1.3 PERMUTATIONS, ARRANGEMENTS ET COMBINAISONS

cours 3

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Principe d'addition
- ✓ Principe de multiplication
- ✓ Principe du tiroir

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Permutations
- ✓ Arrangements
- ✓ Combinaisons
- ✓ Combinaisons avec répétitions

Au dernier cours on a vu comment trouver le nombre de façons de sélectionner un certain nombre d’éléments d’une collection à l’aide de boîtes.

Bien que les boîtes aident à visualiser ce qui ce passe, la notation est un peu lourde.

Aujourd’hui nous allons introduire diverses notations pour alléger les calculs.

Comme on a pu le constater, on doit souvent multiplier plusieurs nombres qui sont parfois décroissants.

Or il existe une notation pour faire presque ça.

Définition La factorielle est

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-1) \cdot n$$

le produit de tous les nombres inférieur ou égal à n.

Par convention $0! = 1$

La factorielle n'est définie que sur les entiers positifs.

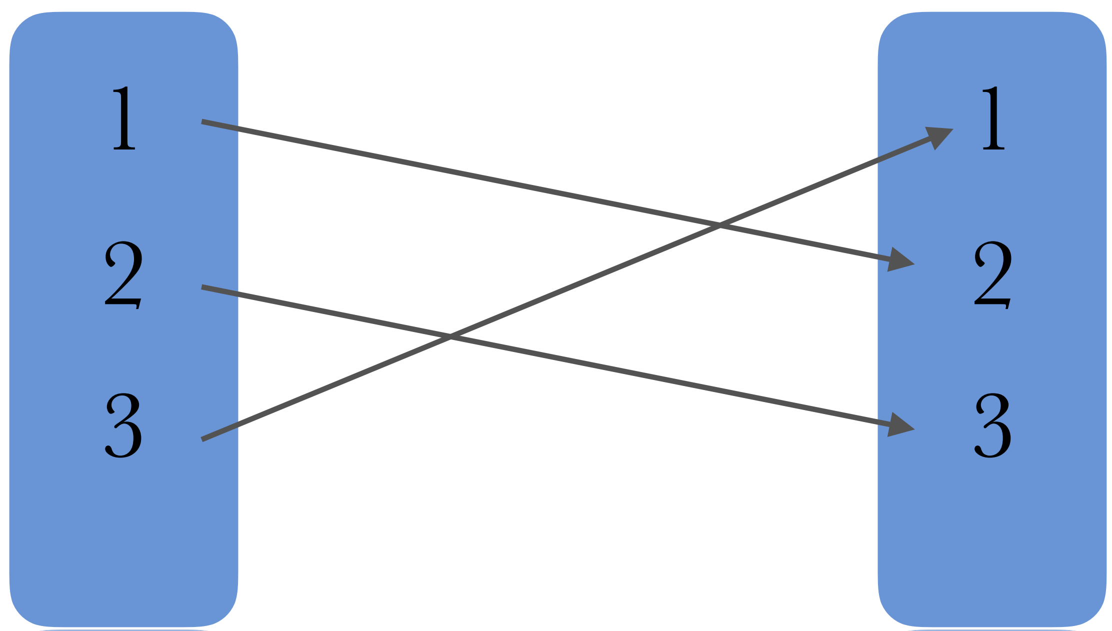
Définition

Une permutation est un réarrangement de l'ordre d'éléments discernable.

On définit parfois une permutation comme une bijection d'un ensemble dans lui même.

c'est à dire, une fonction un pour un

$$\sigma : A \longrightarrow A$$



Exemple Trouver toutes les permutations des lettres a, b, c

abc	acb	bac
bca	cab	cba

Permutation d'objets discernables

Combien y a-t-il de permutation possible de n éléments discernables

$$\underbrace{\boxed{n}\,\boxed{n-1}\,\boxed{n-2}\ \cdots\ \boxed{3}\,\boxed{2}\,\boxed{1}}_{n}$$

Il y a $n!$ permutations de n éléments

Exemple De combien de façons peut-on disposer 15 livres sur une tablette d'une bibliothèque?

$$15! = 1\ 307\ 674\ 368\ 000$$

Exemple On a 12 livres dont 6 BD, 4 romans et 2 manuels, de combien de façons peut-on les disposer sur une tablette si on veut que les livres d'un même type soient ensembles.

