

1.2 DÉNOMBREMENT

cours 2

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les ensembles
- ✓ L'union, l'intersection, la différence, la différence symétrique et le complément
- ✓ Les lois de de Morgan
- ✓ La cardinalité
- ✓ Les partitions

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Principe d'addition
- ✓ Principe de multiplication
- ✓ Principe du tiroir

Pour faire du calcul de probabilités on doit connaître la cardinalité de l'espace échantillonnal ainsi que la cardinalité de l'événement.

On va donc avoir à apprendre à compter!

Définition

La combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie les configurations de collections finies d'objets, les combinaisons d'ensemble fini et le dénombrement.

Règle d'addition

La règle d'addition apparaît naturellement lorsqu'on veut connaître la cardinalité d'une union.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exemple

On pige une carte dans un jeu de 52 cartes, combien de résultats donne une carte rouge ou une figure?

$$A = \text{ piger une carte rouge} \quad |A| = 26 \quad |A \cap B| = 6$$

$$B = \text{ piger une figure} \quad |B| = 12$$

$$|A \cup B| = 26 + 12 - 6 = 32$$

Règle de multiplication

S'il existe n résultats pour l'expérience A et m résultats pour l'expérience B alors il existe nm résultats pour les deux expériences ensemble.

Exemple

J'ai quatre paires de pantalons et cinq chandails, de combien de façon puis-je m'habiller?

