3 Intégrale multiple

3.1 Intégrale double

1. Évaluer les sommes demandées.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i+j)^2$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{j} ij$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=0}^{15}\frac{i}{2^j}$

2. Pour chacune des fonctions données, évaluer

$$\int_0^2 f(x,y)dx \quad et \quad \int_0^3 f(x,y)dy$$

a) $f(x,y) = 4xy - 3y^2$

b) $f(x,y) = \dfrac{2x}{y-7}$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \cos(xy)$

3. Calculer les intégrales données.

a) $\displaystyle\int 2xe^y\ dx.$

b) $\displaystyle\int \sec^2(xy)\tan^3(xy)\ dy.$

4. Calculer les intégrales données.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\ dxdy.$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^2 x^2+y^2\ dxdy.$

c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^2 x^2y^2\ dxdy.$

d) $\displaystyle\int_1^4\int_1^2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\ dydx$

e) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\sqrt{x+y}\ dydx$

f) $\displaystyle\int_1^2\int_1^3\frac{1}{x+y}\ dxdy.$

g) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5x^2+1)\sin 3y\ dxdy.$

5. Calculer les intégrales données.

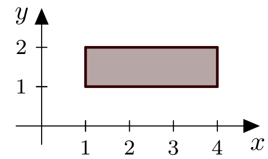
a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi} y\cos(xy)\ dydx$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 e^{2x}\sin(ye^x)\ dxdy.$

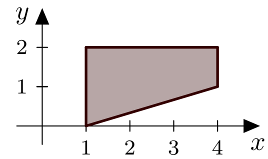
c) $\displaystyle\int_1^3\int_1^2\frac{\ln(xy)}{x}\ dydx.$

3.2 Domaines divers

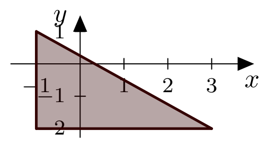
6. Écrire l'intégrale que l'on doit calculer pour évaluer $\displaystyle\int_R f(x,\ y)\,dA$ sur la région R donnée.



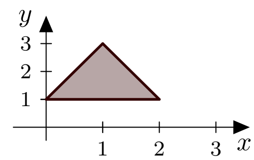
a)



c)



b)



d)

7. Tracer le graphique de la région d'intégration des intégrales données.

a) $\displaystyle\int_1^3\int_0^4 e^{x+y}\,dy\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^5\int_x^{2x}\sin x\,dy\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^{y} x^2y^3\,dx\,dy$

e) $\displaystyle\int_{-2}^0\int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 2xy\,dy\,dx$

8. Calculer les intégrales du numéro précédent.

9. Calculer les intégrales sur les domaines spécifiés.

a) $\displaystyle\iint x^3y^2dA$ $\quad D=\{(x,y)|0\le x\le 2, -x\le y\le x\}.$

b) $\displaystyle\iint \frac{4y}{x^3+2}dA$ $\quad D=\{(x,y)|1\le x\le 2, 0\le y\le 2x\}.$

c) $\displaystyle\iint \frac{2y}{x^2+1}dA$ $\quad D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le \sqrt{x}\}.$

d) $\displaystyle\iint e^{y^2}dA$ $\quad D=\{(x,y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y\}.$

10. Calculer les intégrales sur les domaines spécifiés.

a) $\displaystyle\iint_D x\cos y dA$ $\quad D$ est entre $y=0, y=x^2$ et $x=\sqrt{\pi}$.

b) $\displaystyle\iint_D x+y dA$ $\quad D$ est entre $y=\sqrt{x}$ et $y=x^2$.

c) $\displaystyle\iint_D y^3 dA$ $\quad D$ est le triangle dont les sommets sont
. $(0,2),(1,1)$ et $(3,2)$.

d) $\displaystyle\iint_D xy^2 dA$ $\quad D$ est entre $x=0$ et $x=\sqrt{1-y^2}$.

e) $\displaystyle\iint_D \ln x\ dA$ $\quad D$ est la région bornée du premier
. quadrant entre la droite $2x+2y=5$
. et l'hyperbole $xy=1$.