Permutation des trois types

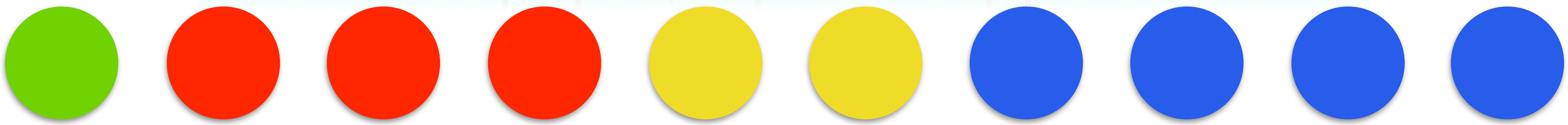
Permutation des BD

Permutation des romans

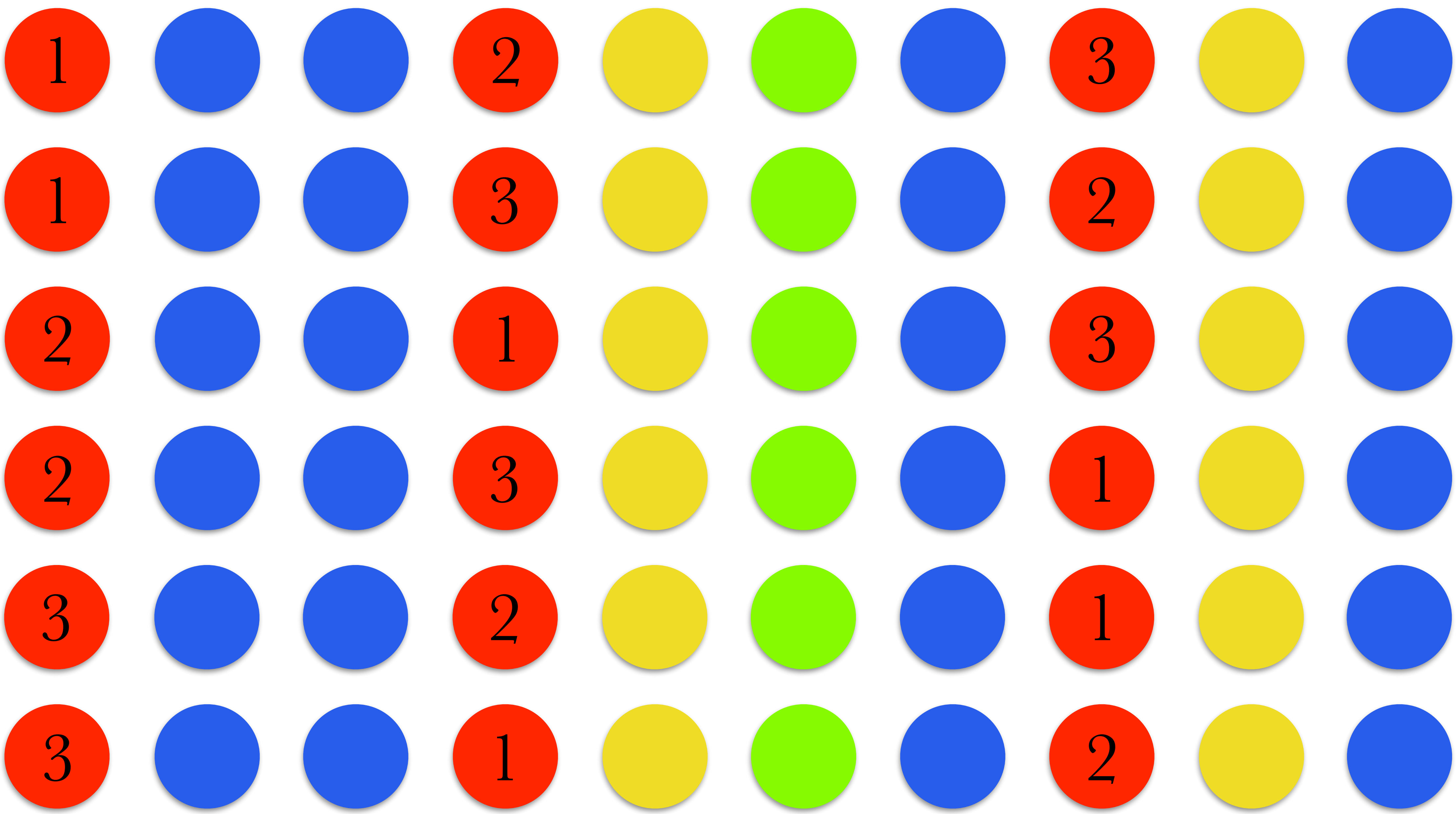
Permutation des manuels

$$3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2! = 207\ 360$$

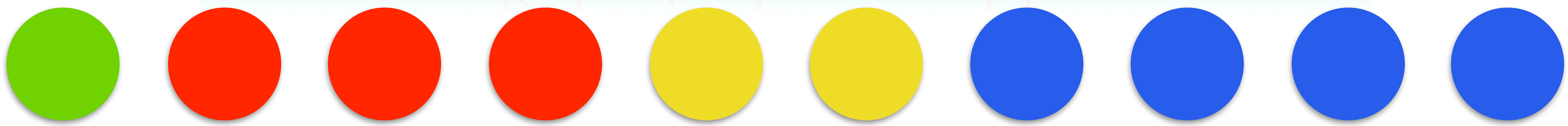
Permutation avec répétition d’objets discernables



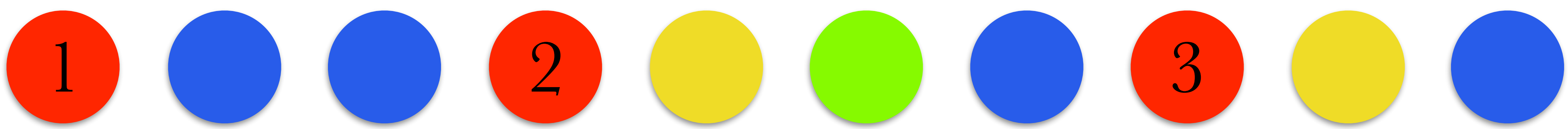
Ici, on a $10!$ permutations de ces 10 billes



Permutation avec répétition d'objets discernables



Ici, on a $10!$ permutations de ces 10 billes



On doit donc diviser par

$3!$ pour tenir compte des permutations des billes rouges entre elles

$2!$ pour tenir compte des permutations des billes jaunes entre elles

$4!$ pour tenir compte des permutations des billes bleues entre elles

Il y a donc $\dfrac{10!}{2!3!4!} = 12\ 600$ permutations de ces billes

De manière plus générale, le nombre de permutations de

n éléments appartenant à

k classes comportant chacune des éléments indiscernables

où

n_1 est le nombres d'éléments dans la première classe

n_2 est le nombres d'éléments dans la deuxième classe

$$\vdots$$

n_k est le nombres d'éléments dans la k-ième classe

est

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Faites les exercices suivants

1.26 à 1.31

Définition

Un arrangement est un choix de k objets discernables parmi n sans répétition et avec ordre.

