2.3 FORMULE DE BAYES

cours 8

Au dernier cours, nous avons vu

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A et B sont indépendant si

$$P(A|B) = P(A)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Aujourd'hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Probabilité totale

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Probabilité totale
- ✓ Théorème de Bayes

Probabilité totale

Considérons une partition de S

Probabilité totale

Considérons une partition de S

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

Probabilité totale

Considérons une partition de S

$$P_1, P_2, \dots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S$$

Probabilité totale

Considérons une partition de S

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

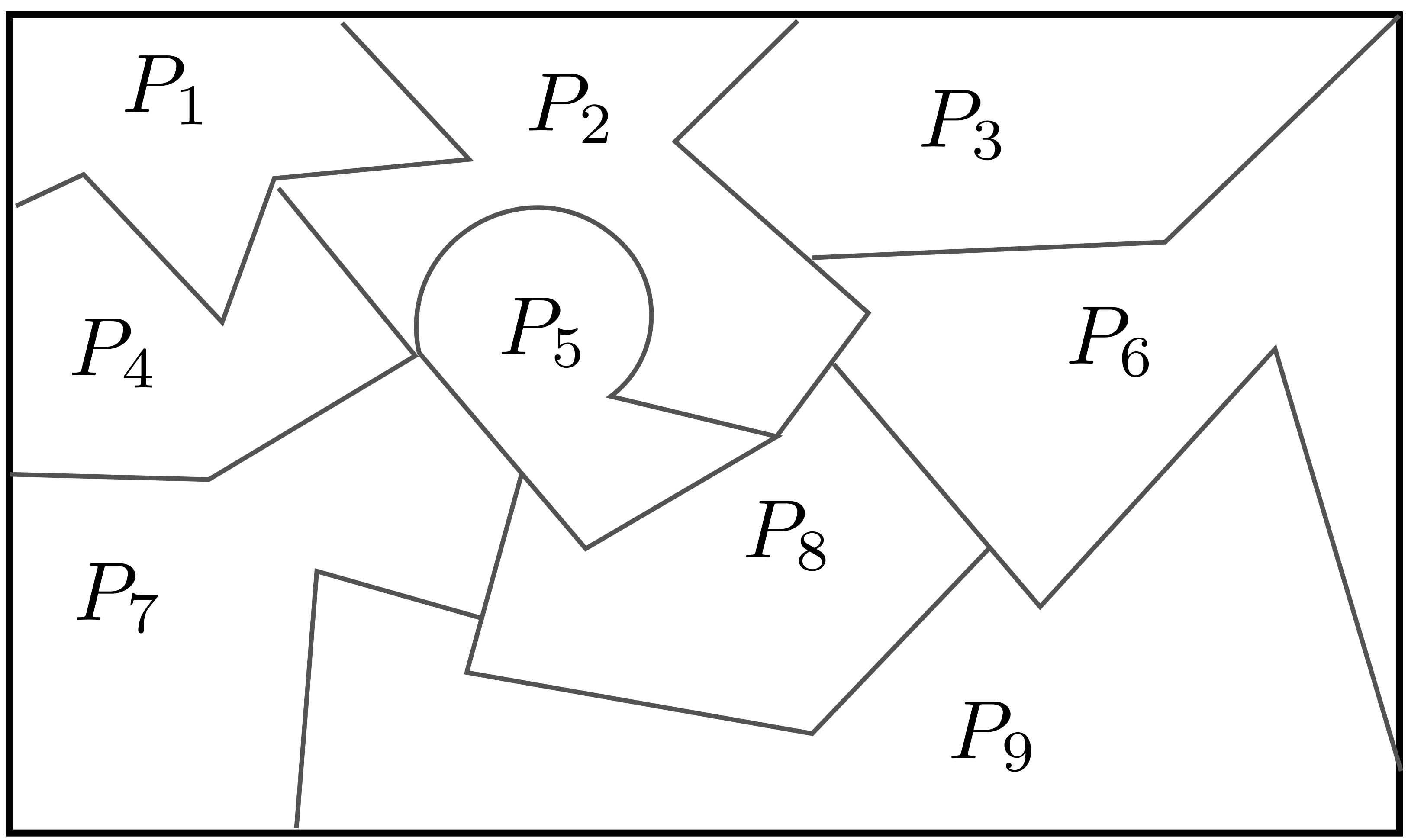
$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad\qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

