1.1 INTRODUCTION
ET
THÉORIE DES ENSEMBLES

cours 1

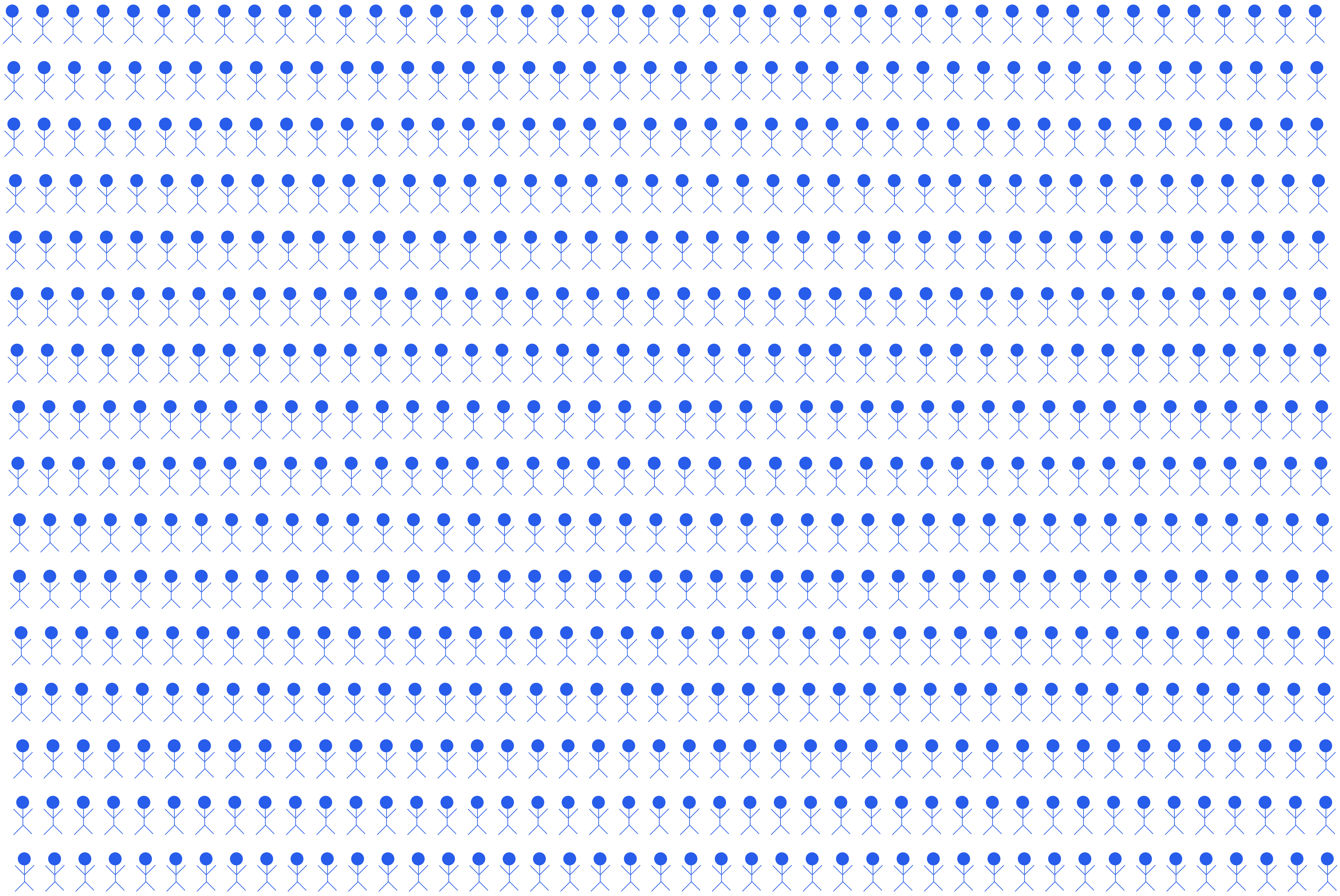
Aujourd’hui, nous allons voir

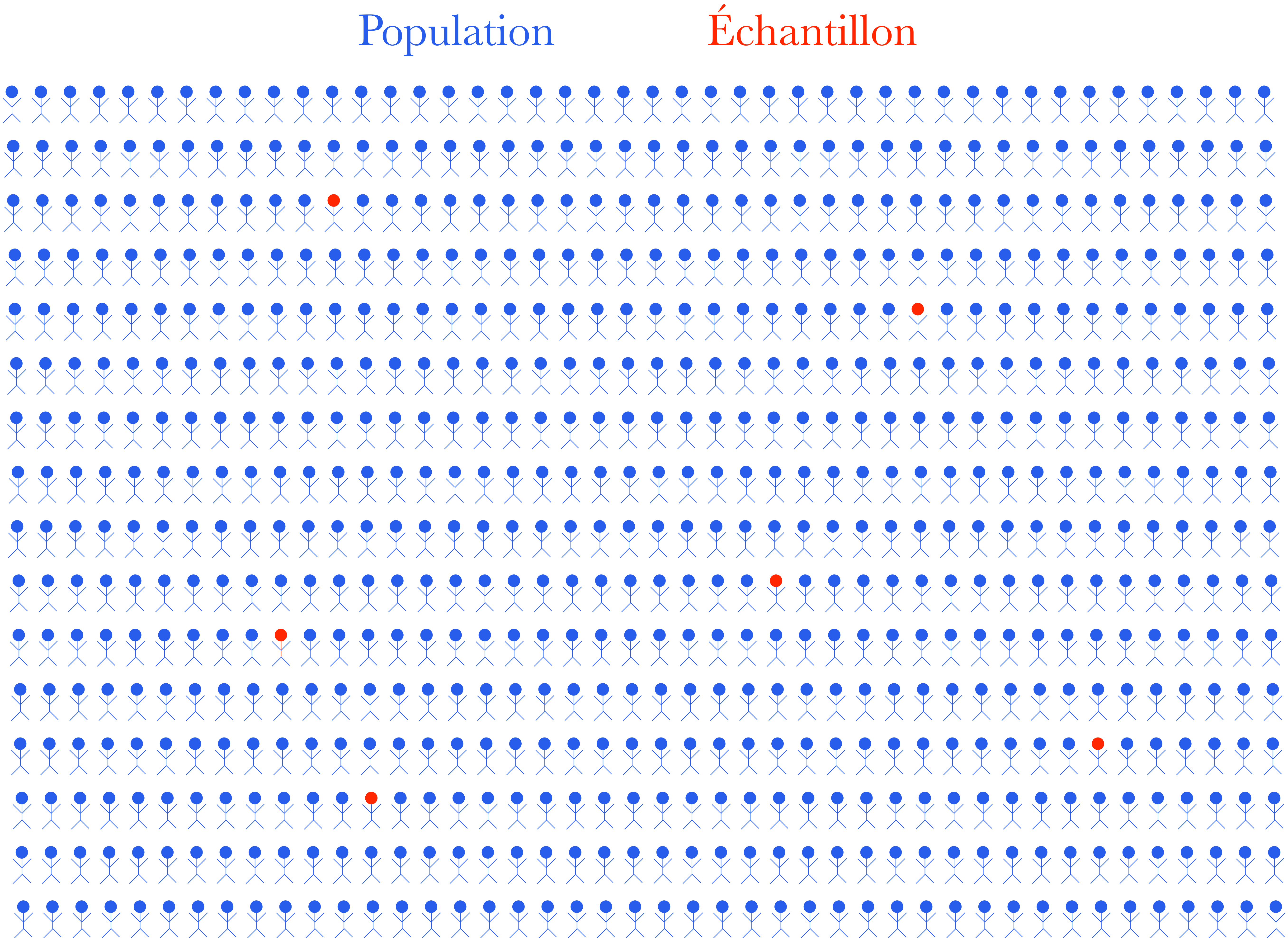
- ✓ Petite introduction au cours
- ✓ Notions de la théorie des ensembles

Probabilités

Statistiques

Population




Population
Échantillon

Pour comprendre les probabilités, on doit commencer par introduire le concept d'expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience qui peut théoriquement être répétés autant qu'on veut, dont on connait l'ensemble des résultats possible, mais dont le résultat est incertain.

Mathématiquement, une expérience aléatoire est une notion primitive qui n'est pas plus définie que ça.

On associe à une expérience aléatoire son espace échantillonnal.

Définition

L’espace échantillonnal d’une expérience aléatoire est l’ensemble de tous les résultats possibles

On note habituellement l’espace échantillonnal

$$S$$

Définition

Un événement est un sous-ensemble de l’espace échantillonnal.

$$A \subset S$$

Exemple

Considérons l'expérience aléatoire de lancer un dé rouge et un dé bleu.

L'espace échantillonnal est

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

L'événement; le dé rouge est plus grand que 2 et le dé bleu est 3

$$A = \{(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$$

Avant de commencer à étudier les probabilités, on va commencer par fixer certaines idées de la théorie des ensembles.

Définition Un ensemble est une collection d'objets qu'on nomme ses éléments.

On note habituellement les ensembles avec des lettres majuscules

$$A, B, C, \ldots$$

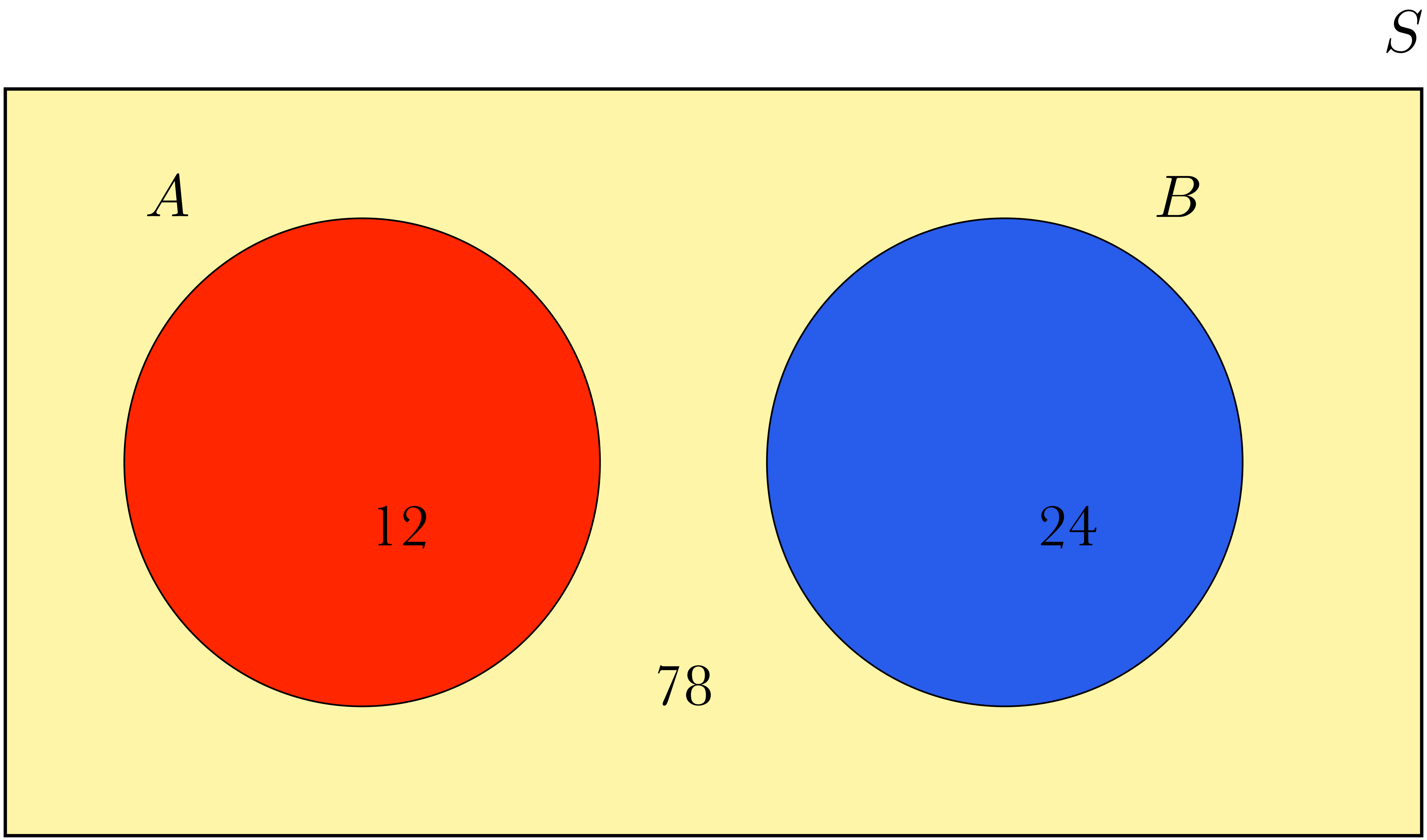
et les éléments avec des lettres minuscules.

