1.4 BINÔME DE NEWTON ET TRIANGLE DE PASCAL

cours 4

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Permutations
- ✓ Arrangements
- ✓ Combinaisons
- ✓ Combinaisons avec répétitions

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Binôme de Newton
- ✓ Triangle de Pascal

Binôme

Regardons les différentes puissances d'un binôme.

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x+a$$

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$$

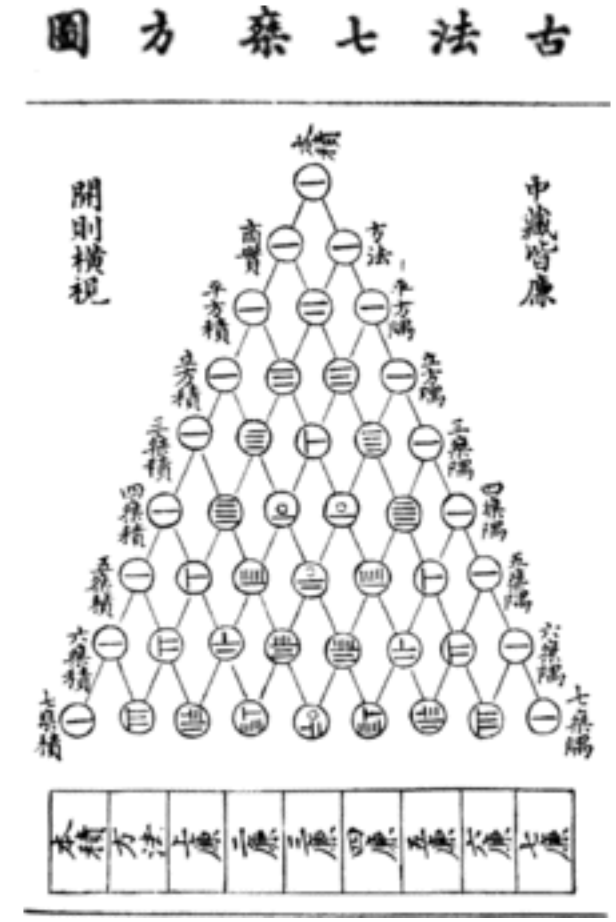
$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= (x+a)^2(x+a) = (x^2 + 2ax + a^2)(x+a) \\ &= x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3 \\ &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+a)^4 &= (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)(x+a) \\ &= x^4 + ax^3 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + 3a^2x^2 + 3a^3x + a^3x + a^4 \\ &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4\end{aligned}$$

Triangle de Pascal

Blaise Pascale
(1623-1662)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1



Yang Hui (1238-1298)

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x + a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
n=2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
n=3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
n=4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
n=5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n=6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n=7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x + a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

Théorème (Règle de Pascal) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Preuve:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!k}{k(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!}$$

Théorème $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Preuve:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-\cancel{k}+1+\cancel{k})}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Faites les exercices suivants

1.48 et 1.49

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} \quad \binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Il semble y avoir un lien entre les binômes et le triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal donne les coefficients binomiaux.

Le théorème suivant explicite ces liens.