Probabilité totale

Considérons une partition de S

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

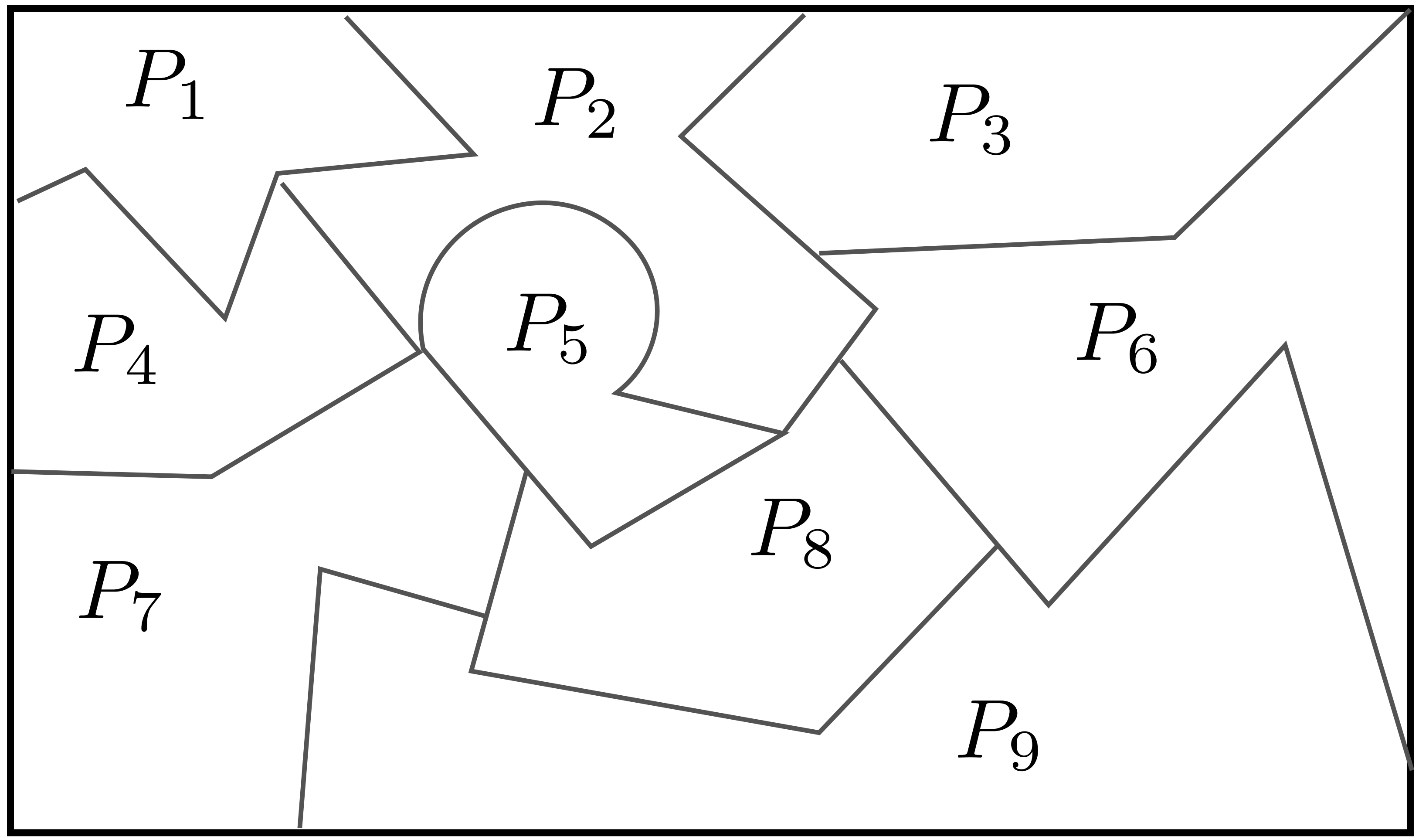
$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad\qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$



