) Un emprunt de 8000 \$ à 1% d'intérêt mensuel remboursé sur 24 mois nécessite des versements de 376,59\$

b) À partir de la situation décrite en (a), une légère augmentation du taux d'intérêt engendre une augmentation du versement de 44,83\$ par unité de pourcentage.

c) À partir de la situation décrite en (a), une légère augmentation du montant emprunté engendre une augmentation du versement de 0,047\$ par dollar emprunté.

Solution 16

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\cos(x + 2y) - 2x \sin(x + 2y) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^2 y^3 - 20x^4 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Solution 17

a) $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} = 2$

b) $f_{xx} = 0,\ f_{yy} = x\mathrm{e}^y,\ f_{xy} = f_{yx} = \mathrm{e}^y$

c) $f_{xx} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2),$
$f_{yy} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2),$
$f_{xy} = f_{yx} = -4xy \sin(x^2 + y^2)$

d) $f_{xx} = \dfrac{-1}{y^2} \sin\dfrac{x}{y},\ f_{yy} = \dfrac{2x}{y^3} \cos\dfrac{x}{y} - \dfrac{x^2}{y^4} \sin\dfrac{x}{y},$
$f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{x}{y^3} \sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{y^2} \cos\dfrac{x}{y}$

Solution 18 Laissé à l'étudiant.e

Solution 19 Laissé à l'étudiant.e

Solution 20 Laissé à l'étudiant.e

Solution 21 Laissé à l'étudiant.e

Solution 22 Laissé à l'étudiant.e

Solution 23

a) $3x + 2y + 2z = 17$

b) $4x + 2y + z = 12$

c) $x + 3y + 7z = -9$

d) $z = 1$

Solution 24 $\quad (x, y, z) = (1, -1, 6) + t(0, -1, -1)$

Solution 25

a) $f(x, y) \approx L(x, y) = 9 + 6(x - 3) + 9(y - 1)$

b) $f(x, y) \approx L(x, y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2e} - \dfrac{\sqrt{3}}{2e}(x - 1) + \dfrac{1}{2e}\left(y - \dfrac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x, y) \approx L(x, y) = 2 + \dfrac{1}{4}(x - 3) + y$

Solution 26 $\Delta z = f(1.05, 2.1) - f(1,2) = 0.9225$ et, $dz = 10(1)0.05 + 2(2)0.1 = 0.9$

Solution 27

a) $df = 9x^2dx - 4ydy$

b) $df = \left(2e^{x+2y}\sec^2\left(e^{x+2y}\right)\tan\left(e^{x+2y}\right)\right)dx + \left(4e^{x+2y}\sec^2\left(e^{x+2y}\right)\tan\left(e^{x+2y}\right)\right)dy$

c) $df = \dfrac{3}{z}dx + \dfrac{2y}{z}dy - \dfrac{3x+y^2}{z^2}dz$

d) $df = \dfrac{3x^2+5y}{x^3+5xy+4z^2}dx + \dfrac{5x}{x^3+5xy+4z^2}dy + \dfrac{8z}{x^3+5xy+4z^2}dz$

Solution 28

a) $\dfrac{df}{dt} = 6\sqrt{t} - t^{-9}$

b) $\dfrac{df}{dt} = \pi\cos(\pi t)\cos(\sqrt{t}) - \dfrac{\sin(\pi t)\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$

c) $\dfrac{df}{dt} = 5^{3\sec t}\left(3\ln(\tan t)\sec t\tan t + \sec t\csc t\right)$

Solution 29

a) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 18(3u+v^2)^2 - \dfrac{4u}{v^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 12(3u+v^2)^2 + \dfrac{4u^2}{v^3}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 3e^u$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$

Solution 30 0,5

Solution 31 $\dfrac{dV}{dt} = 2\pi rh + 50\pi r^2$

Solution 32 107.86 km/h

Solution 33 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$

Solution 34

a) $\dfrac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ z)} = r$

b) $\dfrac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ \phi)} = -r^2\sin\phi$

Solution 35 416 699 habitants/an

Solution 36

a) $\partial w/\partial u = 3+\pi$ et $\partial w/\partial v = 4-\pi$

b) $dw/dt = 5\pi - 3\pi^2$

Solution 37

a) $-1/10$

b) $\sqrt{3} + 1/2$

Solution 38 -4.4

Solution 39

$$f''_{\vec{u}} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Solution 40 $e^2(\sqrt{3}+1)$

Solution 41

a) $(-1,\pi)$

b) $(1,3)$

c) $(-2,-7/16)$

d) $(-4/3,4)$

Solution 42 Dans la direction du vecteur (1, 1)

Solution 43

a) $4\sqrt{2}$ dans la direction $\vec{u} = (-1,1)$

b) $\sqrt{2}$ dans la direction $\vec{u} = (1,1)$

c) $\dfrac{\sqrt{32+2\pi^2}}{32}$ dans la direction $\vec{u} = (-4,\pi)$

d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ dans la direction $\vec{u} = (1,-2)$

Solution 44 Dans la direction du vecteur (6, -1).