11. Calculer les intégrales suivantes en inversant l'ordre d'intégration.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dxdy$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dxdy$

c) $\displaystyle\int_0^3\int_{y^2}^9 y\sin x^2\, dxdy$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{2+x^3}\, dx\, dy$

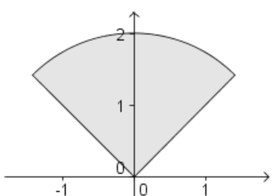
12. Calculer le volume du solide compris entre la surface $z = 25 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 16$.

13. Calculer le volume du solide compris entre les plans $y = 0$, $z = 0$ et $z = a - x + y$ et le cylindre parabolique $y = a - \dfrac{x^2}{a}$ où a est une constante positive.

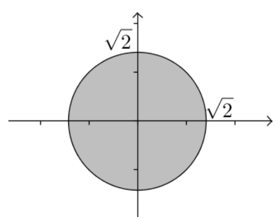
14. Calculer le volume du solide compris entre les surfaces $z = 1 - y^2$ et $z = x^2$.

3.3 Intégration en coordonnée polaire

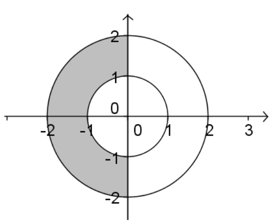
15. Pour chacune des régions, écrire $\displaystyle\int_R f\,dA$ comme une intégrale double en coordonnées polaires.



a)



c)



b)

16. Tracer la région sur laquelle les intégrales suivantes sont calculées.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^2 f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta} f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$

d) $\displaystyle\int_1^4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r,\theta) r\, d\theta\, dr$

17. Refaire la question 14 en utilisant les coordonnées polaires.

18. Calculer les intégrales suivantes en utilisant les coordonnées polaires.

a) $\displaystyle\iint_D xydA$, où D est le disque de rayon 4 centré à l'origine

b) $\displaystyle\iint_D (3x-2y)dA$ où D est la région du premier quadrant comprise entre le cercle de rayon 2 centré à l'origine, l'axe des y et la droite $y = \sqrt{3}x$

c) $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)dA$, où D est la région à l'intérieur du cercle $x^2+y^2 = 4$ et comprise entre $y \geq x$ et $y \geq -x$.

d) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x_2+y^2}dA$, où D est la région entre les cercles $x^2+y^2 = 9$ et $x^2+y^2 = 16$

19. Convertir les intégrales suivantes en coordonnées polaires et les évaluer.

a) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\, dy\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$

c) $\displaystyle\int_0^3\int_x^{\sqrt{3}x} \frac{x}{y^2} dy\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-3}^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\, dy\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y\, dx\, dy$

f) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$

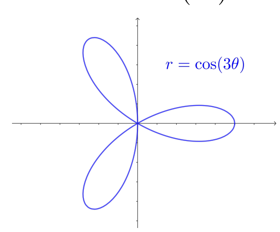
20. Utiliser le fait que l'aire d'une région R du plan peut être calculé en utilisant

$$\iint_R 1dA$$

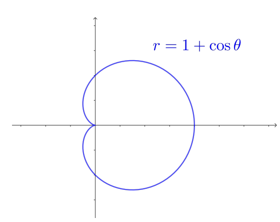
pour trouver l'aire de ;

a) Un cercle de rayon a centré à l'origine

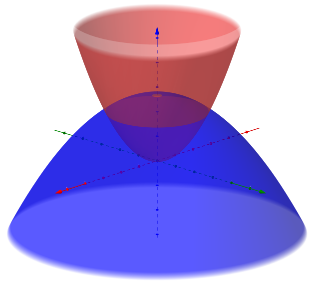
b) Une feuille de la rosace $r = \cos(3\theta)$



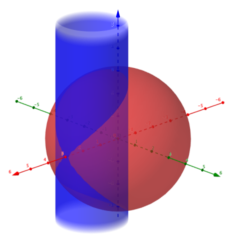
c) La région à l'intérieur du cardioïde $r = 1 + \cos\theta$



