Examen 2 (solution)
201-GNF Calcul 3
21 mars 2019
Professeur : Dimitri Zuchowski

Question 1. (10%)

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{4x^2+y^2}$. Si on prend les chemin $y=kx$ alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(kx)^2}{4x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{x^2(4+k^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{(4+k^2)}=\frac{0}{4}=0$$

Si on prend les chemin $y=kx^2$ alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(kx^2)^2}{4x^2+(kx^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^6}{x^2(4+k^2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{(4+k^2x^2)}=\frac{0}{4}=0$$

Donc si la limite existe elle sera égale à 0

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^3}$. Si on prend les chemin $y=mx+1$ alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(mx+1-1)}{x^2+(mx+1-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^3x}=m$$

Donc, puisqu'on obtient des valeurs différentes de limite pour des chemins différents, la limite n'existe pas.

Question 2. (12%)

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)$, $\quad\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x^3\sin(xy)+1$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos(xy)-4xy\sin(xy)-x^2y^2\cos(xy)$, $\quad\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^4\cos(xy)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3x^2\sin(xy)-x^3y\cos(xy)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\quad\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $\quad\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}$

Question 3. (13%)

Soit la fonction $f(x,y)=x^2y+y^2$. Calculer

a) (5%) $\nabla f=(2xy,x^2+2y)$, $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ donc $f'_{\vec{u}}(1,2)=(4,5)\cdot\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{8}{5}$.

b) (5%) La dérivée maximale au point $(1,2)$ est dans la direction de $\nabla f(1,2)=(4,5)$ et donc
$f'_{\nabla f(1,2)}(1,2)=(4,5)\cdot\left(\dfrac{4}{\sqrt{41}},\dfrac{5}{\sqrt{41}}\right)=\sqrt{41}$

c) (3%) $\nabla f(1,2)_\perp=(-5,4)$ et $-\nabla f(1,2)_\perp=(5,-4)$

Question 4. (7%)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{xy}{1+(xy)^2} - \arctan(xy)}{x^2} 2\sin t\cos t + \frac{1}{1+(xy)^2}5e^{5t}$$

Question 5. (10%)

On a $f\left(\pi, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\pi) = \frac{\sqrt{2}}{8} - 1$ et donc le plan tangent passe par le point $\left(\pi, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8} - 1\right)$. Les vecteurs directeurs du plan tangent sont $\vec{d_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = (1, 0, y^2\cos(xy) - \sin x)$ et $\vec{d_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (1, 0, \sin(xy) + xy\cos(xy))$ et donc une équation vectorielle du plan tangent est

$$(x, y, z) = \left(\pi, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8} - 1\right) + k\left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{32}\right) + t\left(0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$$

Question 6. (7%)

$$\begin{aligned}\nabla(uv) &= \left(\frac{\partial uv}{\partial x}, \frac{\partial uv}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= \left(u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}v, \frac{\partial u}{\partial y}v\right) = u\nabla v + v\nabla u\end{aligned}$$

Question 7. (25%)

Soit la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

a) (7%) Les points critiques doivent satisfaire à $\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0, 0)$. On a $3x^2 - 3y = 0 \Longrightarrow y = x^2$. Si on substitue cette dernière dans la deuxième équation on obtient $3x^4 - 3x = 3x^3(x-1) = 0$. Donc $x = 0$ ou $x = 1$. Les deux point critique sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

b) (7%) $D(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (6x)(6y) - (-3)^2$
Pour $(0, 0)$, on a $D(0, 0) = -9 < 0$ donc le point critique est un point de selle.
Pour $(1, 1)$, on a $D(1, 1) = 18 - 9 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$ donc le point critique est un minimum.

c) (11%) Pour $y = 0$, on a $f(x, 0) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ est toujours positive donc $f(x, 0)$ est croissante. Min en $f(1, 0) = 1$ et max en $f(2, 0) = 8$.
Pour $x = 2$, on a $f(2, y) = y^3 - 6y + 8$, $f'(x) = 3y^2 - 6$ est toujours négative dans l'intervalle $[0, 1]$ donc $f(2, y)$ est décroissante. Max en $f(2, 0) = 8$ et min en $f(2, 1) = 3$.
Pour $y = x - 1$, on a $f(x, x-1) = x^3 + (x-1)^3 - 3x(x-1)$, $f'(x) = 6(x-1)^2$ est toujours positive donc $f(x, x-1)$ est croissante. Min en $f(1, 0) = 1$ et max en $f(1, 2) = 3$.
Donc le minimum absolu sur la région est $f(1, 0) = 1$ et le maximum absolu est $f(2, 0) = 8$.

Question 8. (10%)

a) De la condition on peut isoler $x = \dfrac{3y-1}{2}$ et

$$\nabla f = (y, x) = \lambda(2, -3) = \lambda \nabla g$$

On a donc que $y = -2\lambda$, $x = 3\lambda$. En remplaçant on obtient $\dfrac{3y-1}{2} = 3\lambda \Longrightarrow y = 2\lambda + \dfrac{1}{3}$. En égalant les valeurs de y on obtient $-2\lambda = 2\lambda + \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{12}$. Il s'en suit que le seul point critique est en $x = \dfrac{1}{4}$ et $y = -\dfrac{1}{6}$.

b) Puisque $f\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{24}$, il suffit de vérifier la valeur de $f(x, y)$ sur n'importe que point de la droite $2x - 3y = -1$. Or $f(-1, -1) = 1$ on peut en conclure que c'est un minimum.

Question 9. (6%)

On cherche le minimum de $f(x, y, z) = x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ soumis à la contrainte $g(x, y, z) = x^2 - y - z = 0$. Par les multiplicateurs de Lagrange on a

$$\nabla f = (2x, 2(y-2), 2(z-3)) = \lambda(2x, -1, -1) = \lambda \nabla g$$

De la première égalité on obtient que $\lambda = 1$ et des deux autre on obtient $2y - 4 = -1$ et $2z - 6 = -1$ et donc que $y = \dfrac{3}{2}$ et $z = \dfrac{5}{2}$. De notre condition on a que $x^2 = z + y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 4$. Pour trouver le rayon il suffit de

$$R^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 3\right)^2 = \frac{9}{2}$$

et donc $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$