$$a, b, c, \ldots$$

Notations

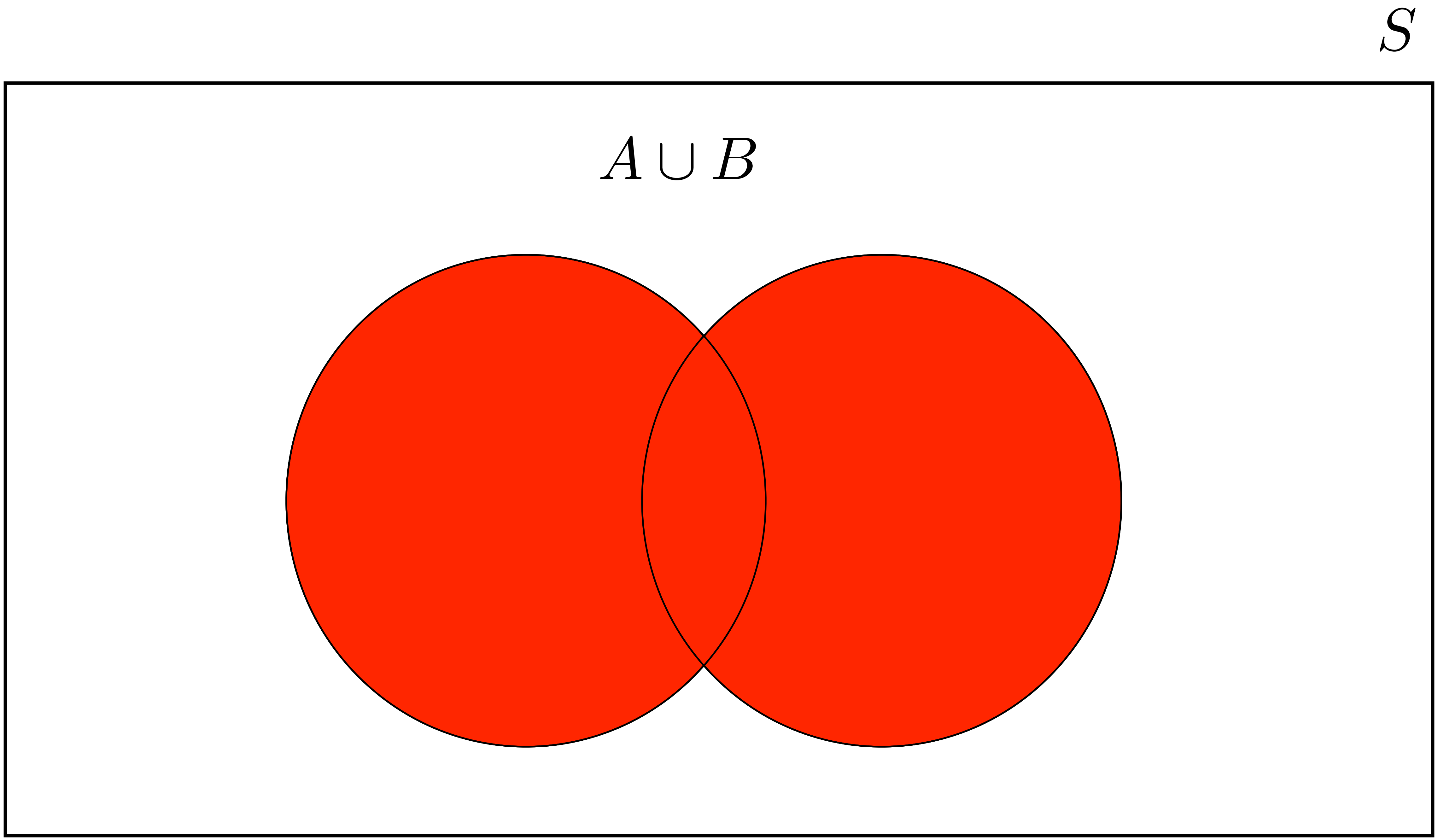
$\emptyset$	L'ensemble vide
$a \in A$	a est un élément de l'ensemble A
$B \subset A$	B est un sous-ensemble de A
$\mathcal{P}(A)$	L'ensemble de tous les sous-ensembles de A L'ensemble des partie de A
$\vee$	ou
$\wedge$	et