21. Trouver le volume entre les surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = \dfrac{4}{3} - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{3}$



22. Trouver le volume à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 3x$



3.4 Aire de surface et applications

23. Trouver la valeur moyenne de la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sur l'anneau $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$

24. Trouver la distance moyenne entre les points du disque de rayon a et l'origine.

25. Trouver la distance moyenne par rapport à l'axe des x pour les points se trouvant dans la région délimitée par l'axe des x et la courbe $y = x - x^2$

26. Calculer la masse et le centre de masse d'une plaque de métal occupant la région R et de fonction densité $\rho(x, y)$;

a) R est le rectangle $0 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq 2$ et $\rho(x, y) = xy^2$

b) R est le rectangle $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$ et $\rho(x, y) = xy$

c) R est le triangle de sommets $(0, 0), (1, 2)$et $(5, 0)$ et $\rho(x, y) = x + y$

d) R est le disque de rayon 1 $x^2 + y^2 \leq 1$ et $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

e) R est la région borné par $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$ et $\rho(x, y) = y$

27. Trouver le centre de masse d'une plaque comprise à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 2y$ et à l'extérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$ si sa fonction de densité est inversement proportionnelle à sa distance à l'origine.

28. Calculer l'aire de la région de la surface spécifiée.

a) La partie du plan $z = 3x - 2y$ au-dessus du rectangle $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$.

b) La partie du plan $z = 2x + 2y$ à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 4$.

c) Le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ dans le premier octant.

d) La surface $z = y^2$ au-dessus du triangle de sommets $(0, 0), (0, 2)$ et $(2, 2)$

e) La surface $z = \sqrt{x}$ au-dessus de la région $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq \sqrt{x}$

29. Trouver l'aire du paraboloïde hyperbolique $z = x^2 - y^2$ délimité par le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$

30. Montrer que l'aire de la surface $z = 2xy$ est égale à l'aire de la surface $z = x^2 + y^2$ à l'intérieur d'un cylindre centré à l'origine.

3.5 Intégrale triple

31. Calculer les intégrales données.

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^3 \int_0^4 \; dxdydz$

b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^3 \int_0^1 xy \; dxdydz$

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_0^2 \int_2^5 3zy^2 \; dxdydz$

d) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^3 \int_0^2 ze^x \; dxdydz$

32. Calculer l'intégral $\displaystyle\iiint_R (xy - z^2) dV$ sur

$$R = \{(x, y, z) \big| -2 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4,\ -3 \leq z \leq 0\}$$

selon trois des différents ordres d'intégration.

33. Calculer $\displaystyle\int_R f(x, y, z)\, dV$ pour les fonctions et les régions données.

a) $f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - z$;

$$R = \Big\{(x, y, z) \Big| 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1,\ 2 \leq z \leq 3\Big\}.$$

b) $f(x, y, z) = \sin x \cos(y + z)$;

$$R = \Big\{(x, y, z) \Big| 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi,\ 0 \leq z \leq \pi\Big\}.$$

34. Calculer les intégrales itérées suivantes

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} dxdydz$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \int_0^{x+y} z\ dzdydx$

c) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\ dxdzdy$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\ dxdydz$

35. Décrire ou tracer la région d'intégration des intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \int_0^{6-x-2y} f(x,\ y,\ z)\, dz\, dy\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^x f(x,\ y,\ z)\, dz\, dy\, dx$

36. Trouver la masse du solide borné par le plan $z = 0$, le plan $y = 0$ et le plan $2x + 3y + z = 6$ si la densité du solide au point (x, y, z) est donnée par

$$\delta(x, y, z) = x + y$$

37. Réécrire les intégrales suivantes en changeant l'ordre d'intégration de telle sorte qu'on intègre par rapport à x en premier et à z en dernier.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^1 f(x, y, z) dz\ dy\ dx$

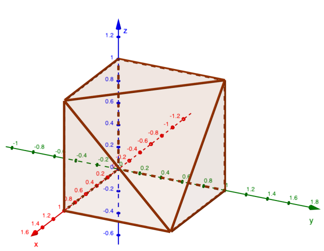
b) $\displaystyle\int_0^1 \int_z^1 \int_0^y f(x, y, z) dz\ dy\ dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_z^1 \int_0^{x-z} f(x, y, z) dz\ dx\ dy$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^1 f(x, y, z) dy\ dz\ dx$

38. Trouver le centroïde du tétraèdre délimité par les plans de coordonnées et le plan $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. Comparer le résultat avec le barycentre des quatre sommets de ce tétraèdre.