$$P_1, P_2, \dots P_n \subset S$$

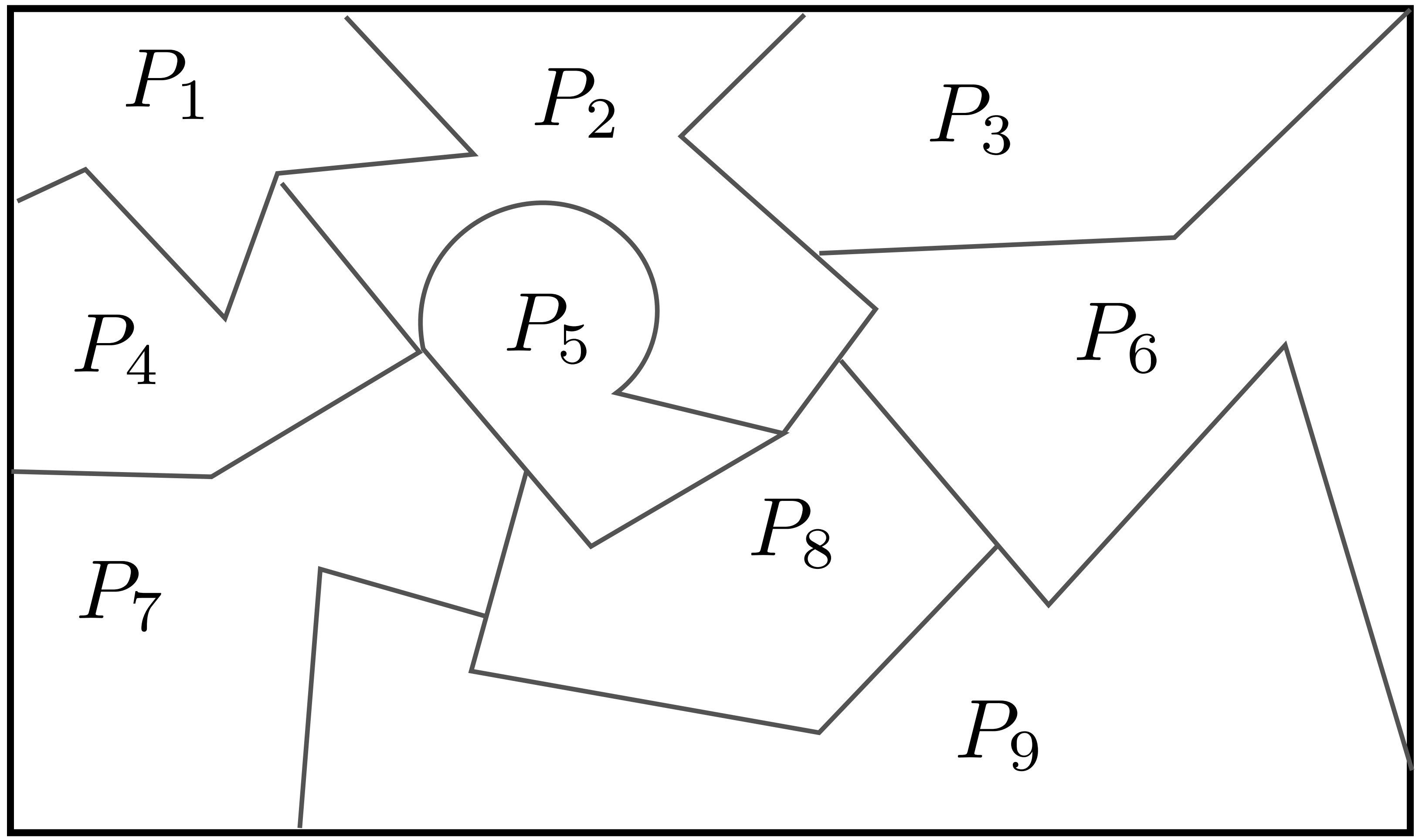
$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S$$