Théorème

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

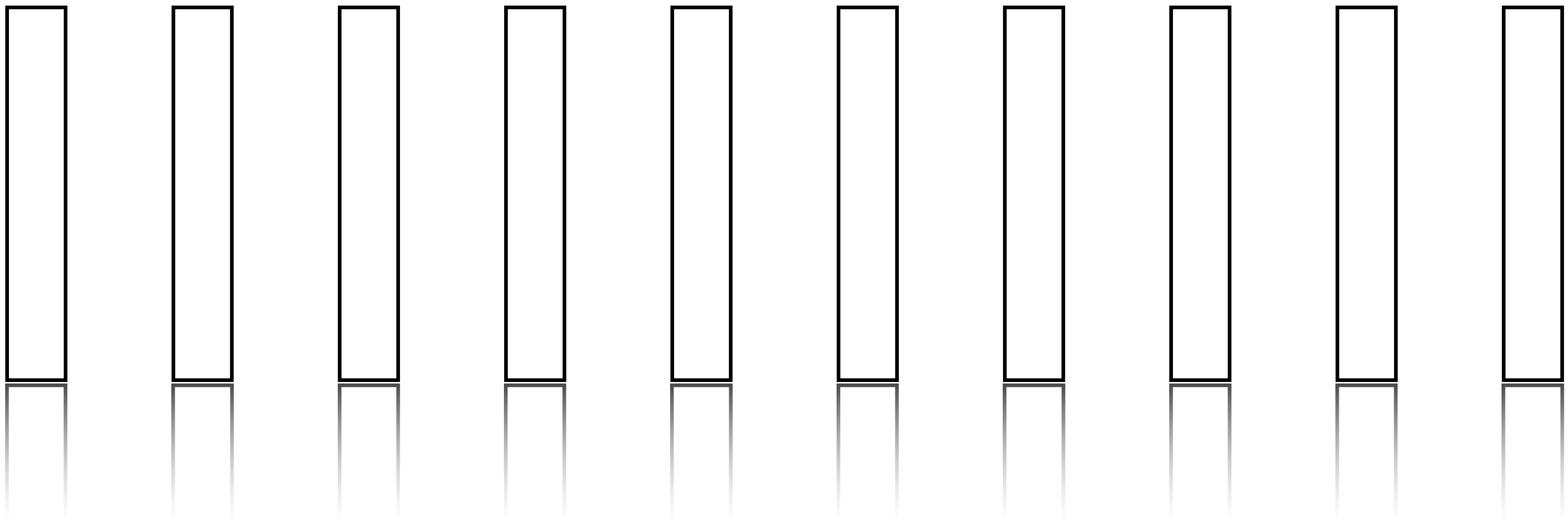
Comment faire pour être certain que cette formule fonctionne toujours?

Induction

L'induction est une méthode de preuve qui permet de vérifier si une proposition est vrai pour tout les entiers.

Dominos

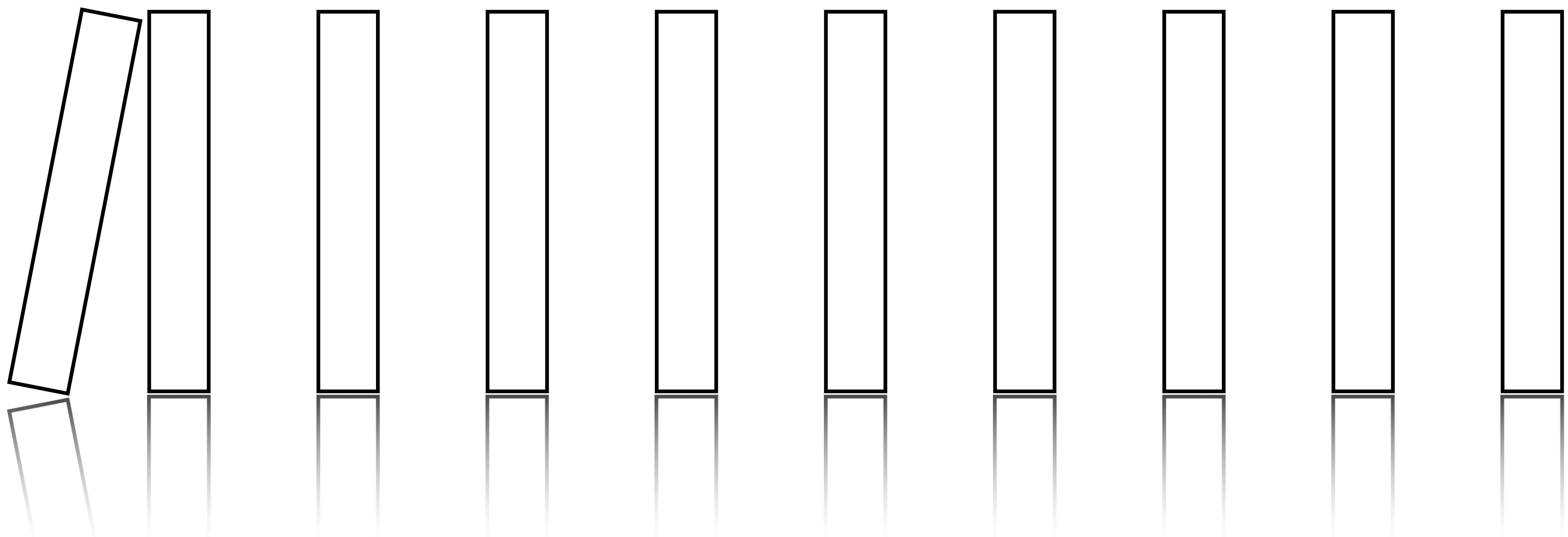
Quelles sont les conditions pour qu'ils tombent tous?