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple

Combien de mots de quatre lettres, sans répétition, peut-on former avec les lettres a, b, c, d, e et f?

$$A_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1}}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Faites les exercices suivants

1.32 à 1.35

Définition Une combinaison est un choix de k objets discernables parmi n sans répétition et sans ordre.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^n$$

Exemple Lors d'un tirage, on pige 4 boules parmi 12 boules numérotées de 1 à 12. Combien de combinaisons différentes peut-on obtenir?

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!}$$

C'est un arrangement qu'on divise par le nombre de permutations

car $\quad 3-8-11-2 \quad$ et $\quad 11-2-3-8$

donne la même combinaison.

Exemple Combien y a-t-il de combinaison possible au loto-6/49 ?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!}$$

$$= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!}$$

$$= \frac{10\ 068\ 347\ 520}{720}$$

$$= 13\ 983\ 816$$

Remarque:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

Théorème

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Preuve:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Exemple

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

$$\binom{12}{0} = \binom{12}{12} \qquad \binom{12}{1} = \binom{12}{11} \qquad \binom{12}{2} = \binom{12}{10} \qquad \binom{12}{3} = \binom{12}{9}$$

$$\binom{12}{4} = \binom{12}{8} \qquad \binom{12}{5} = \binom{12}{7} \qquad \binom{12}{6} = \binom{12}{6}$$

Faites les exercices suivants

#1.36 à 1.40

Combinaisons avec répétition

On fait un tirage et on tire trois boules parmi 4 numérotés de 1 à 4. Par contre, après qu'une boule est tirée, on la remet dans l'urne.

1-1-1	1-1-2	1-1-3	1-1-4
1-2-2	1-2-3	1-2-4	1-3-3
1-3-4	1-4-4	...	4-4-4

Comment faire pour compter ces combinaisons avec répétitions?

Voici une petite astuce permettant de comprendre d’où vient la formule que nous allons voir.

Reprenons notre exemple.

Associons à chaque élément à choisir, un trait horizontal.

0 1 2 3

Chaque boule peut sortir 0, 1, 2 ou 3 fois.

Associons à « chacune » des boules un trait vertical de la manière suivante:

B1 sort 0 fois

B1 sort 1 fois

B1 sort 2 fois

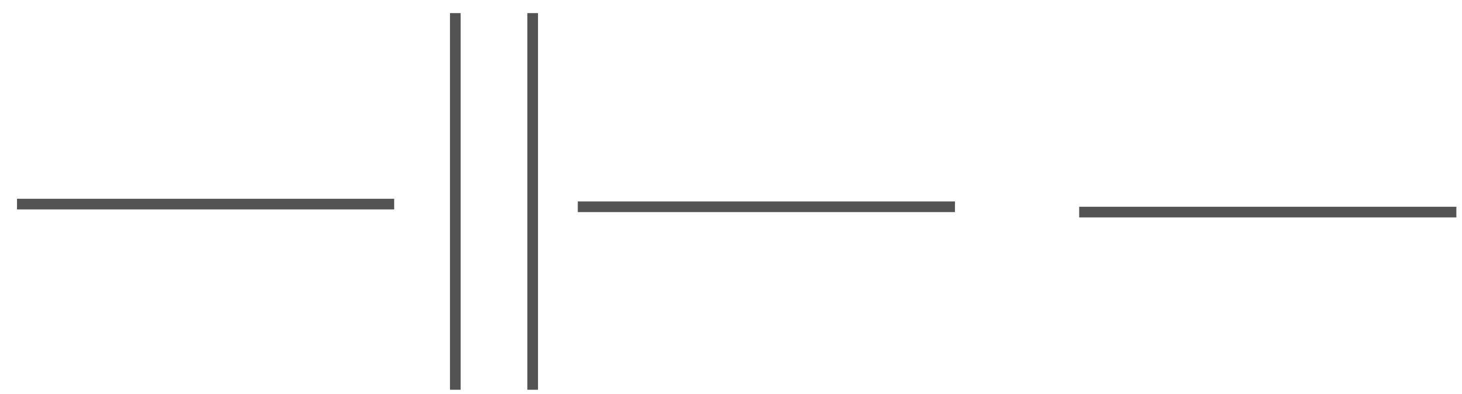
B1 sort 3 fois

B1 sort 0 fois

B2 sort 0 fois

B1 sort 1 fois

B2 sort 0 fois



B1 sort 2 fois

B2 sort 0 fois

B1 sort 3 fois

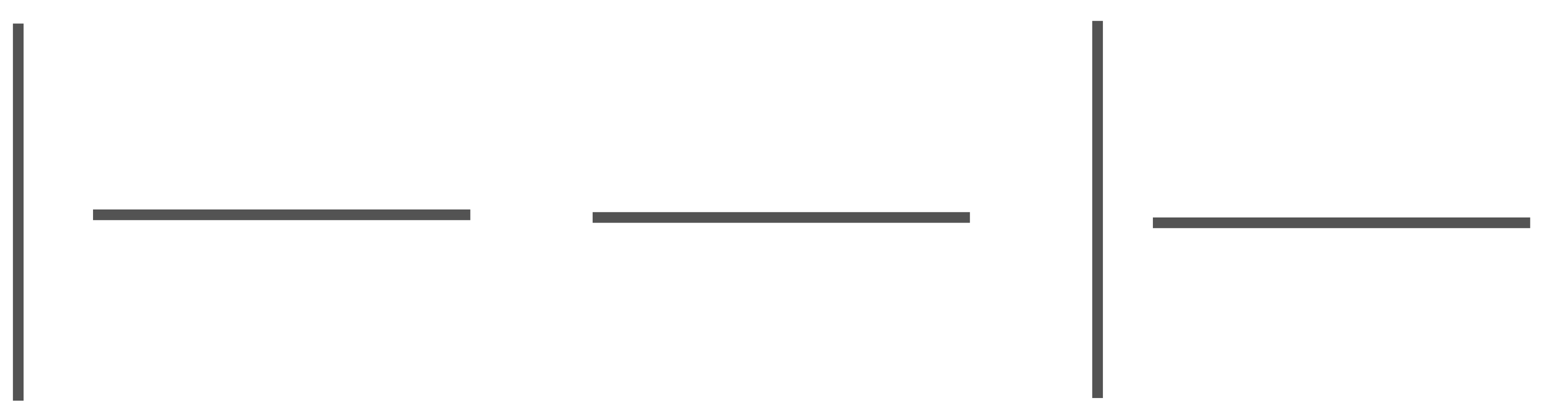
B2 sort 0 fois

On peut remarquer que le nombre de fois que sort la dernière boule est entièrement déterminé si on connaît le nombre de fois que sont sortis les autres.

Par exemple, si on a 1B1, 0B2 et 0B3,
il faut absolument qu'il y ait 2B4.

Donc on n'a besoin que de trois traits verticaux.

2-2-3



Pour compter ces « codes » , il suffit de les considérer comme des permutations avec répétition.

$$\frac{6!}{3!3!}$$

De manière plus générale, le nombre de façon de choisir k éléments parmi n avec répétition et sans ordre est

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Trait horizontal

Trait vertical

On peut réécrire ça autrement:

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(k+n-1)!}{k!((k+n-1)-k)!} = \binom{k+n-1}{k}$$

Remarque:

Personnellement, j'ai plutôt tendance à raisonner ce genre de problème plutôt que d'apprendre cette formule.

Certains auteurs utilisent une notation pour faire référence aux combinaisons avec répétition.

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \Gamma_k^n = K_k^n = \binom{k+n-1}{k}$$

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Permutations
- ✓ Arrangements
- ✓ Combinaisons
- ✓ Combinaisons avec répétitions

Devoir: Section 1.3