$$P_i \cap P_j = \emptyset$$



$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

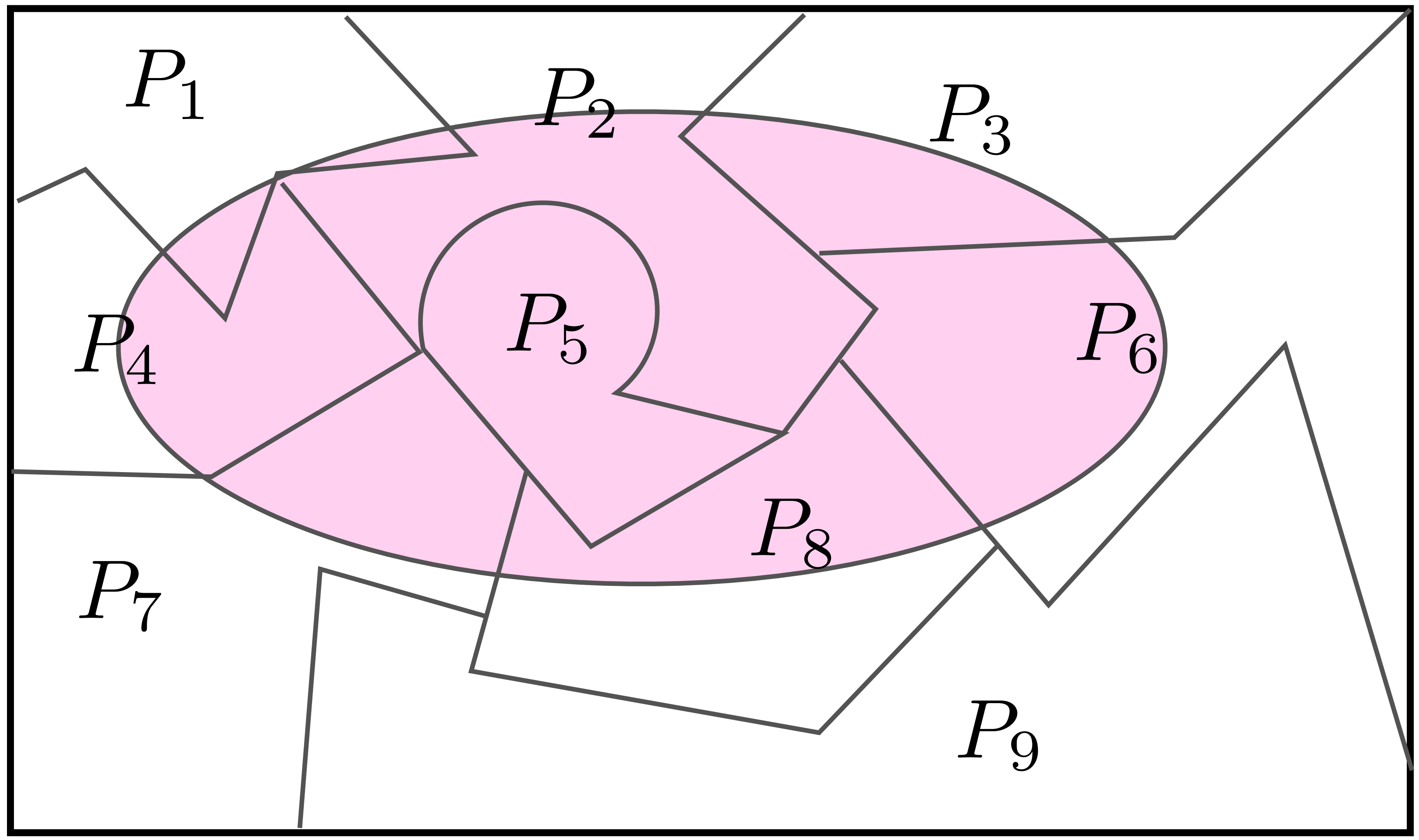


$$B \subset S$$

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