Diagramme de Venn

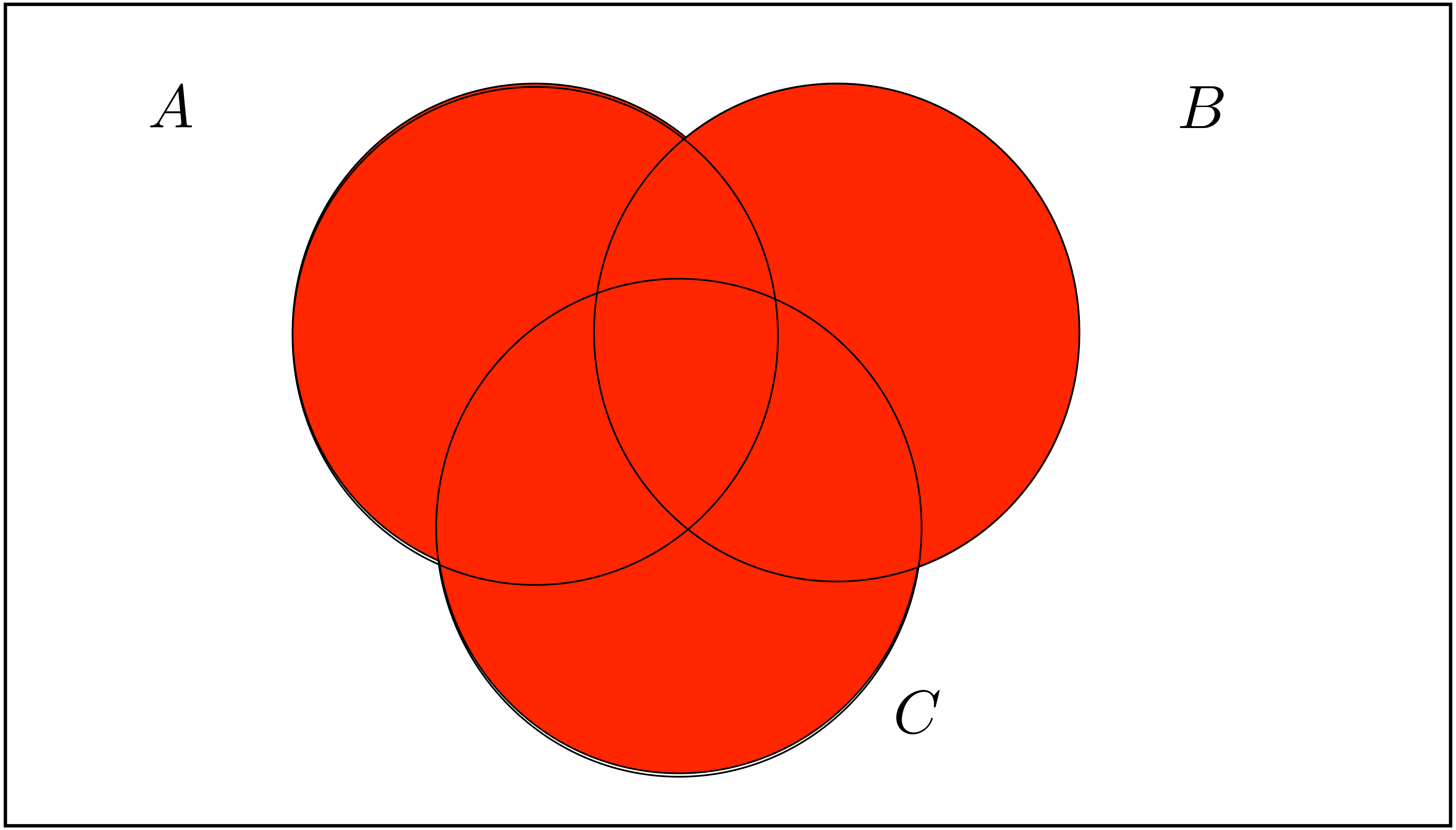


Unions

$$A \cup B = \{x \in S | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

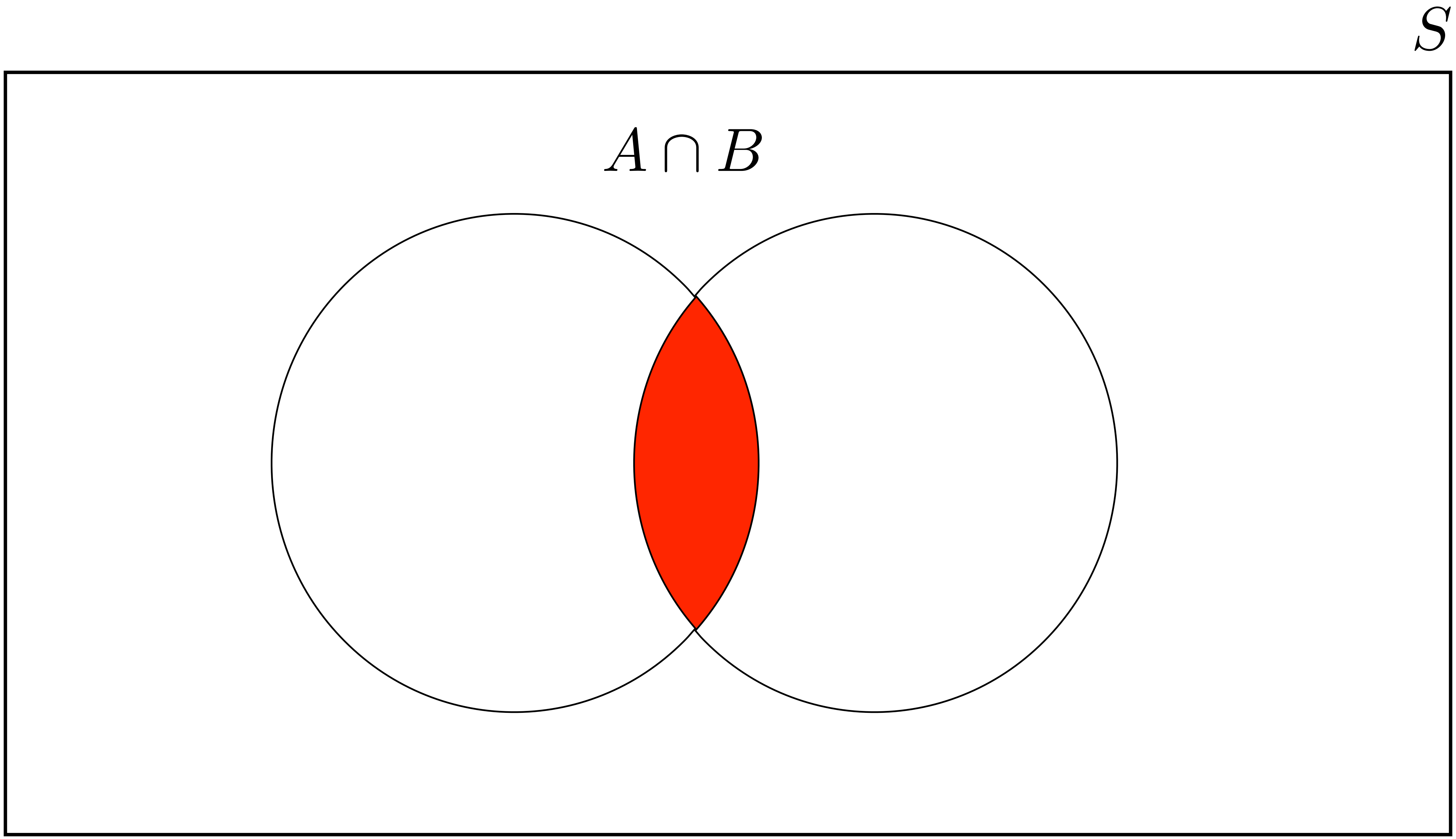


$A \cup B \cup C$

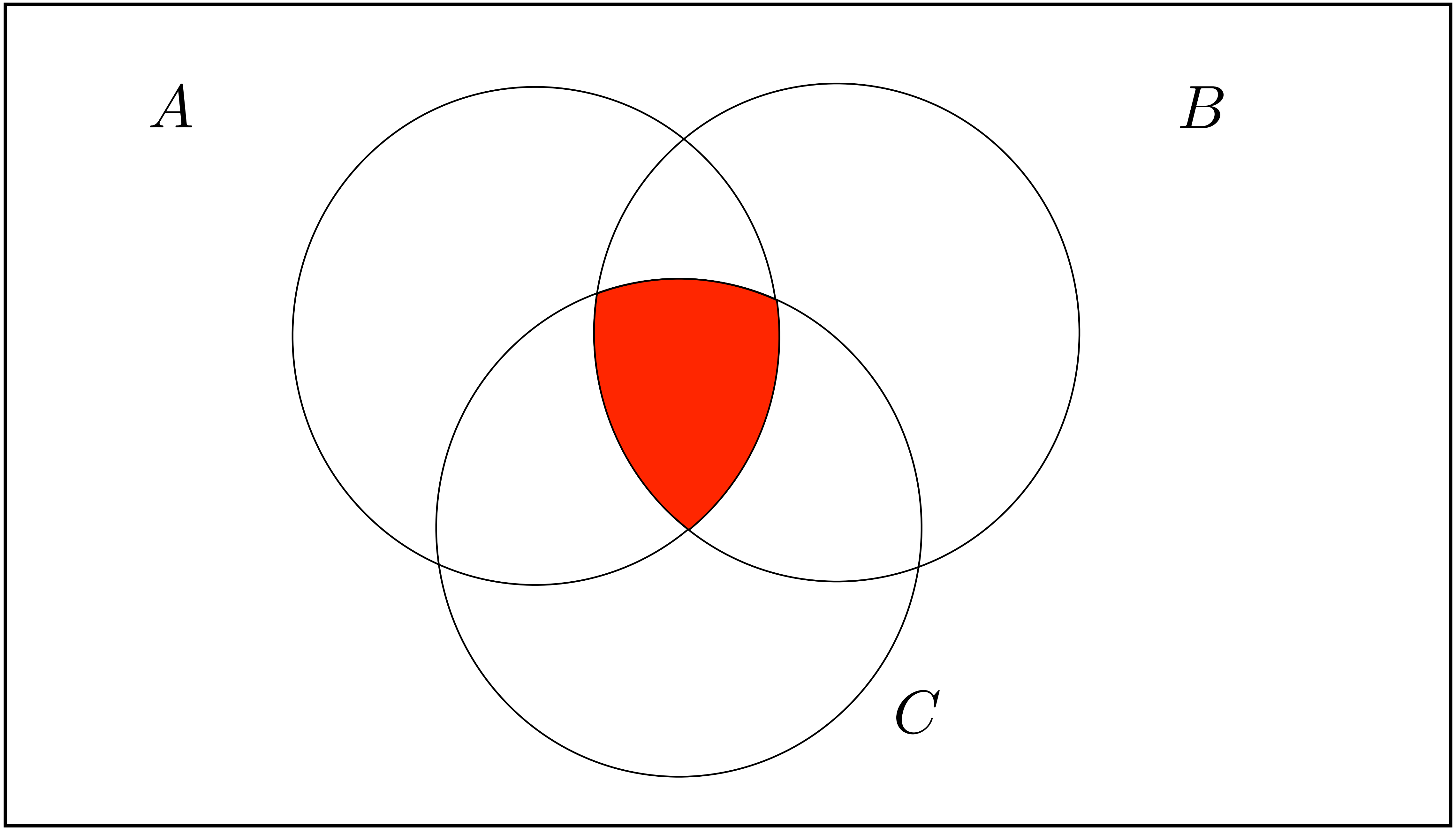


Intersection

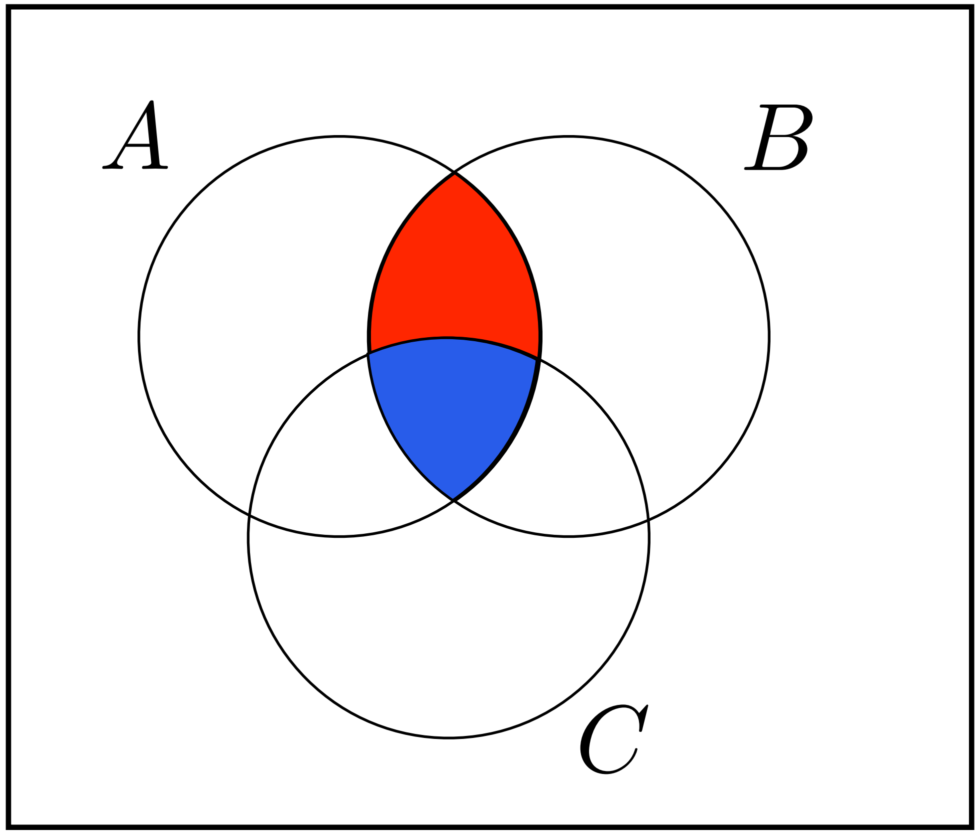
$$A \cap B = \{x \in S | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