1) On doit être capable de faire tomber le premier

Dominos

Quelles sont les conditions pour qu'ils tombent tous?

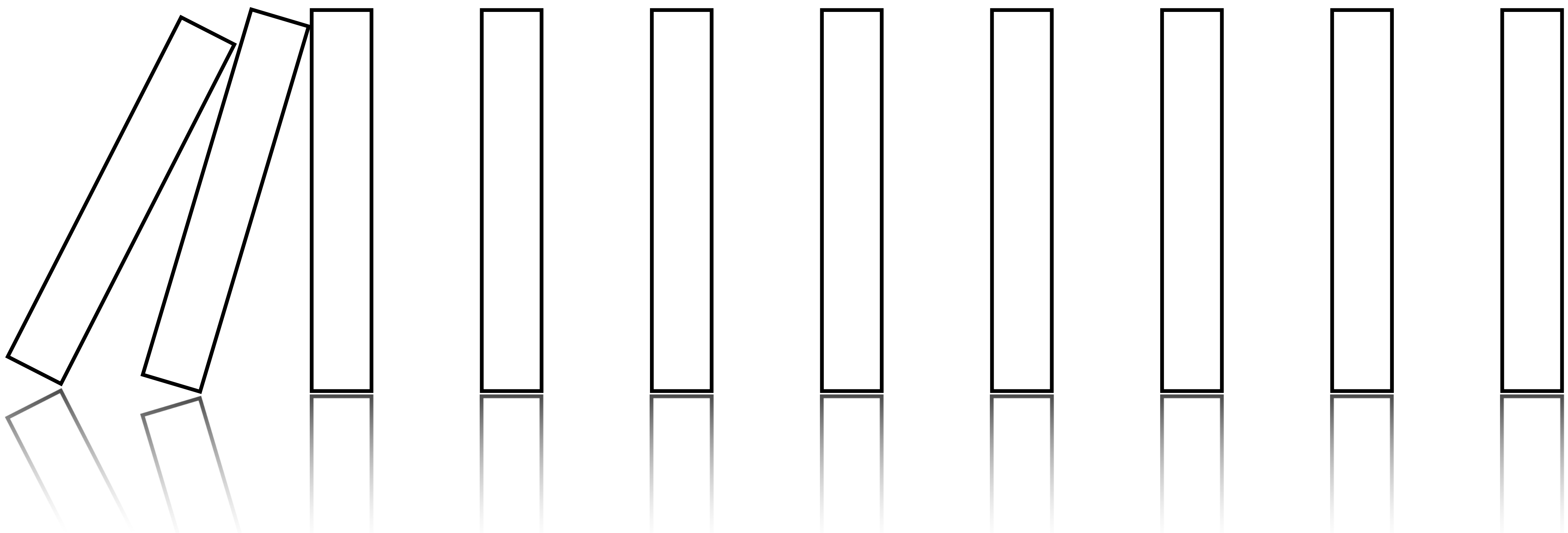


1) On doit être capable de faire tomber le premier

2) Si n'importe quel dominos tombe, il doit faire tomber le suivant.

Dominos

Quelles sont les conditions pour qu'ils tombent tous?



