

Examen 2
201-GNF Calcul 3
21 mars 2019
Professeur : Dimitri Zuchowski

Consignes

Aucune calculatrice ni documentation ne sont permises. Toute forme de plagiat et de communication est interdite et entraîne la note ZÉRO. Une réponse, même si elle est bonne, sans justification vaut ZÉRO.

Question 1. (10%)

Déterminer si les limites suivantes existent et si oui dire vers quelle valeur.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{4x^2 + y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x(y-1)}{x^2 + (y-1)^3}$

Question 2. (12%)

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pour la fonction $f(x, y) = x^y$

a) $f(x, y) = x^2 \cos(xy) + y$

b) $f(x, y) = x^y$

Question 3. (13%)

Soit la fonction $f(x, y) = x^2 y + y^2$. Calculer

a) (5%) $f'_u(1, 2)$ où $\vec{u} = (3, -4)$.

b) (5%) La dérivée maximale au point $(1, 2)$. Donner sa direction.

c) (3%) Les directions selon lesquelles la dérivée est nulle au point $(1, 2)$.

Question 4. (7%)

Calculer $\frac{dz}{dt}$ en utilisant la règle de dérivation en chaîne si

$$z = \frac{\arctan(xy)}{x}, \quad x = \sin^2 t, \quad y = e^{5t}$$

Question 5. (10%)

Donner une équation du plan tangent à la fonction $f(x, y) = y \sin(xy) + \cos(x)$ au point $\left(\pi, \frac{1}{4}, f\left(\pi, \frac{1}{4}\right)\right)$

Question 6. (7%)

Posons $u = f(x, y)$ et $v = g(x, y)$ Démontrer l'égalité suivante

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$$

Question 7. (25%)

Soit la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

- (7%) Trouver les 2 points critiques de la fonction.
- (7%) Calculer le hessien en ces points et déterminer, si possible la nature des points critiques.
- (11%) Trouver les extrémums absolus de cette fonction sur la région fermée à l'intérieur du triangle dont les sommets sont $(1, 0)$, $(2, 0)$ et $(2, 1)$.

Question 8. (10%)

- (8%) À l'aide des multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur extrême de la fonction $f(x, y) = xy$ soumit à la contrainte $2x - 3y + 1 = 0$
- (2%) Déterminer si la valeur trouver en a) est un maximum ou un minimum.

Question 9. (6%)

Trouver le rayon R de la sphère $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = R^2$ pour qu'elle soit tangente à la surface $z = x^2 - y$. (voir image)