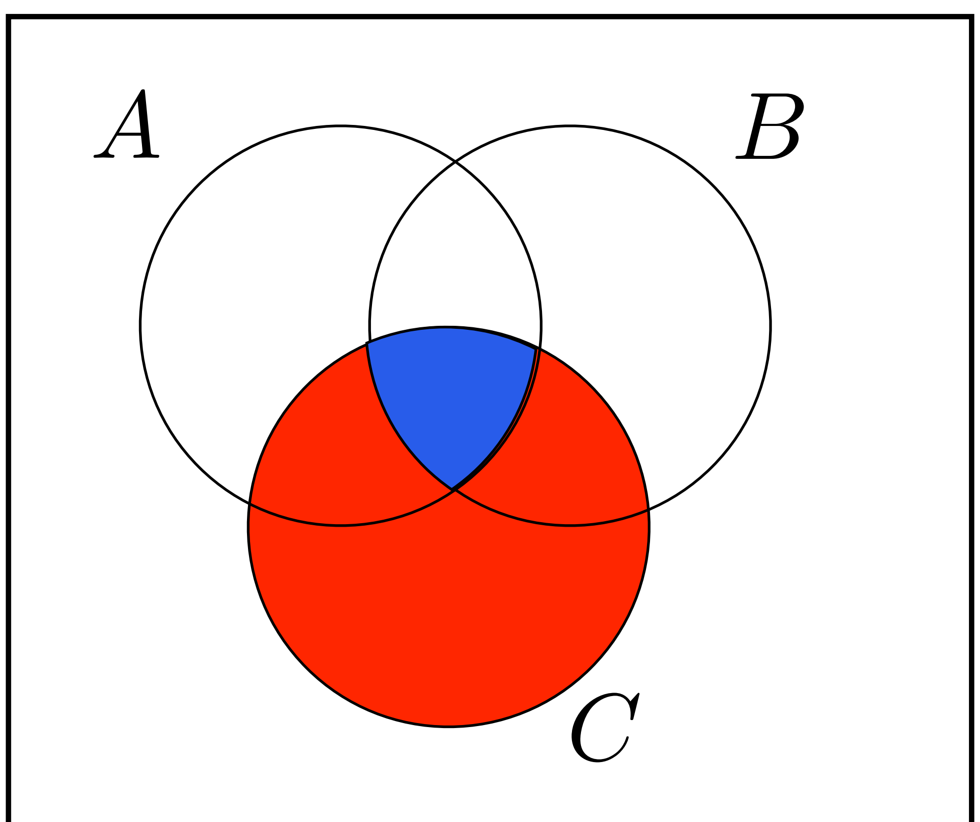


$A \cap B \cap C$

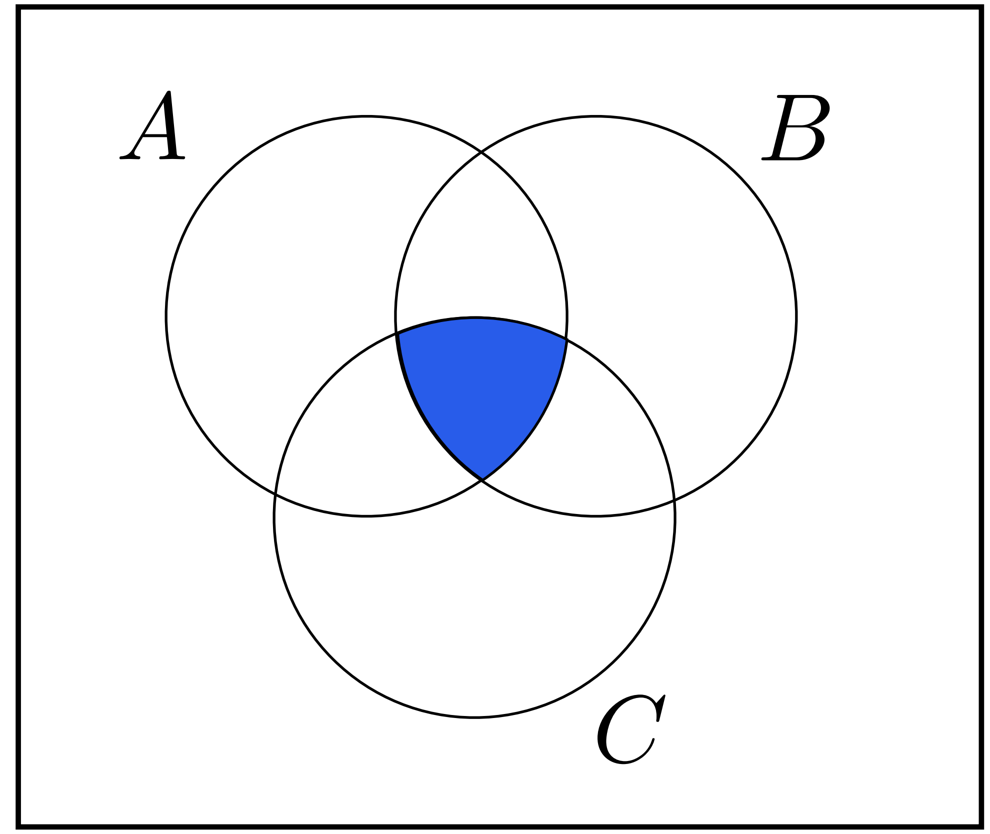


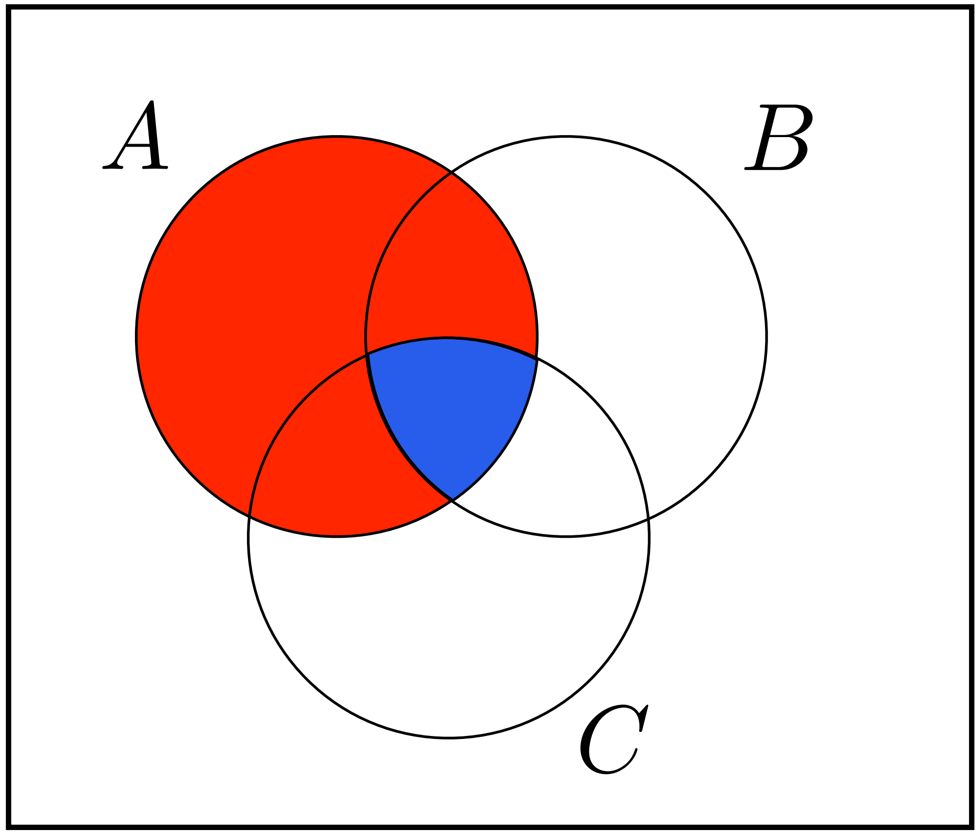
$A \cap B$



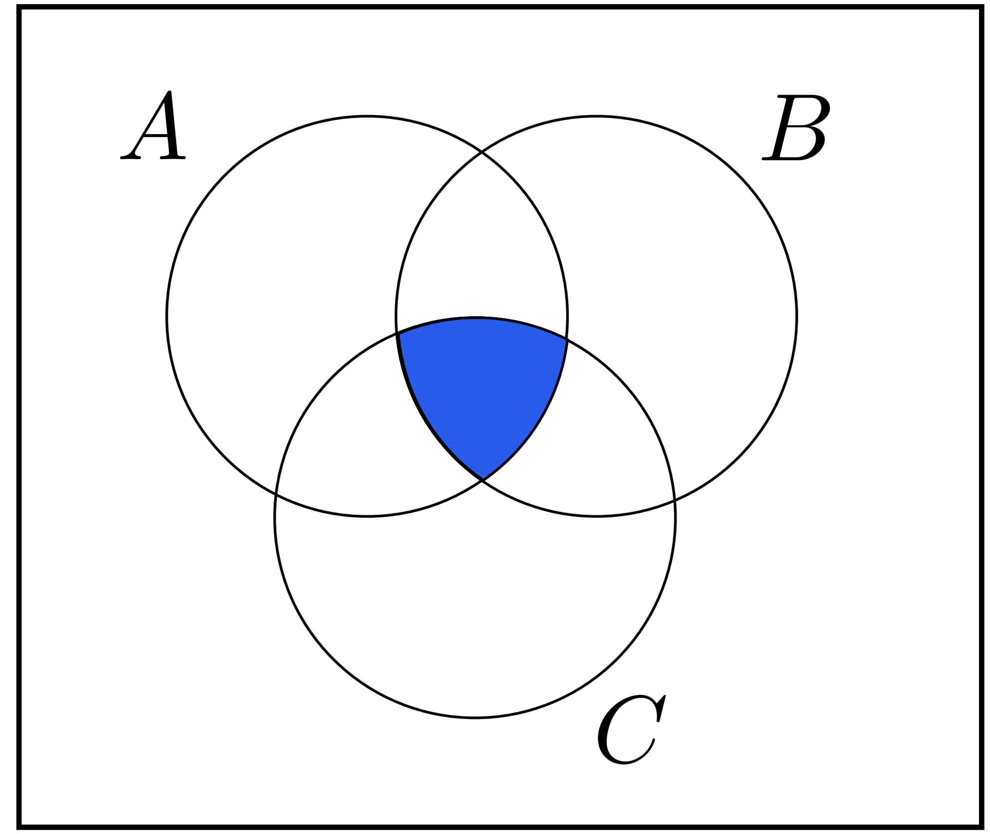


$(A \cap B) \cap C$

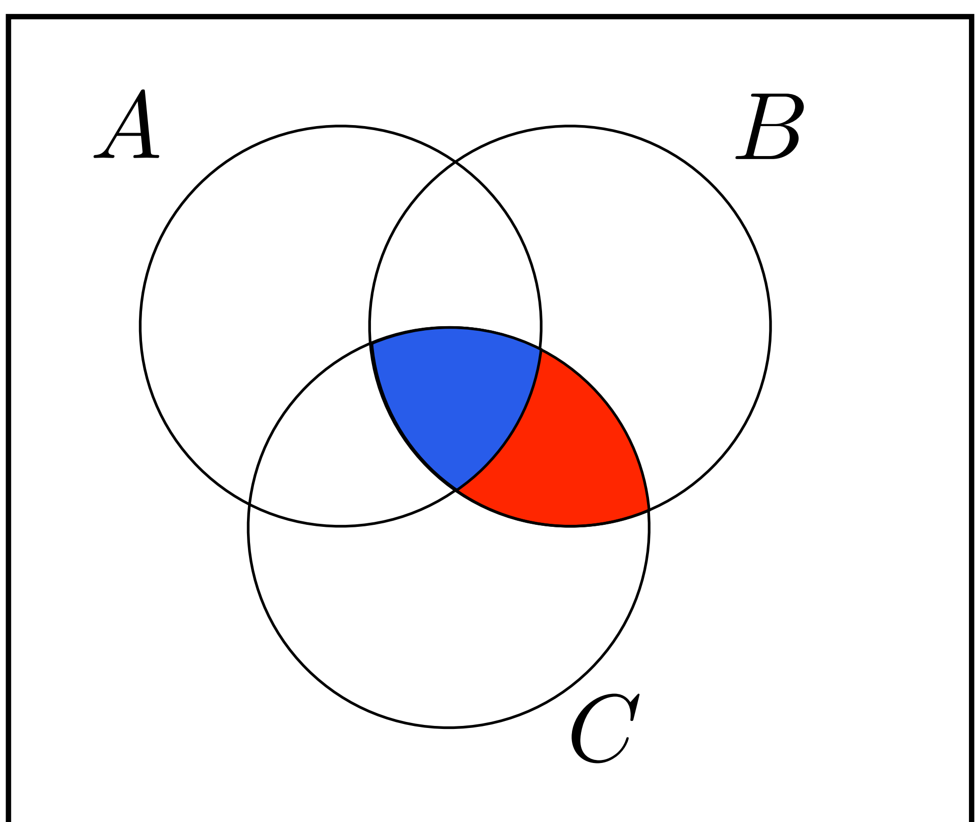




$A \cap (B \cap C)$



$B \cap C$



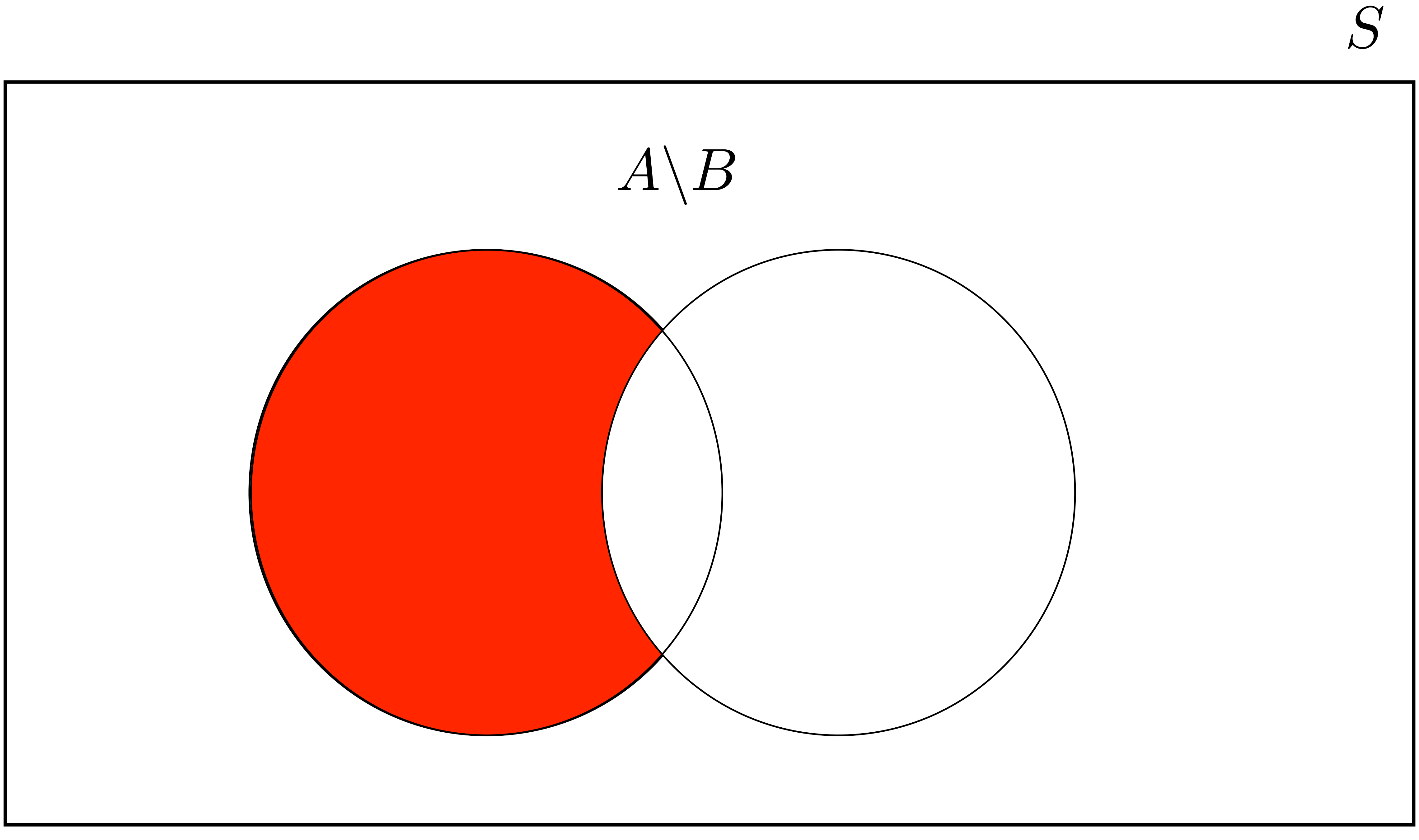
L'intersection est associative

