

**Examen 1**  
 201-GNF Calcul 3  
 ♥ 14 février 2019 ♥  
 Professeur : Dimitri Zuchowski

Consignes

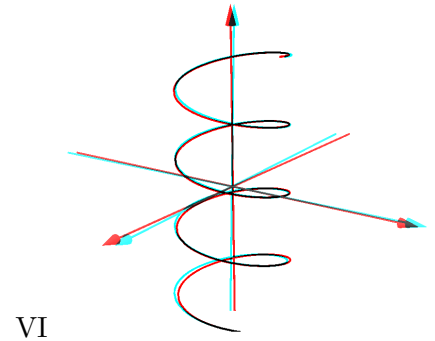
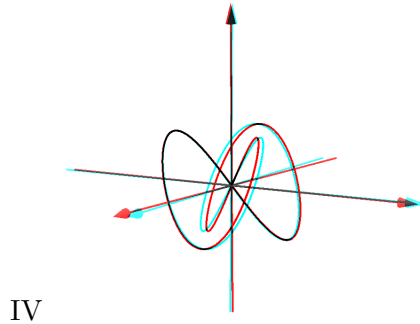
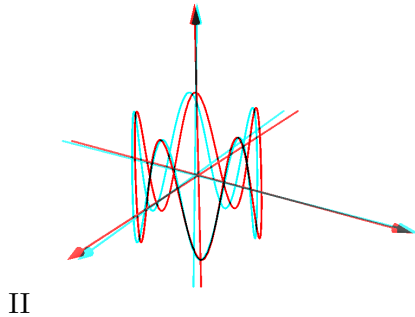
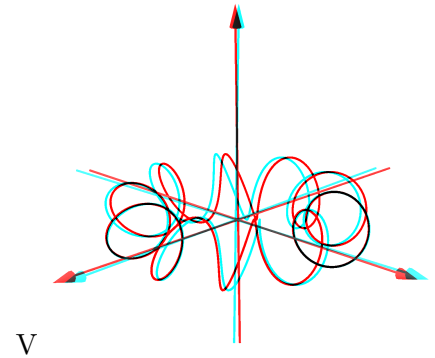
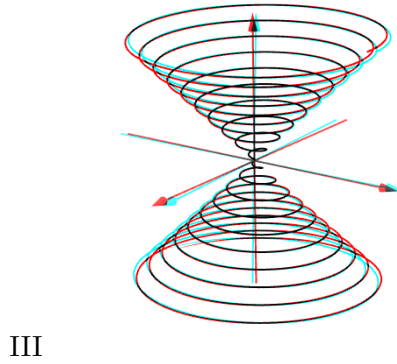
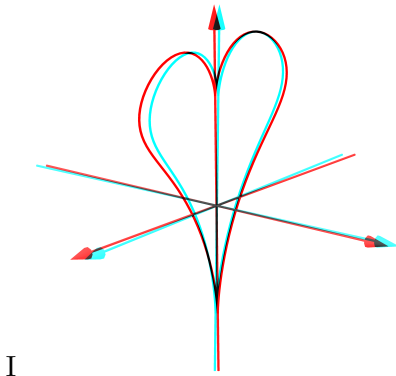
Aucune calculatrice ni documentation ne sont permises. Toute forme de plagiat et de communication est interdite et entraîne la note ZÉRO. Une réponse, même si elle est bonne, sans justification vaut ZÉRO.

Formulaire

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \quad \tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|^2} \quad a_T(t) = \frac{\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)}{v(t)} \quad a_N(t) = \frac{\|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)\|}{v(t)}$$

**Question 1. (10%)**

Associer chacune des courbes suivantes avec la fonction vectorielle qui lui correspond



- |  |  |
|--|--|
| A. $\vec{r}(t) = (\sin t, \sin 2t, \sin 3t)$ | D. $\vec{r}(t) = (\sin^3 t, 0, \cos t - \cos^4 t + 1)$                     |
| B. $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, \sin 5t)$  | E. $\vec{r}(t) = ((3 + \sin 10t) \sin t, (3 + \sin 10t) \cos t, \cos 10t)$ |
| C. $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$        | F. $\vec{r}(t) = (t \sin t, t \cos t, t)$                                  |

**Question 2. (10%)**

Trouver l'équation vectorielle de la droite tangente à la courbe  $\vec{r}(t) = (2t + 5, t^2 - 4, 7 + t^3)$  au point  $(1, 0, -1)$ .

**Question 3. (10%)**

Montrer que le vecteur tangent à la courbe ayant comme paramétrisation

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$$

forme, pour toutes valeurs de  $t$ , un angle constant de  $\frac{\pi}{4}$  avec le vecteur position.

(indice : produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ )

**Question 4. (10%)**

Calculer la longueur d'arc de la fonction  $\vec{r}(t) = (t, \ln(\sec t), \ln(\sec t + \tan t))$  sur l'intervalle  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ . (Si vous ne vous souvenez plus comment calculer votre intégrale, observez ce que vous venez de calculer juste avant).

**Question 5. (20%)**

Pour la courbe  $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, 2 - t\right)$  au point  $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ , trouver

- |                 |   |
|-----------------|---|
| a) $\vec{T}(1)$ | c) $\vec{B}(1)$                                       |
| b) $\vec{N}(1)$ | d) L'équation normale du plan osculateur en $t = 1$ . |

**Question 6. (15%)**

Soit la courbe  $\vec{r}(t) = (t^2, t^3 + t, 2 - t)$ , trouver (sans simplifier)

- |                |              |              |
|----------------|--------------|--------------|
| a) $\kappa(t)$ | b) $\rho(t)$ | c) $\tau(t)$ |
|----------------|--------------|--------------|

**Question 7. (20%)**

Une particule décrit une trajectoire dont l'accélération est donnée par  $\vec{a}(t) = (e^t, 15\sqrt{t}, 12t^2)$ . Si sa position initiale est  $\vec{r}(0) = (2, 1, 3)$  et sa vitesse initiale est  $\vec{v}(0) = (1, 2, 3)$ , trouver

- |                 |                 |             |             |
|-----------------|-----------------|-------------|-------------|
| a) $\vec{v}(t)$ | b) $\vec{r}(t)$ | c) $a_T(1)$ | d) $a_N(1)$ |
|-----------------|-----------------|-------------|-------------|

**Question 8. (5%)**

Sans effectuer de calcul, justifier pourquoi la torsion de  $\vec{r}(t) = (e^t \sin^3 t, \tan^4 t, 1)$  doit être nulle.

**Question 9. (5% BONUS)**

Soit  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  deux vecteurs unitaires et  $\theta$  l'angle entre les deux. Si une particule se déplace selon un courbe de l'espace de telle sorte que son vecteur vitesse et son vecteur position sont liés de la manière suivante,

$$\vec{v}(t) = \vec{A} \wedge \vec{r}(t),$$

et si, de plus,  $\vec{r}(0) = \vec{B}$ , alors démontrer que la courbure,  $\kappa(t)$ , est constante et trouver la en fonction de  $\theta$ .

(indice : le théorème qui dit  $\|\vec{r}(t)\| = c \implies \vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$  est aussi vrai dans l'autre sens  $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t) \implies \|\vec{r}(t)\| = c$ )