Solution 45 Dans la direction du vecteur (-1, 1, -1).

Solution 46 Dans la direction du vecteur $(-1,3)$.

Solution 47 $-4z + 9y + 6\sqrt{23}z = 34$

Solution 48 $(1,1,3) + t(1,1,-3)$

Solution 49 Dans la direction du vecteur $(-3,-1,-2)$.

Solution 50 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{9}{5}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{10}$

Solution 51 $y = 2x - 7$

Solution 52 Laissé à l'étudiant.e

Solution 53 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)$ et $\left(\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \dfrac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)$

Solution 54

a) Point de selle

b) Maximum local

c) Minimum local

Solution 55

a) Point de selle en $(0,0)$

b) Max en $(-1,-1)$, Min en $(1,1)$, Point de selle en $(1,-1)$ et $(-1,1)$

c) Le seul point critique de cette fonction est en $(0,0)$ et le test de la dérivée seconde ne nous donne pas de conclusion. Nous pouvons toutefois regarder la fonction numériquement. x^3 est une fonction qui n'a pas de maximum. Elle est croissante sur tout son domaine. e^{-y^2} atteint son maximum lorsque $y=0$. La somme des deux expressions ne peut pas être borné sur un disque ouvert. N'importe quel point $(x+\epsilon,\ 0)$ pour $\epsilon > 0$ aura une image supérieure à $f(0,0)$. Comme c'était notre seul candidat, nous pouvons dire que cette fonction n'a pas de maximum. Un raisonnement semblable nous pousse à dire qu'elle n'a pas de minimum. Elle n'a pas de point de selle.

d) Point de selle en $(1,-1)$ et $(-1,1)$

e) Puisque $(0,0)$ ne fait pas partie du domaine, on peut l'exclure des points critique. Max en $\left(-\sqrt[3]{5^2}, \sqrt[3]{5}\right)$.

f) Max en $(1,1)$ et en $(-1,-1)$, Point de selle en $(0,0)$

g) Min en $(2k\pi, 0)$, Point de selle en $((2k+1)\pi, 0)$

h) Point de selle en $(0,0)$

i) Max en $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$
et en $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$,
Min en $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$
et en $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$,
Points de selle en $(k\pi, n\pi)$

Solution 56 $\left(\frac{5}{6}, \frac{-4}{3}, \frac{7}{6}\right)$

Solution 57

a) La fonction $g(x) = f(x, kx) = k^2x^2 - 4kx^3 + 3x^4$ possède un minimum relatif en $x = 0$ car $g'(0) = 0$ et $g''(0) = 2k^2 > 0$

b) Non ici $g(x) = f(x, 2x^2) = -x^4$ a un maximum relatif en $x = 0$.

c) C'est un point de selle.

Solution 58 $s = 4$, $p = 18$

Solution 59 Max=7 atteint en $(0,1)$. Min=2 atteint en $(1,0)$.

Solution 60 Max=9 atteint en $(0,2)$. Min=-14 atteint en $(3,0)$.

Solution 61 Min=0 atteint sur les axes. Max=2 atteint en $(1,\sqrt{2})$.

Solution 62 Min=-5 atteint en $(0,0)$. Pas de maximum.

Solution 63 Max=34 atteint en $(-3,4)$ et en $(-3,-4)$, Min=-30 atteint en $(5,0)$.

Solution 64 Max=4 atteint en $(0,1)$ et en $(0,-1)$. Min=2 atteint en $(1,0)$ et en $(-1,0)$.

Solution 65

a) Si on prend $A(3,0,0)$ comme point du plan on a $\|\vec{OA}_{\vec{n}}\| = \frac{9}{\sqrt{14}}$

b) Avec le lagrangien $L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(3x-2y+z-9)$ on trouve le seul point critique $\left(\frac{27}{14}, -\frac{18}{14}, \frac{9}{14}\right)$

Solution 66 Min= 2 atteint en $(1,-1)$. Pas de maximum.

Solution 67 Max= $\frac{16\sqrt{3}}{9}$, Min= $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$

Solution 68 Max=10 atteint en $(\sqrt{6},\sqrt{6},2)$ et en $(-\sqrt{6},-\sqrt{6},2)$. Min=-10 atteint en $(-\sqrt{6},\sqrt{6},-2)$ et en $(\sqrt{6},-\sqrt{6},-2)$.

Solution 69

a) Aux points $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

b) Au point $(0, 1/2)$

Solution 70

a) $\left(\sqrt{\frac{71}{18}}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{71}{18}}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

b) $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$