39. Trouver le centroïde de la région à l'intérieur du cube $0 \leq x, y, z \leq 1$ et sous le plan $x + y + z = 2$



40. Calculer la masse et le centre de masse d'un solide occupant la région R et de fonction de densité $\rho(x, y, z)$;

a) R est sous le plan $z = 1 + x + y$ et au-dessus de la région du plan délimitée par $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 1$ pour $\rho(x, y, z) = 6$

b) R est bornée par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $x + z = 1$, $x = 0$ et $z = 0$ pour $\rho(x, y, z) = 4$

c) R est le cube $0 \leq x, y, z \leq 2$ et $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

3.6 Intégration en coordonnées sphériques et cylindriques

41. Écrire une intégrale triple représentant le volume d'une pointe d'un gâteau cylindrique de hauteur 2 et de rayon 5, entre les plans $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

42. Représenter le solide dont le volume est donné par les intégrales suivantes et calculer le volume.

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 r\ dz\ d\theta\ dr$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_r^{9-r^2} r\ dz\ dr\ d\theta$

43. Évaluer le volume des régions spécifiées.

a) R est la région à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) R est la région entre les paraboloïdes $z = 10 - x^2 - y^2$ et $z = 2(x^2 + y^2 - 1)$

c) R est la région au-dessus de la surface $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

44. Évaluer les intégrales $\displaystyle\iiint_R f(x, y, z) dV$ en coordonnées cylindriques.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,
R est la région $0 \leq r \leq 4$, $\dfrac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$, $-1 \leq z \leq 1$.

b) $f(x, y, z) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$,
R est le cylindre circulaire droit de hauteur 4 dont la base est centrée sur l'axe des z en $z = -1$ et le rayon est de 1.

c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, R est la région bornée par le cylindre $x^2 + y^2 = 25$ et les plans $z = 2$ et $z = 6$

45. Représenter le solide dont le volume est donné par les intégrales suivantes et la calculer

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$

46. Évaluer le volume de la région entre la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = z$ et le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

47. Évaluer l'intégrale en coordonnées sphériques de

$$f(x,\ y,\ z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sur la partie inférieure de la sphère de rayon 5 centrée à l'origine.

48. Évaluer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy\, dz\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy\, dx\, dz$

49. Trouver le volume d'une sphère de rayon R dans laquelle on a percé un trou cylindrique de rayon a au centre.

50. Calculer $\displaystyle\iiint_R x^2 + y^2\ dV$ ou R est la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

51. Calculer le Jacobien des transformations suivantes.

a) $x = 3u - 2v, \quad y = 5u + v$

b) $x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2$

c) $x = \dfrac{u}{u + v}, \quad y = \dfrac{v}{u - v}$

d) $x = u \cos v, \quad y = u \sin v$

e) $x = 3u, \quad y = 2v, \quad z = 5w$

52. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable donné.

a) $\displaystyle\iint_R 2x - y dA$ sur la région triangulaire dont les sommets sont $(0, 0)$, $(2, 1)$ et $(1, 2)$ avec $x = 2u + v, \quad y = u + 2v$

b) $\displaystyle\iint_R x^2 dA$ sur la région bornée de l'ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ avec $x = 3u, \quad y = 2v$

c) $\displaystyle\iint_R x^2 - xy + y^2 dA$ sur la région bornée de l'ellipse $x^2 - xy + y^2 = 2$ avec $x = \sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v, \quad y = \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v$