1) On doit être capable de faire tomber le premier

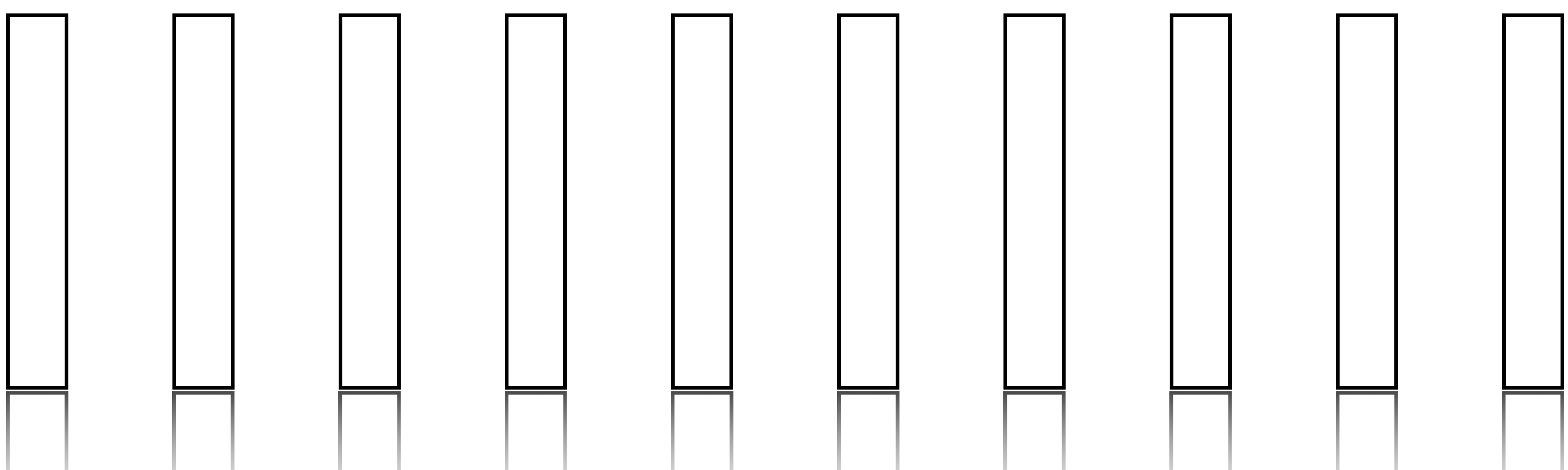
2) Si n'importe quel dominos tombe, il doit faire tomber le suivant.

En terme d'autre mots si on vérifie qu'une proposition

1) est vrai pour $n = 1$

2) si elle est vrai pour n alors elle est vrai pour $n + 1$

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow \dots$$



Théorème $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Preuve: (Par induction)

pour $n = 0$ $$(x+y)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

pour $n = 1$ $$(x+y)^1 = x + y$$

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y$$

Théorème $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Preuve: (Par induction)

supposons vrai pour n

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

on veut vérifier que ça entraine

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= x\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}
\end{aligned}$$

Théorème $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Preuve: (Par induction)

supposons vrai pour n

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

on veut vérifier que ça entraine

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

$t = k+1$

$k = t-1$

$k = 0$
$t = 1$

$k = n$
$t = n+1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n}{t-1} x^{n-(t-1)} y^t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n}{t-1} x^{n+1-t} y^t$$

Théorème $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Preuve: (Par induction)

supposons vrai pour n

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

on veut vérifier que ça entraine

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n}{t-1} x^{n+1-t} y^t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

Théorème $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Preuve: (Par induction)

supposons vrai pour n

on veut vérifier que ça entraine

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

$$(x+y)^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

Théorème $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Preuve: (Par induction)

supposons vrai pour n

on veut vérifier que ça entraine $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

Une autre façon de démontrer ce théorème, est d'utiliser la combinatoire.

$$(x+y)^n \; = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$

Au lieu de faire les multiplications successivement, on peut additionner toutes les multiplications ou l'on prend qu'un terme par parenthèse.

Donc chaque termes est un produit de n x ou y .

C'est-à-dire, tous les termes sont de la forme $x^k y^{n-k}$

avec k variant de 0 à n .

Le nombre de terme $x^k y^{n-k}$ est $\binom{n}{k}$

le nombre de façon de choisir k x parmi n parenthèses.