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap B \cap C$$

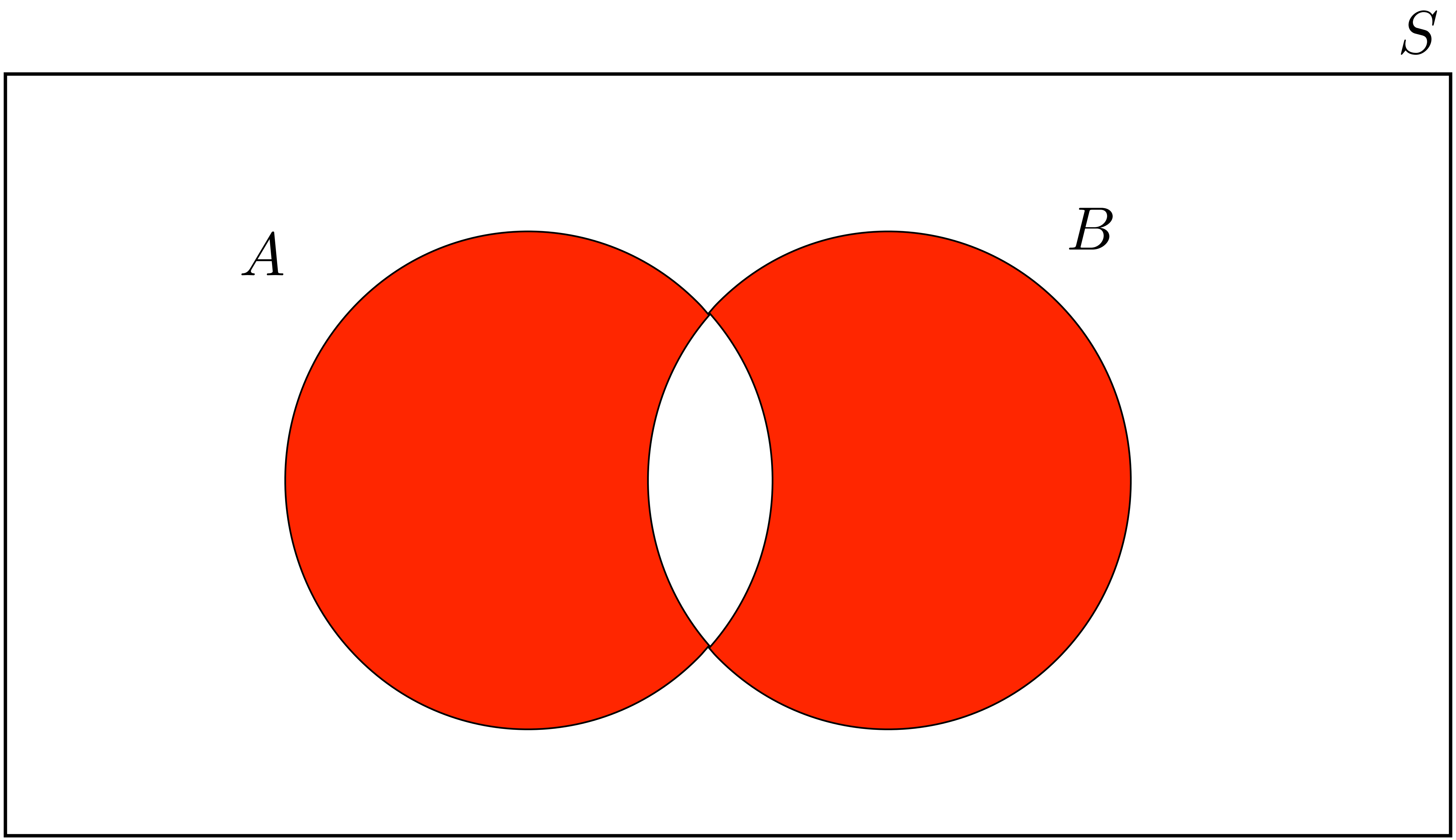
Différence

$$A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$$



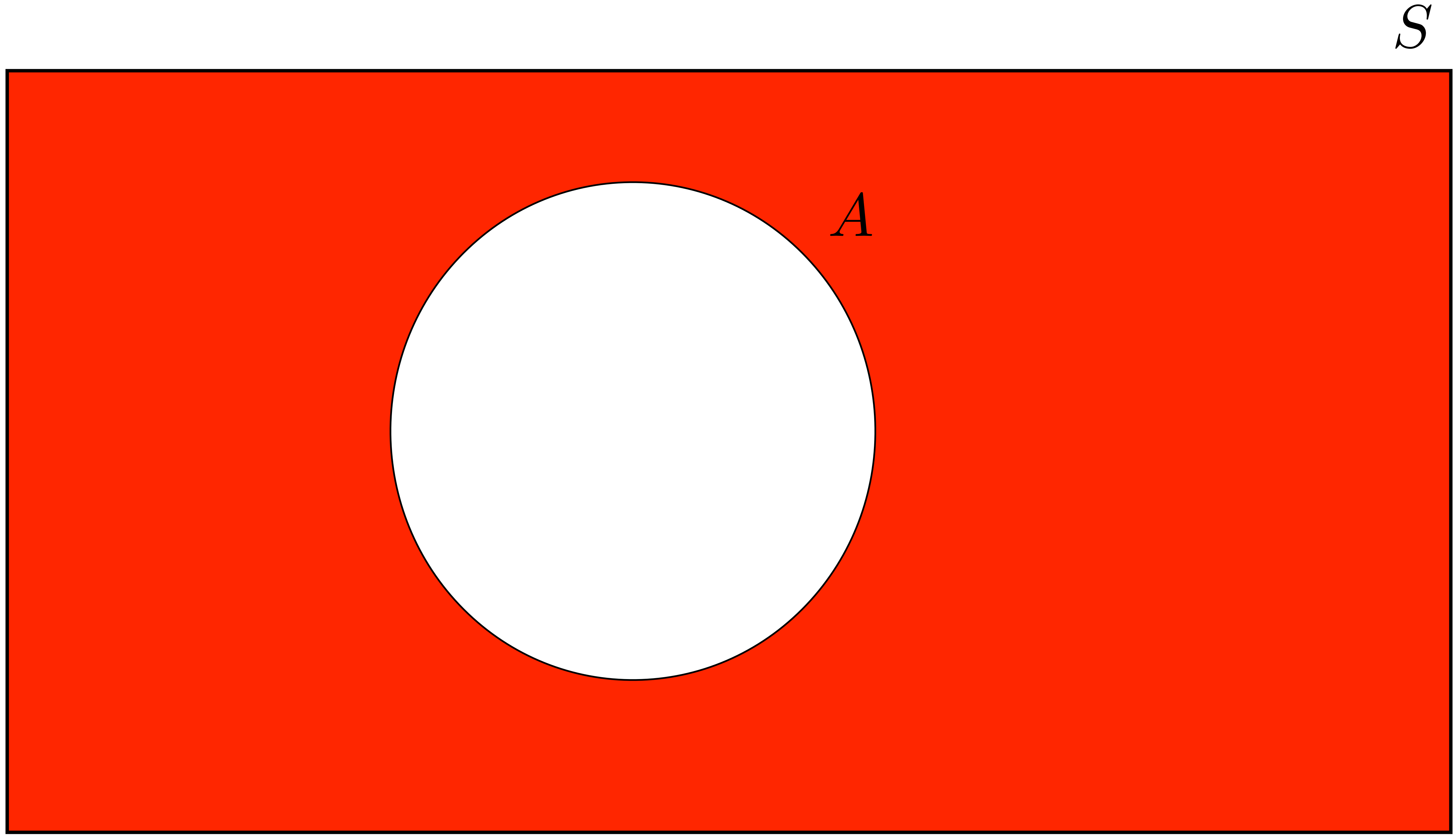
Différence symétrique

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \; = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$