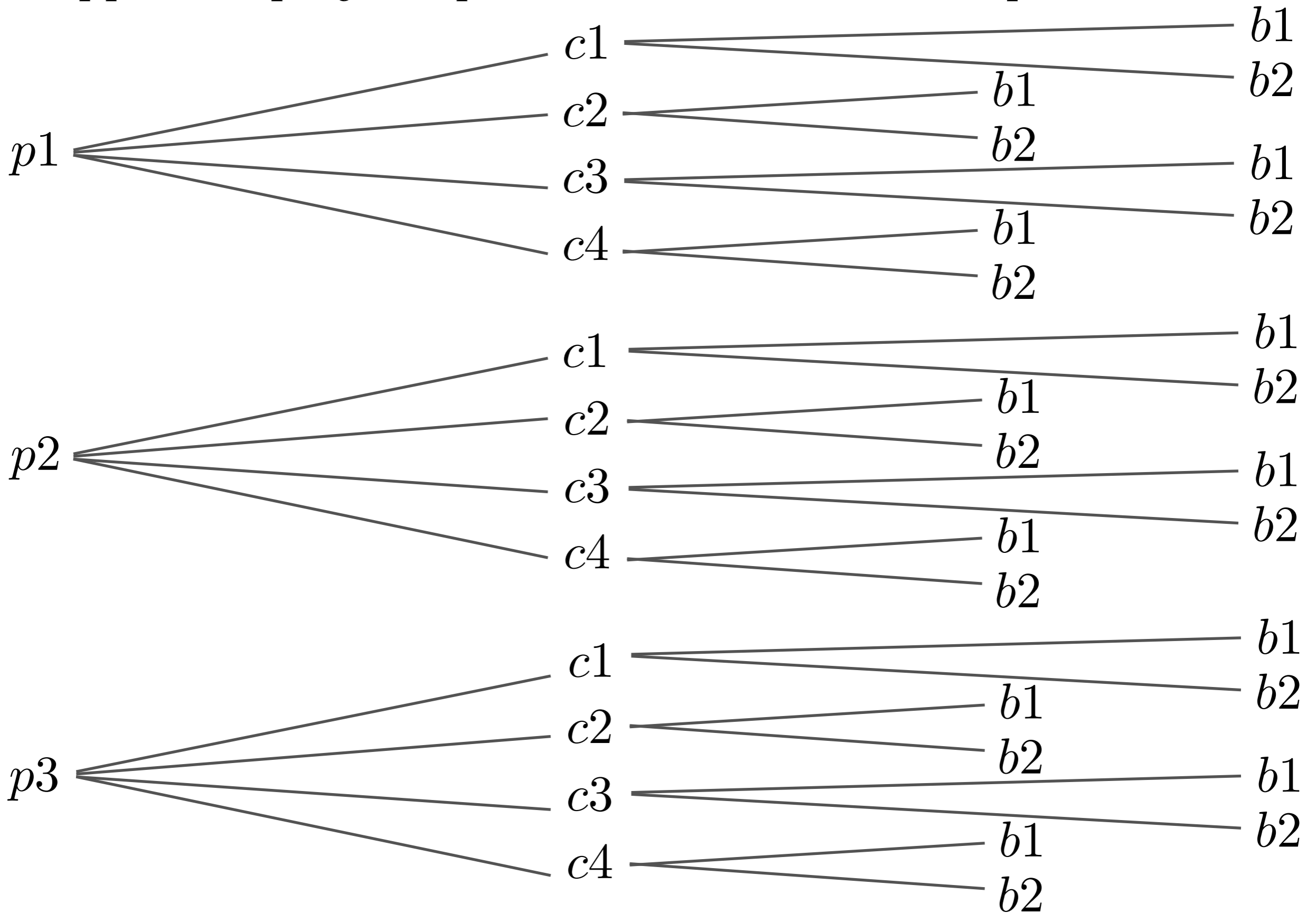
$A =$ choisir un pantalon $|A| = 4$

$B =$ choisir un chandail $|B| = 5$

J'ai donc $4 \cdot 5 = 20$ façons de m'habiller

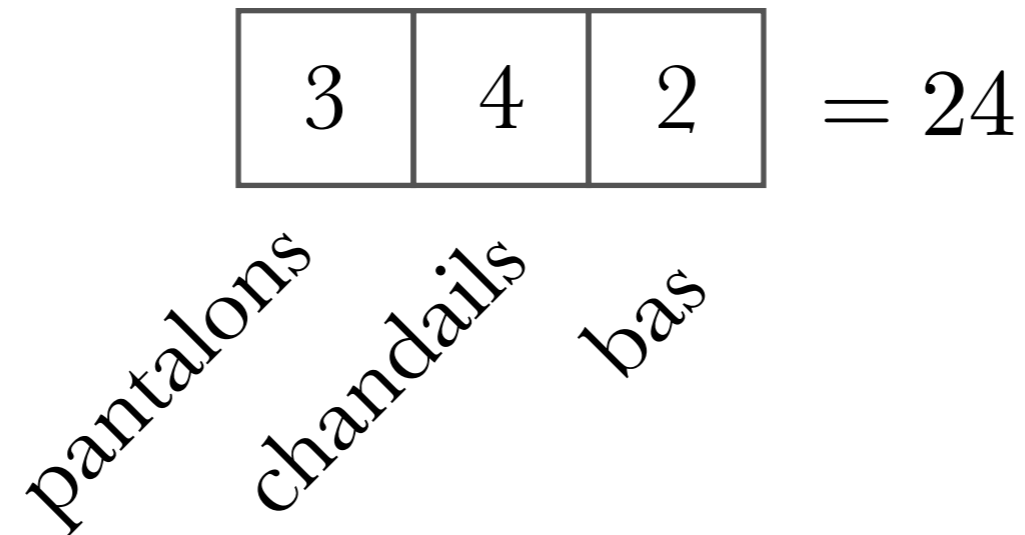
Représentation en arbre.

Supposons que j'ai 3 pantalons, 4 chandails et 2 paires de bas



La représentation en arbre est explicite, mais lourde à utiliser.

On va plutôt travailler avec une représentation avec des boîtes.



$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

Lors d'une sélection d'un ou plusieurs objets d'un ou des ensembles, différents types de sélection mèneront à différent type de calcul.

Voici les trois grands types

- 1) Sélection d'éléments discernable ou non discernable.
- 2) Sélection d'éléments avec répétition ou sans répétition.
- 3) Sélection d'éléments avec ordre ou sans ordre.

1) Sélection d'éléments discernable ou indiscernable.

Exemple

On pige une bille dans une urne contenant 40 billes rouges et 20 billes bleues.

Les 40 billes rouges sont indiscernables.

Les 20 billes bleues sont indiscernables.

Exemple

On pige une carte d'un paquet de 52 cartes.