Prenons l'exemple de $(x+a)^5$

Comment obtenir le terme en ax^4 ?

$$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)$$

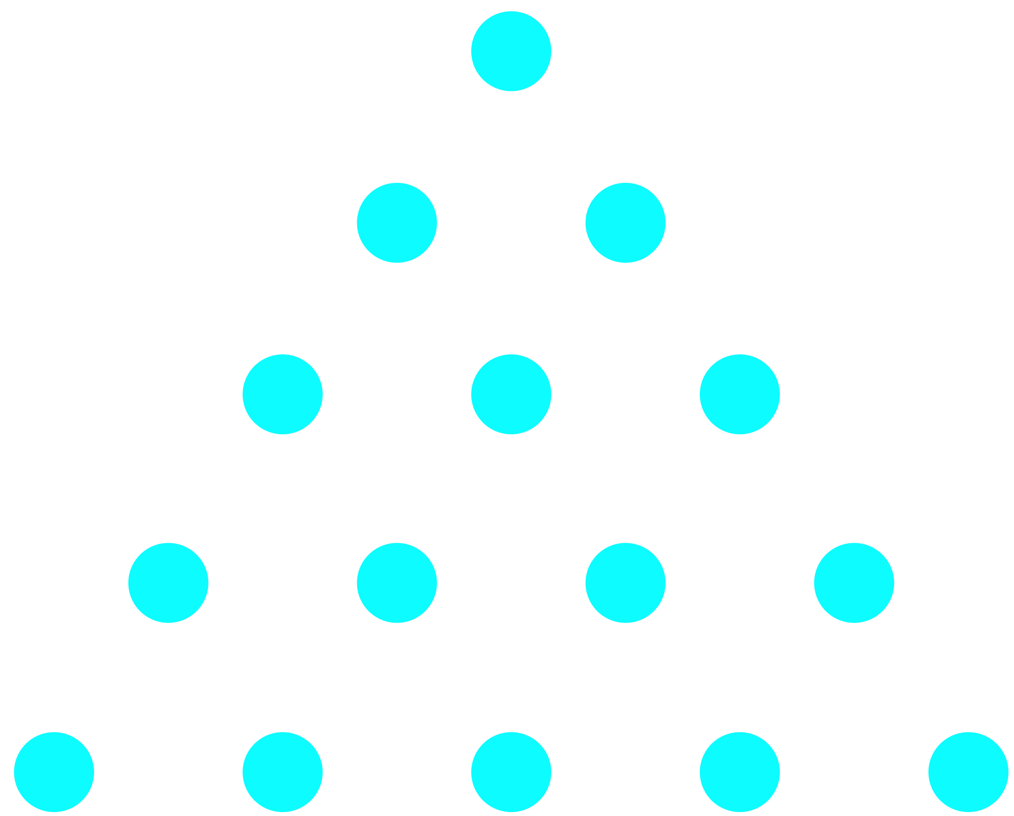
D'autant de façon que j'ai de choisir un a.