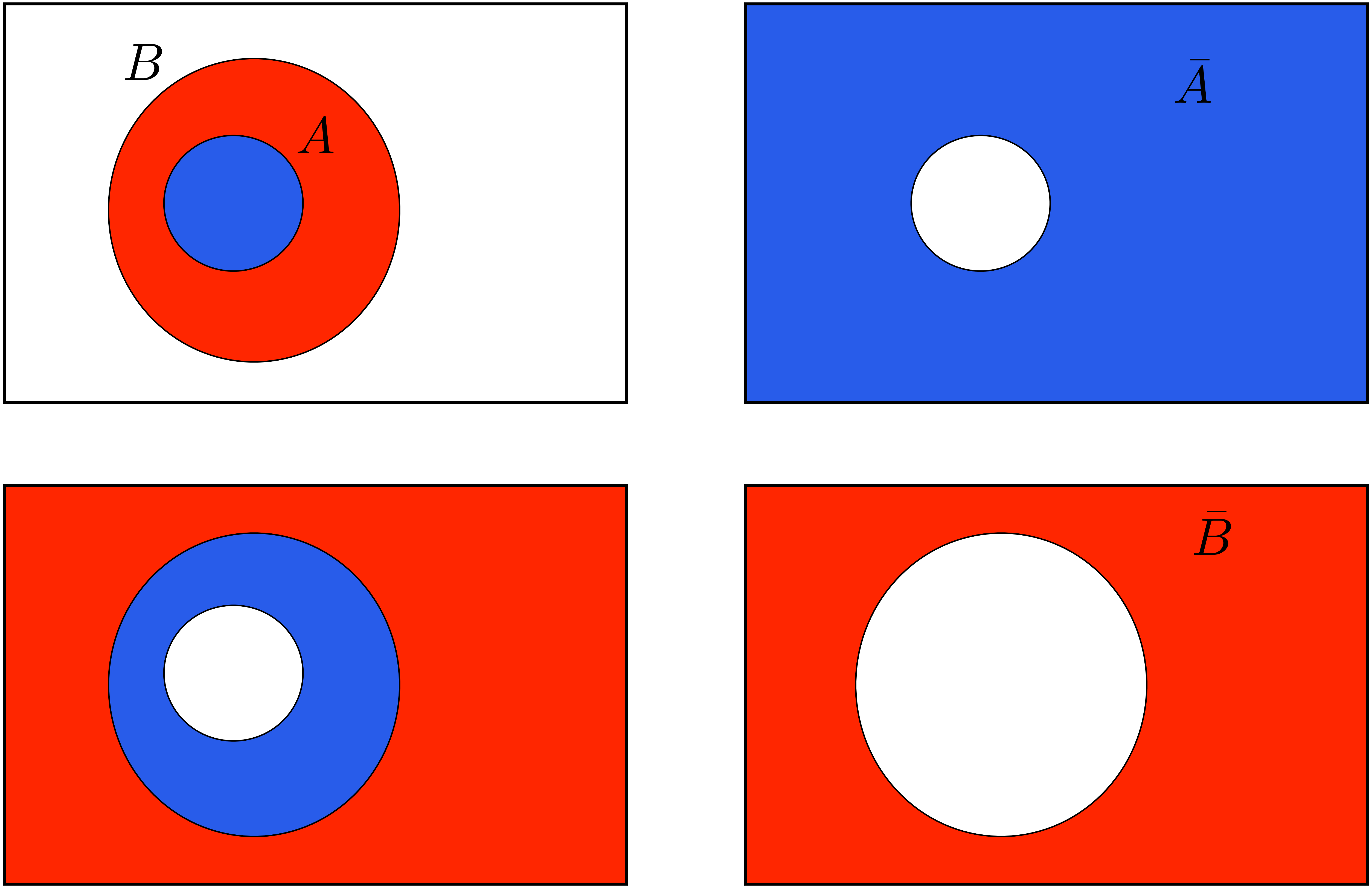
Complément

$$\bar{A} = \{x \in S | x \notin A\}$$



$$\bar{A} = A^C = S \backslash A$$

$$A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$$

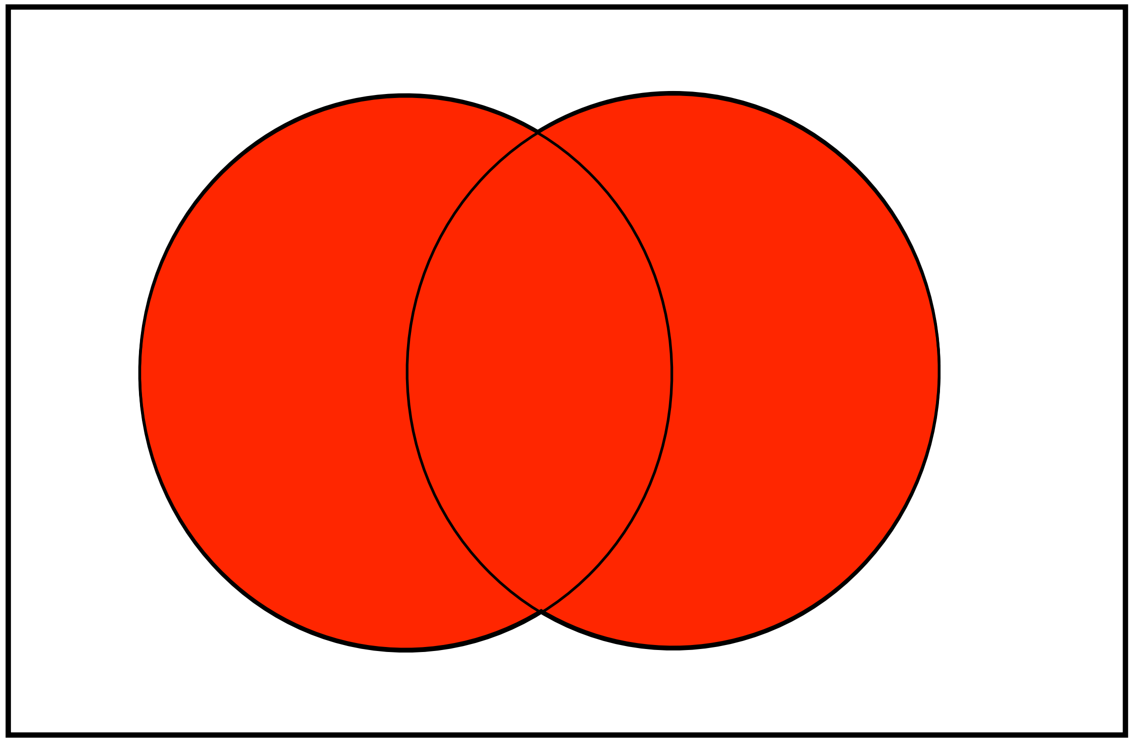


Lois de DeMorgan

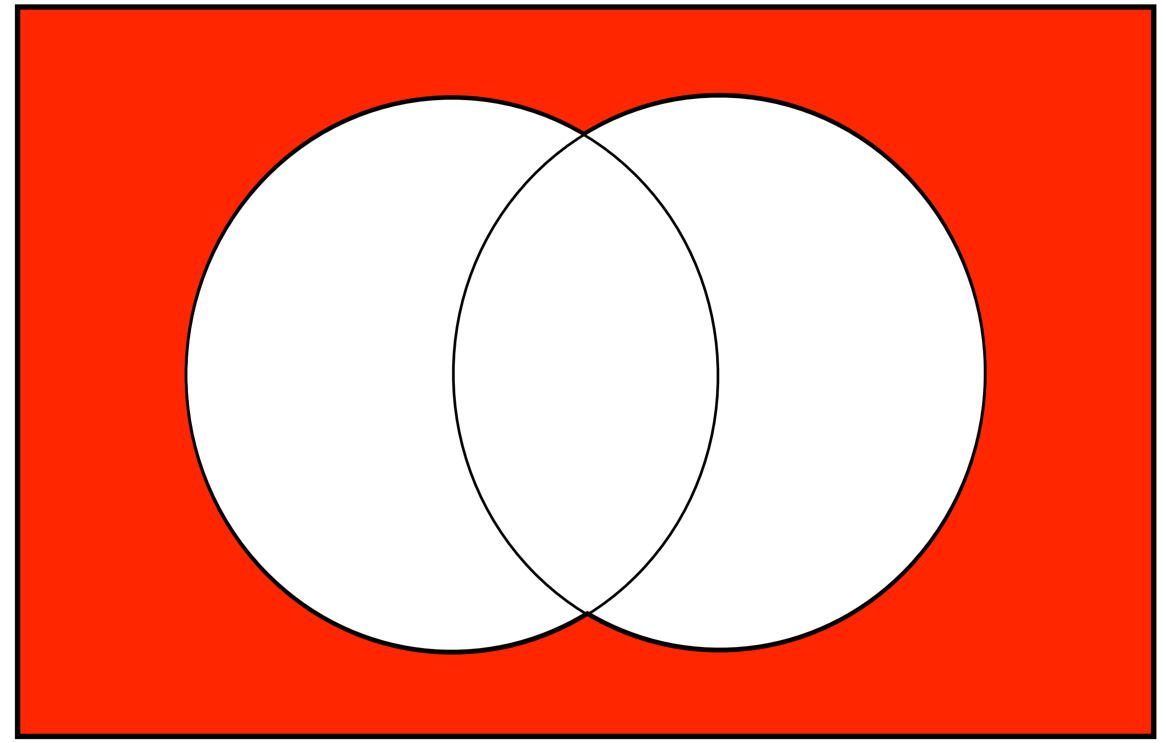
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