Toutes les cartes sont différentes donc discernables.

2) Sélection d'éléments avec répétition ou sans répétition.

Exemple

On veut savoir le nombre de codes de deux lettres qu'on peut créer

ici on peut répéter les lettres; aa, bb, cc sont des codes possibles.

Exemple

Lors d'un tirage, on tire trois balles sans remise dans une urne contenant 20 balles numérotées de 1 à 20.

Puisque les balles ne sont pas remises, il n'y a pas répétition des balles pigées.

3) Sélection d'éléments avec ordre ou sans ordre.

Exemple

On sélectionne 4 personnes d'un groupe de 20 pour faire une expérience.

Peu importe l'ordre dans lequel on pige les gens, le groupe Albert, Béatrice, Carl et Dianne est le même que Dianne, Béatrice, Albert et Carl.

Exemple

On sélectionne un président et un trésorier d'un groupe de 12 personnes.

Albert président et Béatrice trésorière est différent de Béatrice présidente et Albert trésorier.

Principe du tiroir (Pigeonhole principle)

Si j'ai n paires de bas et m tiroirs et que $n > m$
alors au moins un tiroir contient plus d'une paire de bas.

Ce principe peut paraître évident et anodin, mais permet de résoudre
des problèmes compliqués.

Exemple

On choisit 20 nombres distincts au hasard parmi

$$\{1, 4, 7, 10, \dots, 100\} = \left\{ 1 + 3n \right\}_{n=0}^{33}$$

Montrer que peu importe les 20 nombres choisis, il y a toujours une paire dont la somme est 104.

Regardons les ensembles

$$\{1\} \quad \{4, 100\} \quad \{7, 97\} \quad \{10, 94\} \quad \{13, 91\}$$

$$\{16, 88\} \quad \{19, 85\} \quad \{22, 82\} \quad \{25, 79\} \quad \{28, 76\}$$

$$\{31, 73\} \quad \{34, 70\} \quad \{37, 67\} \quad \{40, 64\} \quad \{43, 61\}$$

$$\{46, 58\} \quad \{49, 55\} \quad \{52\}$$

Par le principe du tiroir, on doit prendre au moins deux éléments parmi

Faites les exercices suivants

#1.6, 1.7, 1.8

Choix avec répétition avec ordre

Exemple

De combien de façon peut-on former un comité comportant un président, un secrétaire et un trésorier à partir d'un groupe de 30 personnes, si une personne peut occuper plus d'un poste?

<i>président</i>	<i>trésorier</i>	<i>secrétaire</i>
30	30	30

$$30 \cdot 30 \cdot 30 = 30^3 = 27\,000$$

Choix sans répétition avec ordre

Exemple

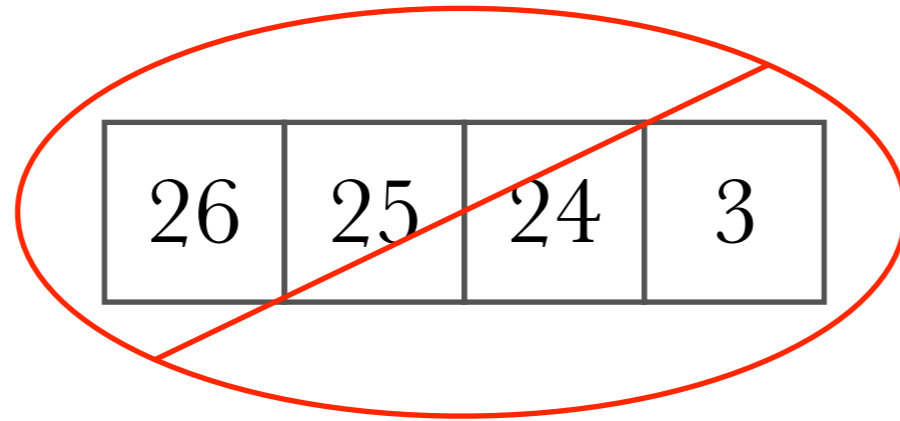
De combien de façon peut-on former un comité comportant un président, un secrétaire et un trésorier à partir d'un groupe de 30 personnes, si une personne ne peut pas occuper plus d'un poste?