53. Trouver le volume de l'éllipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

3.7 Solutionnaire

Solution 1

a) 266

b) 75

c) $110\left(1-\dfrac{1}{2^{16}}\right)$

Solution 2

a) $\displaystyle\int_0^2 f\,dx = 4y-6y^2$ et $\displaystyle\int_0^3 f\,dy = 18x-9$

b) $\displaystyle\int_0^2 f\,dx = \frac{4}{y-7}$ et $\displaystyle\int_0^3 f\,dy = 2x\ln\left(\frac{5}{7}\right)$

c) $\displaystyle\int_0^2 f\,dx = \frac{1}{y}\arctan\frac{2}{y}$ et $\displaystyle\int_0^3 f\,dy = \frac{1}{x}\arctan\frac{3}{x}$

d) $\displaystyle\int_0^2 f\,dx = \frac{\sin 2y}{y}$ et $\displaystyle\int_0^3 f\,dy = \frac{\sin 3x}{x}$

Solution 3

a) $x^2e^y + C(y)$

b) $\dfrac{\tan^4(xy)}{4x} + C(x)$

Solution 4

a) 1

b) $\dfrac{32}{3}$

c) $\dfrac{64}{9}$

d) $\ln 2^{\frac{21}{2}}$

e) $\dfrac{4}{15}(9\sqrt{3}-4\sqrt{2}-1)$

f) $5\ln 5 - 4\ln 4 - 3\ln 3 + 2\ln 2$

g) $\dfrac{32}{9}$

Solution 5

a) 2

b) $\sin 1 - \sin e + e - 1$

c) $\dfrac{1}{2}\ln^2 3 + \ln 3(2\ln 2 - 1)$

Solution 6

a) $\displaystyle\int_1^4\int_1^2 f(x,y)\,dy\,dx$

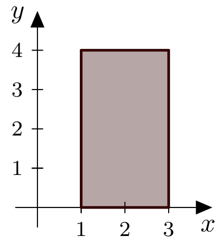
b) $\displaystyle\int_{-1}^3\int_{-2}^{\frac{1-3x}{4}} f(x,y)\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^4\int_{\frac{x-1}{3}}^2 f(x,y)\,dy\,dx$

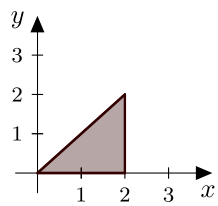
d) $\displaystyle\int_1^3\int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{5-y}{2}} f(x,y)\,dx\,dy$

Solution 7

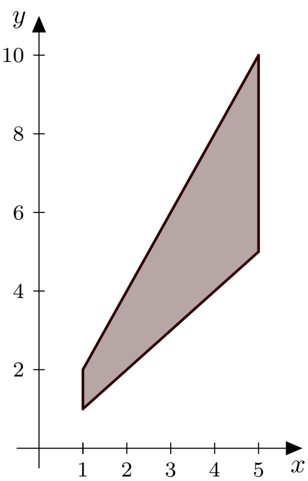
a)



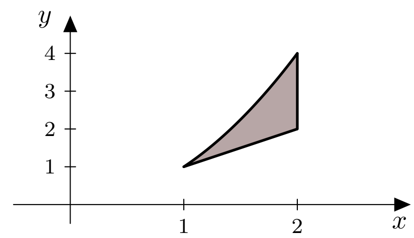
b)



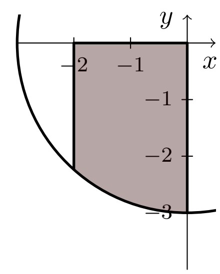
c)



d)



e)



Solution 8

a) $(e^4-1)(e^3-e)$

b) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^4-1)$

c) $\approx -2,68$

d) $\approx 656,08$

e) 14

Solution 9

a) $\dfrac{256}{21}$

b) $\dfrac{8}{3}\ln\left(\dfrac{10}{3}\right)$

c) $\dfrac{1}{2}\ln 2$

d) $\dfrac{e-1}{2}$

Solution 10

a) 1

b) $\dfrac{3}{10}$

c) $\dfrac{147}{20}$

d) $\dfrac{2}{15}$

e) $\dfrac{33}{8}\ln 2 - \dfrac{45}{16}$

Solution 11

a) 1

b) $\dfrac{e-1}{3}$

c) $\dfrac{1-\cos 81}{4}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

Solution 12 27π

Solution 13 $\dfrac{28}{15}a^3$

Solution 14 $\dfrac{\pi}{2}$

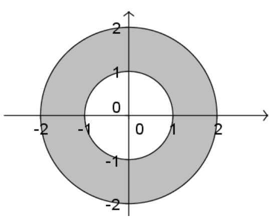
Solution 15

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^2 f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$