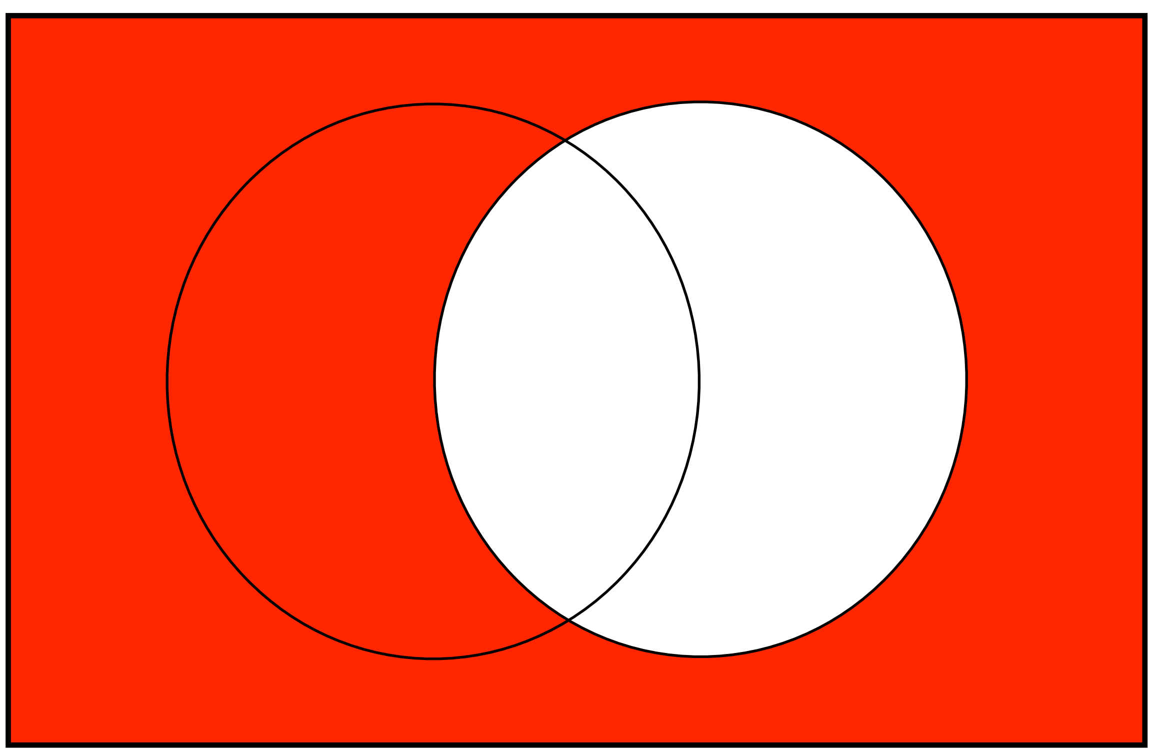
$A \cup B$



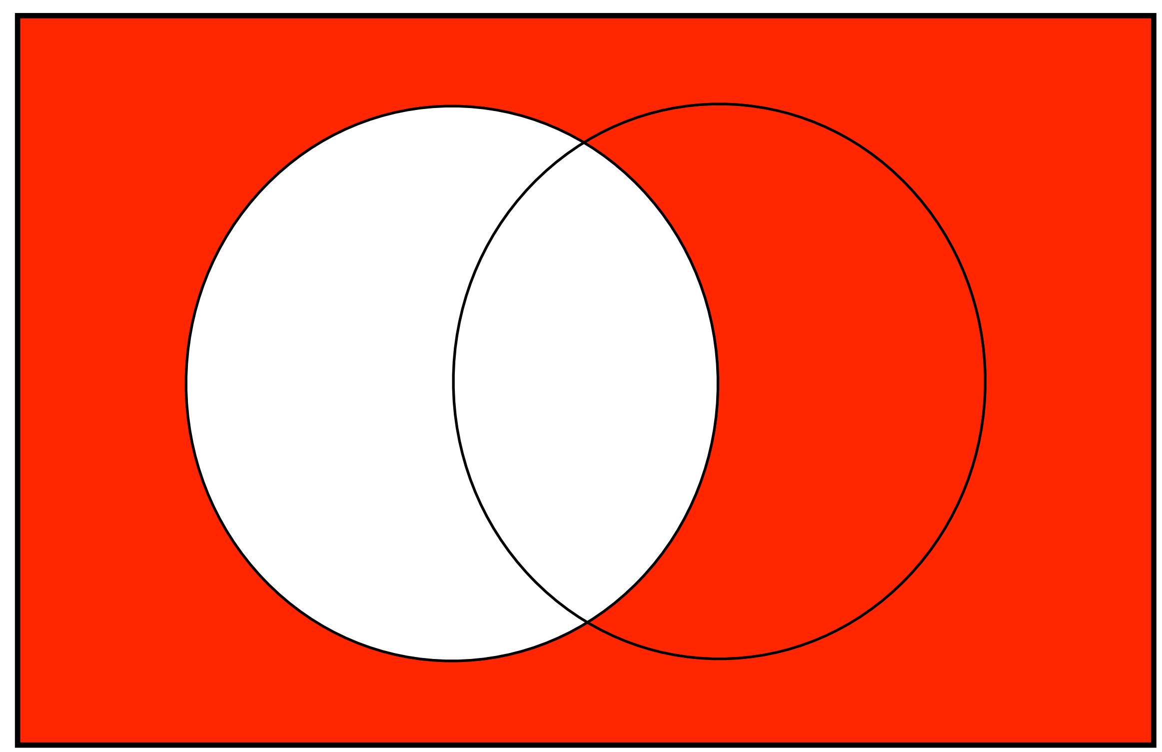
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$