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$$

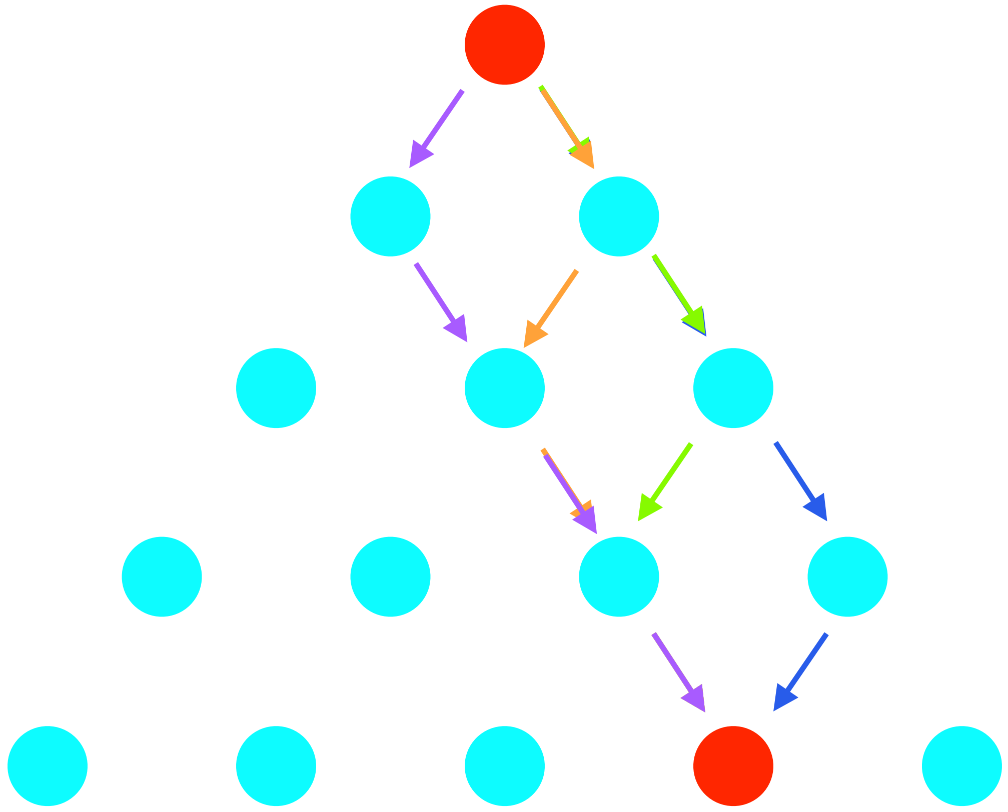
Faites les exercices suivants

1.52 à 1.58

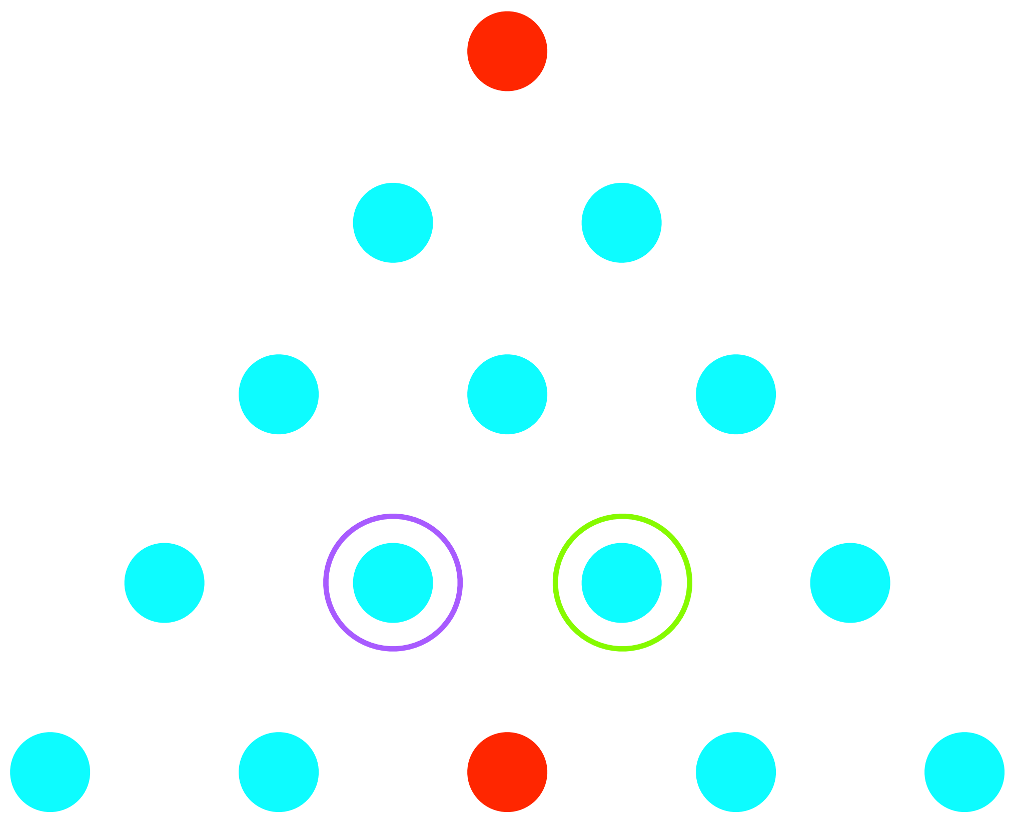
Nombre de chemins



Nombre de chemins



Nombre de chemins



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Les chemins sont tous les chemins qui vont jusqu'à

plus tous ceux qui vont jusqu'à

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Binôme de Newton
- ✓ Triangle de Pascal

Devoir: Section 1.3