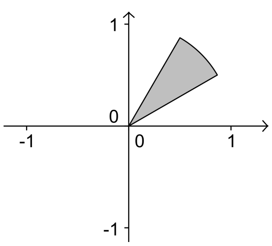
b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_1^2 f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$

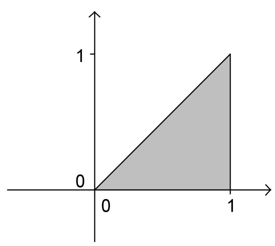
Solution 16



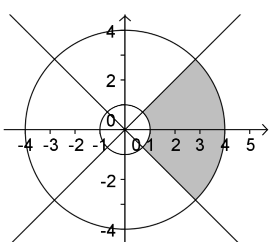
a)



b)



c)



d)

Solution 17 $\dfrac{\pi}{2}$

Solution 18

a) 0

b) $\dfrac{16}{3}-4\sqrt{3}$

c) $\dfrac{\pi\sin 4}{4}$

d) $\dfrac{7\pi}{2}$

Solution 19

a) $\dfrac{-2}{3}$

b) $\dfrac{\pi(e^4-1)}{8}$

c) $3-\sqrt{3}$

d) $\dfrac{3(1-\cos 9)}{2}$

e) $\dfrac{a^5}{15}$

f) $\dfrac{16}{9}$

Solution 20

a) πa^2

b) $\dfrac{\pi}{12}$

c) $\dfrac{3\pi}{2}$

Solution 21 $\dfrac{2\pi}{3}$

Solution 22 $18\pi-24$

Solution 23 $\dfrac{2}{5}$

Solution 24 $\dfrac{2a}{3}$

Solution 25 $\dfrac{1}{10}$

Solution 26

a) $M=24$, $\bar{x}=2$ et $\bar{y}=0$

b) $M=\dfrac{a^2b^2}{4}$, $\bar{x}=\dfrac{2a}{3}$ et $\bar{y}=\dfrac{2b}{3}$

c) $M=\dfrac{40}{3}$, $\bar{x}=\dfrac{19}{8}$ et $\bar{y}=\dfrac{11}{16}$

d) $M=\dfrac{3\pi}{2}$, $\bar{x}=0$ et $\bar{y}=0$

e) $M=\dfrac{e^2-1}{4}$, $\bar{x}=\dfrac{e^2+1}{2(e^2-1)}$ et $\bar{y}=\dfrac{4(e^3-1)}{9(e^2-1)}$

Solution 27 $M=2\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}$, $\bar{x}=0$ et $\bar{y}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}}$

Solution 28

a) $6\sqrt{14}$

b) 12π

c) $\dfrac{\pi}{24}(\sqrt{125}-1)$

d) $\dfrac{13}{6}$

e) $\dfrac{\sqrt{125}-1}{12}$

Solution 29 $\dfrac{\pi}{6}\left(\sqrt{(1+4a^2)^3}-1\right)$

Solution 30 Laissé à l'étudiant.e

Solution 31

a) 24

b) $\dfrac{9}{4}$

c) 36

d) $\dfrac{9(e^2-1)}{2}$

Solution 32 -144

Solution 33

a) 2

b) -8

Solution 34

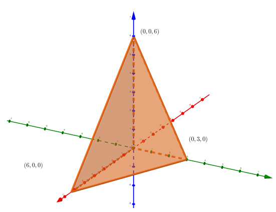
a) $\dfrac{1}{2}$

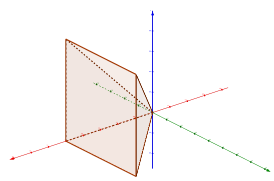
b) $\dfrac{5}{112}$

c) $\dfrac{e^3-1}{3}$

d) $\dfrac{e^{-1}-2}{4}$

Solution 35

a) 

b) 