<i>président</i>	<i>trésorier</i>	<i>secrétaire</i>
30	29	28

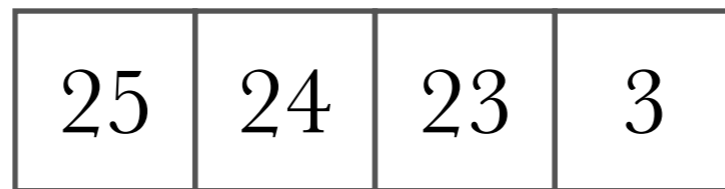
$$30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$$

Exemple

On veut savoir combien de « mots » de quatre lettres on peut faire si la dernière lettre est un a, un b, ou un c ?



Il ne reste peut-être plus de a, b ou c.



On est souvent mieux de commencer par la plus grande contrainte.

Exemple

On veut savoir combien de « mots » de quatre lettres on peut faire si la première lettre est un a, un b, ou un c et la dernière lettre est un c, un d ou un e.



On doit donc faire deux cas

Cas 1;
première lettre est un c

1	24	23	2
---	----	----	---

Cas 2;
première lettre n'est pas un c

2	24	23	3
---	----	----	---

$$1 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 2 + 2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 3 = 4416$$

Faites les exercices suivants

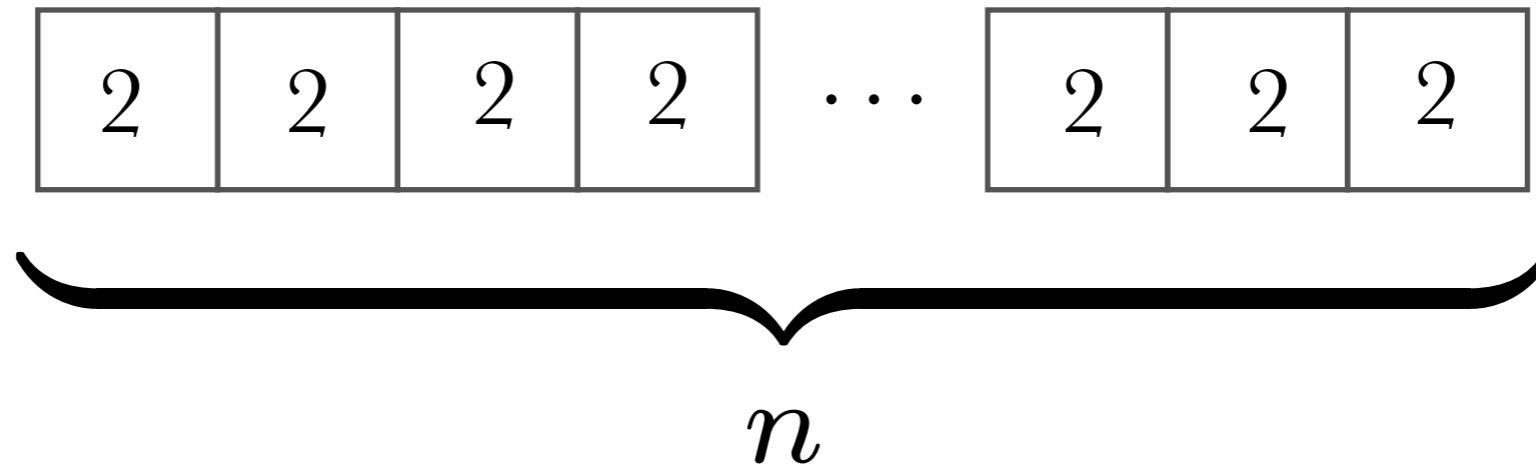
1.9 à 1.14

Exemple

Soit A un ensemble de cardinalité n
combien de sous-ensembles possède-t-il?

$$|\mathcal{P}(A)| = ?$$

On prend une boîte par élément de A



On a deux possibilités; soit l'élément est dans le sous-ensemble soit il ne l'est pas.

Donc $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Principe d'addition
- ✓ Principe de multiplication
- ✓ Principe du tiroir

Devoir:

Section 1.2