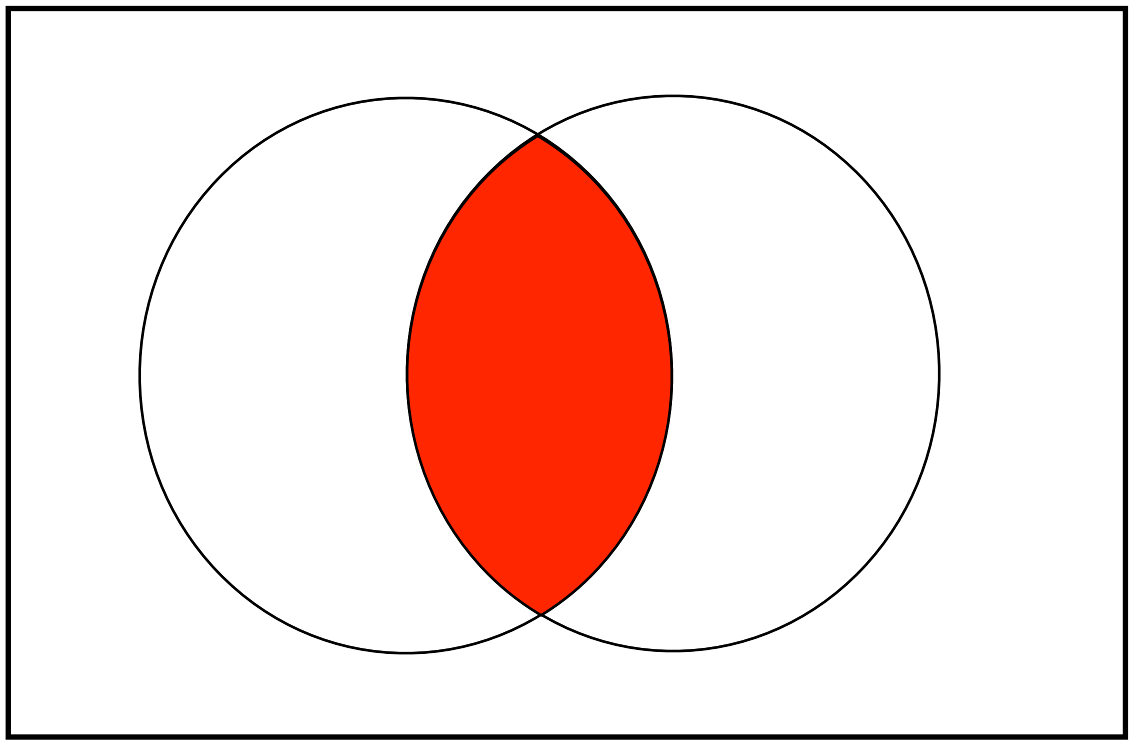
$\bar{B}$



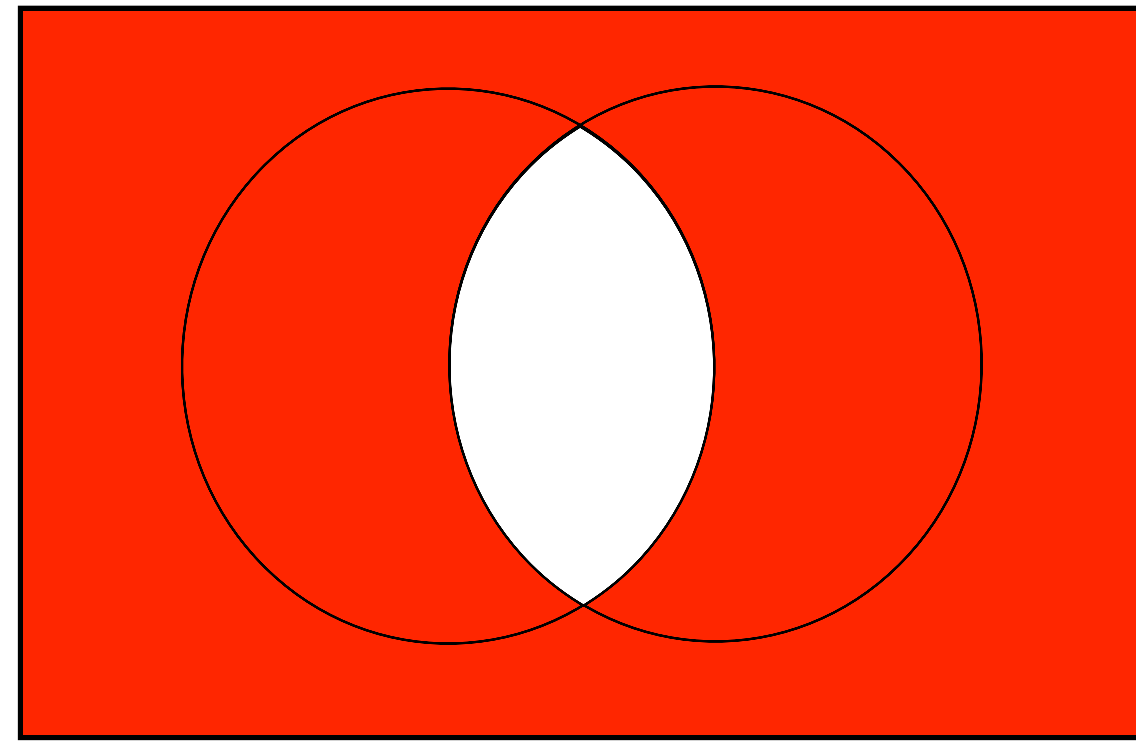
$\bar{A}$



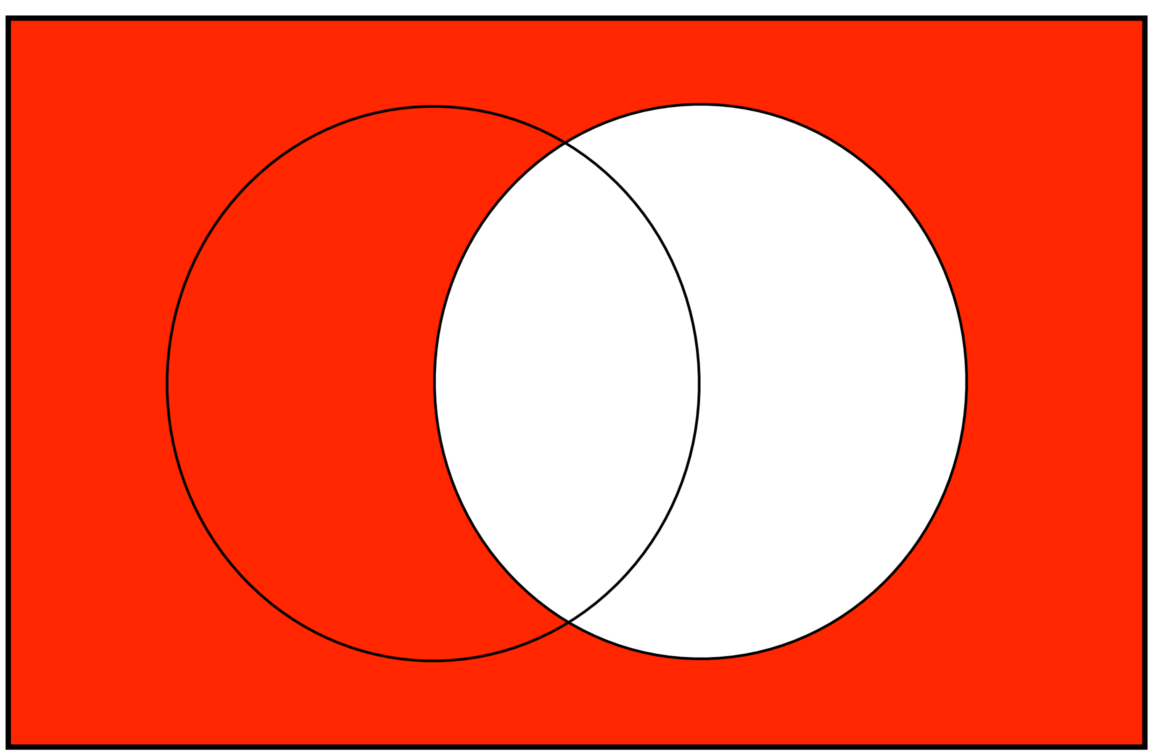
$A \cap B$



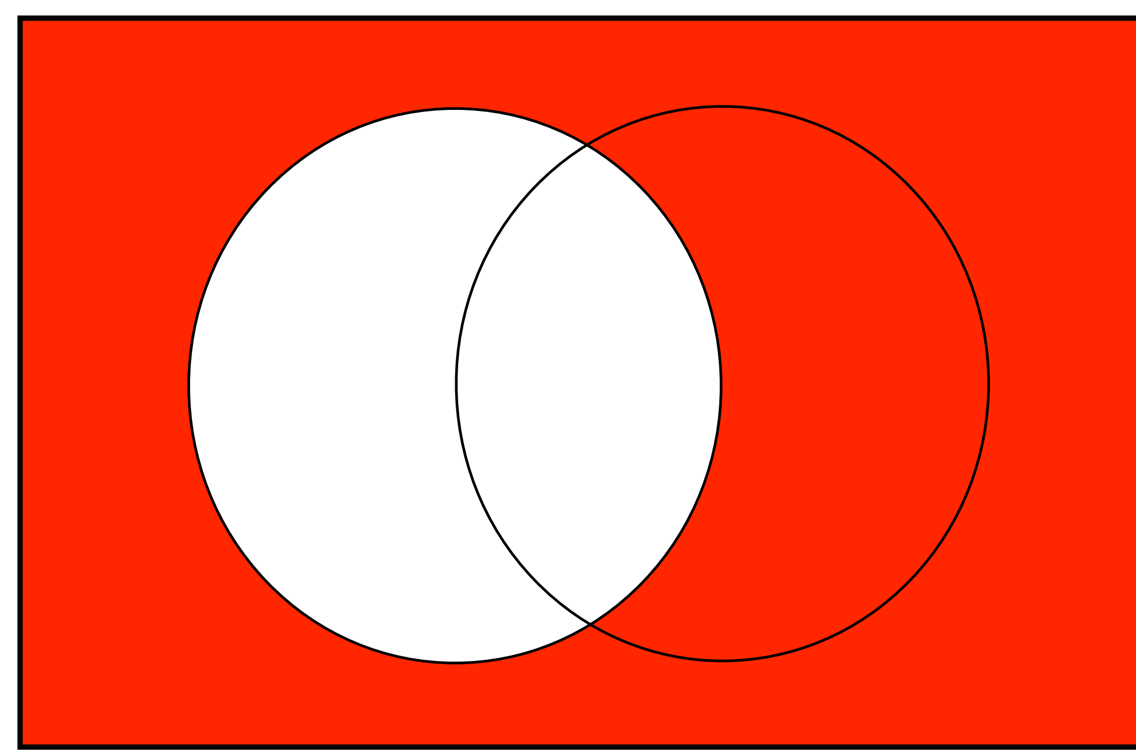
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$



$\bar{B}$



$\bar{A}$



Faites les exercices suivants

#1.1 et 1.2

Lorsqu'on fait l'union ou l'intersection de plusieurs ensemble, on utilise une notation similaire à celle de la sommation.

$$\bigcup_{k=1}^{4} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$\bigcap_{k=1}^{4} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

Définition

Une partition d'un ensemble S est une collection de sous-ensemble $\{A_i\}_{i\in I}$

tel que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = S \qquad A_i \cap A_j = \emptyset$$

Exemple

$$Pair = \{2n | n \in \mathbb{Z}\} \qquad Impair = \{2n+1 | n \in \mathbb{Z}\}$$

$$Pair \subset \mathbb{Z} \qquad Pair \cap Impair = \emptyset$$

$$Impair \subset \mathbb{Z} \qquad Pair \cup Impair = \mathbb{Z}$$

Cardinalité

Définition La cardinalité d'un ensemble est une mesure du « nombre d'éléments dans l'ensemble »

$$|A| = \#A = \mathrm{Card}(A)$$

Si A a un nombre fini d'éléments, la cardinalité est ce nombre.

On dit que deux ensembles ont la même cardinalité s'il existe une bijection entre les deux.

Une fonction un pour un

Bijection

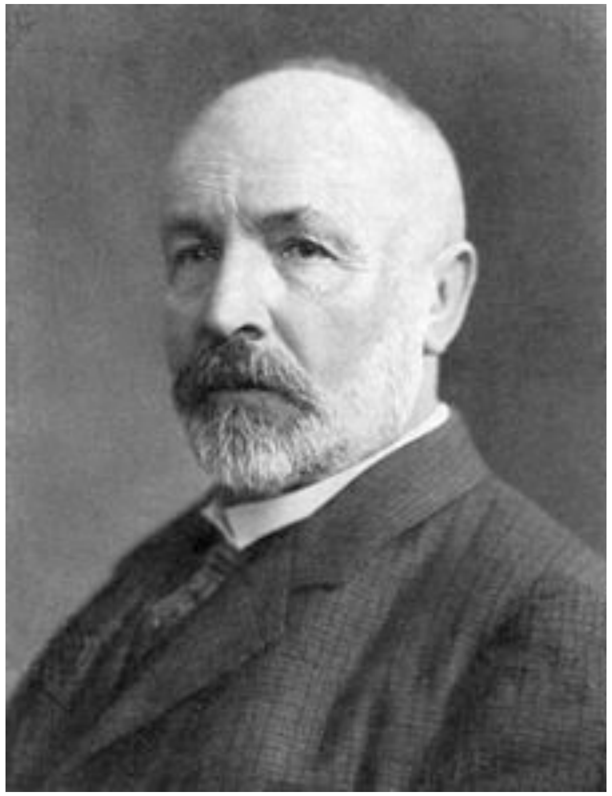
$\mathbb{N}$ $\quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

Pair $\quad 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots$

Donc $\quad |\text{Pair}| = |\mathbb{N}|$

Peut-on clore la discussion en affirmant que l'infini c'est l'infini et donc tous les ensembles infinis ont la même taille?

On l'a longtemps cru.



Georg Cantor (1845-1918)

a démontré que ce n'était pas le cas.

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ $\qquad$ $|\mathbb{N}| < |[0,1]|$

$$\begin{array}{lcll}
0 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}98465976498363 9\ldots & \neq x \\
1 & \longrightarrow & 0,5\boxed{7}2950683659682 7\ldots & \neq x \\
2 & \longrightarrow & 0,58\boxed{2}271008957266 4\ldots & \neq x \\
3 & \longrightarrow & 0,444\boxed{3}82749104773 6\ldots & \neq x \\
4 & \longrightarrow & 0,2219\boxed{5}5483846602 8\ldots & \neq x \\
5 & \longrightarrow & 0,55784\boxed{3}920043378 2\ldots & \neq x \\
\vdots & \longrightarrow & \vdots &
\end{array}$$

Peut-on tous les avoir? $\quad x = 0,283464\ldots$ est oublié!

$\#(\mathbb{N}) = \aleph_0$ Infini dénombrable

$\#(\mathbb{R}) = \aleph_1$ Infini non dénombrable

Pour nous, il n'y a que deux cardinalités infinies

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ l'infini dénombrable

$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \stackrel{?}{=} \aleph_1$ l'infini non-dénombrable

L'hypothèse du continue.

En fait, ce qui est présenté ici est ce qu’on nomme la théorie «naïve» des ensembles.

Paradoxe de Russell

Puisqu'un ensemble peut contenir toute sorte d'élément, il peut en particulier contenir des ensembles.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \text{l'ensemble de tous les ensembles}$$

$$\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{E} | A \notin A\} \qquad \mathcal{R} \overset{?}{\in} \mathcal{R}$$

Si $\quad \mathcal{R} \in \mathcal{R} \quad$ alors $\quad \mathcal{R} \notin \mathcal{R} \quad$ contradiction

Si $\quad \mathcal{R} \notin \mathcal{R} \quad$ alors $\quad \mathcal{R} \in \mathcal{R} \quad$ contradiction

Faites les exercices suivants

1.3, 1.4 et 1.5

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les ensembles.
- ✓ L'union, l'intersection, la différence, la différence symétrique et le complément
- ✓ Les lois de de Morgan
- ✓ La cardinalité
- ✓ Les partitions

Devoir: #1.1 à 1.5