Solution 36 $\dfrac{15}{2}$

Solution 37

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^1 f(x,y,z)dx\ dy\ dz$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^1 f(x,y,z)dx\ dy\ dz$

c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^1 f(x,y,z)dx\ dy\ dz$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^1 f(x,y,z)dx\ dy\ dz$

Solution 38 $\left(\dfrac{a}{4},\dfrac{b}{4},\dfrac{c}{4}\right)$

Solution 39 $V=\dfrac{5}{6}$, $\bar{x}=\dfrac{9}{20}$, $\bar{y}=\dfrac{9}{20}$ et $\bar{z}=\dfrac{9}{20}$

Solution 40

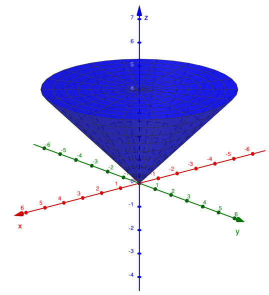
a) $M=\dfrac{79}{10}$, $\bar{x}=\dfrac{358}{553}$, $\bar{y}=\dfrac{33}{79}$ et $\bar{z}=\dfrac{571}{553}$

b) $M=\dfrac{16}{5}$, $\bar{x}=\dfrac{5}{14}$, $\bar{y}=0$ et $\bar{z}=\dfrac{2}{7}$

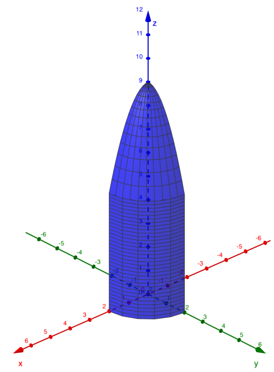
c) $M=2^5$, $\bar{x}=\dfrac{7}{6}$, $\bar{y}=\dfrac{7}{6}$ et $\bar{z}=\dfrac{7}{6}$

Solution 41 $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^5 r\,dr\,d\theta\,dz$

Solution 42



a) $V=\dfrac{2^6\pi}{3}$



b) $V=\dfrac{22\pi}{3}$

Solution 43

a) $9\pi(2-\sqrt{2})$

b) 18π

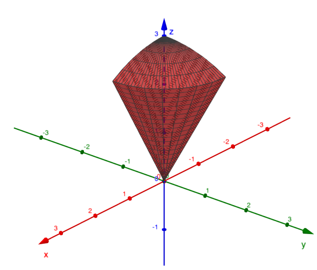
c) $\dfrac{7\pi}{6}$

Solution 44

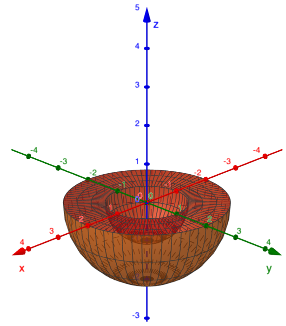
a) $\dfrac{200\pi}{3}$

b) $8\pi(\sin 1-\cos 1)$

Solution 45



a) $V=\dfrac{9\pi}{4}(2-\sqrt{3})$



b) $V = \dfrac{14\pi}{3}$

Solution 46 $\dfrac{\pi}{8}$

Solution 47 25π

Solution 48

a) π

b) 2π

Solution 49 $\dfrac{4\pi}{3}\left(a^2 - R^2\right)^{3/2}$

Solution 50 $\dfrac{8\pi a^5}{15}$

Solution 51

a) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 13$

b) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -8uv$

c) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{2uv}{(u+v)^2(u-v)^2}$

d) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = u$

e) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 30$

Solution 52

a) $\dfrac{15}{4}$

b) $\dfrac{27\pi}{2}$

c) $\dfrac{8\pi}{3}$

Solution 53 $\dfrac{4abc\pi}{3}$