2.2 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

cours 7

Au dernier cours, nous avons vu

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

A1 $0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $P(S) = 1$

A3 $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Probabilité conditionelle
- ✓ Évènements indépendants

Il arrive parfois qu'on veuille connaître une probabilité, mais une certaine quantité d'informations sur l'expérience aléatoire est déjà connue.

Exemple

On pige une carte d'un jeu de 52 cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir une figure sachant que notre carte pigée est un trèfle ?

L'évènement avoir une figure est

$$A = \{V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit\}$$

L'évènement avoir un trèfle est

$$B = \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\}$$

Puisque B est survenu l'ensemble des résultats possible devient donc B

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3}{13} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition

On défini la probabilité conditionnelle que l'évènement A se produise sachant que l'évènement B s'est produit

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Remarque:

Il est toujours sous-entendu, lorsqu'on parle de probabilité conditionnelle que

$$P(B) \neq 0$$

puisque B s'est produit!

Exemple

Un étudiant estime à 1/3 ses chances d'avoir plus de 80% dans le cours de calcul 3 et à 1/2 ses chances d'avoir plus de 80% dans le cours d'astrophysique. Il ne peut prendre qu'un de ces cours et décide de tirer à pile ou face pour choisir.

Quelle est la probabilité qu'il obtienne plus de 80% au cours de math?

A : prendre le cours de calcul 3

B : obtenir plus de 80% à son cours

$$P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cup B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Exemple Une urne contient 9 boules bleues et 15 boules rouges.

On tire deux boules sans remise et on veut savoir la probabilité qu'elles soient les deux rouges.

R_1 : La première boule est rouge

R_2 : La deuxième boule est rouge

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \left(\frac{15}{24}\right) P(R_2|R_1)$$

$$= \left(\frac{15}{24}\right)\left(\frac{14}{23}\right) \approx 0,38$$

On peut généraliser cette idée à trois évènements

$$P(C|A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)P(B|A)}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Ou à n évènements

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

La probabilité conditionnelle peut être considérée comme une probabilité en soit.

Ceci découle du fait qu'elle respecte les axiomes de probabilités.

Si on fixe $B \subset S$ tel que $P(B) \neq 0$ et qu'on note

$$Q(A) = P(A|B)$$

Vérifions que cette fonction définit bien une probabilité

A1 $$Q(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A \cap B \subset B$ $\qquad 0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$

$$0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1 \qquad 0 \leq Q(A) \leq 1$$

A2

$$Q(S) = P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$B \subset S \qquad S \cap B = B$$

A3

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

Donc les théorèmes qu'on a vus au dernier cours sont vrais pour les probabilités conditionnelles

$$P(\emptyset|B) = 0$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$$

Faites les exercices suivants

#2.22 à 2.24

Il arrive parfois que

$$P(A|B) = P(A)$$

Dans ce cas, le fait que B soit arrivé n'a aucun impact sur le fait que A arrive ou non.

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

et donc

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Définition Si A et B sont deux évènements tels que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Alors on dit que c'est évènements sont indépendants

Exemple On lance une pièce de monnaie deux fois. Quelle est la probabilité que le deuxième lancé donne pile sachant que le premier lancé a donné face?

$$S = \{(p,p),(f,p),(p,f),(f,f)\}$$

$$A = \{(f,p),(f,f)\}$$

$$B = \{(f,p),(p,p)\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{2}$$

Les deux évènements sont donc indépendants

Théorème Si A et B sont des évènements indépendants alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Preuve:

$$P(A) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient la preuve de

Théorème

Si A et B sont des évènements indépendants alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi

Preuve:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) \stackrel{?}{=} P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-P(A))(1-P(B))$$
$$= 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$1 = P(S) = P((A\cup\bar{A})\cap(B\cap\bar{B}))$$
$$= P((A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}))$$
$$= P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)+P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})$$
$$= P(A)P(B)+P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1-P(A)P(B)-P(\bar{A})P(B)-P(A)P(\bar{B})$$

Théorème Si A et B sont des évènements indépendants alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi

Preuve:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) \stackrel{?}{=} P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-P(A))(1-P(B))$$
$$= 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1-P(A)P(B)-P(\bar{A})P(B)-P(A)P(\bar{B})$$
$$= 1-P(B)(P(A)+P(\bar{A}))-P(A)P(\bar{B})$$
$$= 1-P(B)-P(A)P(\bar{B})$$
$$= 1-P(B)-P(A)P(\bar{B})-P(A)P(B)+P(A)P(B)$$
$$= 1-P(B)-P(A)(P(\bar{B})+P(B))+P(A)P(B)$$
$$= 1-P(B)-P(A)+P(A)P(B)$$

Faites les exercices suivants

2.25 à 2.30

Quel devrait être la condition pour que trois évènements soient indépendants?

Est-ce suffisant de poser que les évènements soient deux à deux indépendant?

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Exemple Considérons l'expérience de lancer deux dés.

A : La somme des dés donne 7

B : Le premier dé donne 3

C : Le second dé donne 4

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{1}{6} \qquad P(C) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(3,4)\}) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(\{(3,4)\}) = \frac{1}{36} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(\{(3,4)\}) = \frac{1}{36} = P(B)P(C)$$

mais $\quad P(A|B \cap C) = 1 \neq P(A)$

Exemple Considérons l'expérience de lancer deux dés.

A : La somme des dés donne 7

B : Le premier dé donne 3

C : Le second dé donne 4

mais $$P(A|B \cap C) = 1 \neq P(A)$$

Pour que trois évènements soient indépendants, on doit vérifier si

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

mais

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{(3,4)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Définition On dit que les évènements

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

sont totalement indépendants si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Aujourd'hui, nous avons vu

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A et B sont indépendant si

$$P(A|B) = P(A)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Devoir: Section 2.2