S$$

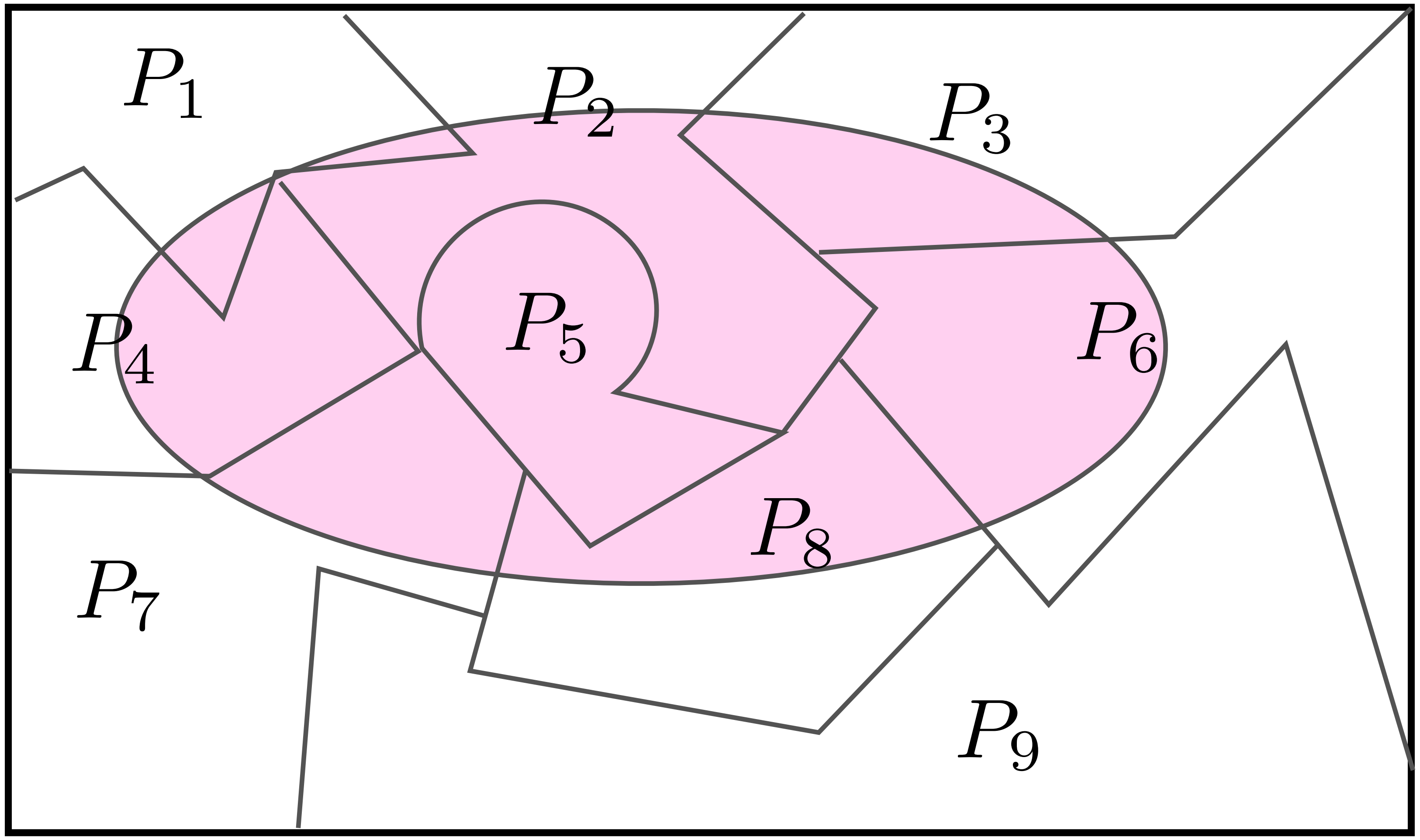
$$P_i \cap P_j = \emptyset$$



$$B \subset S$$

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

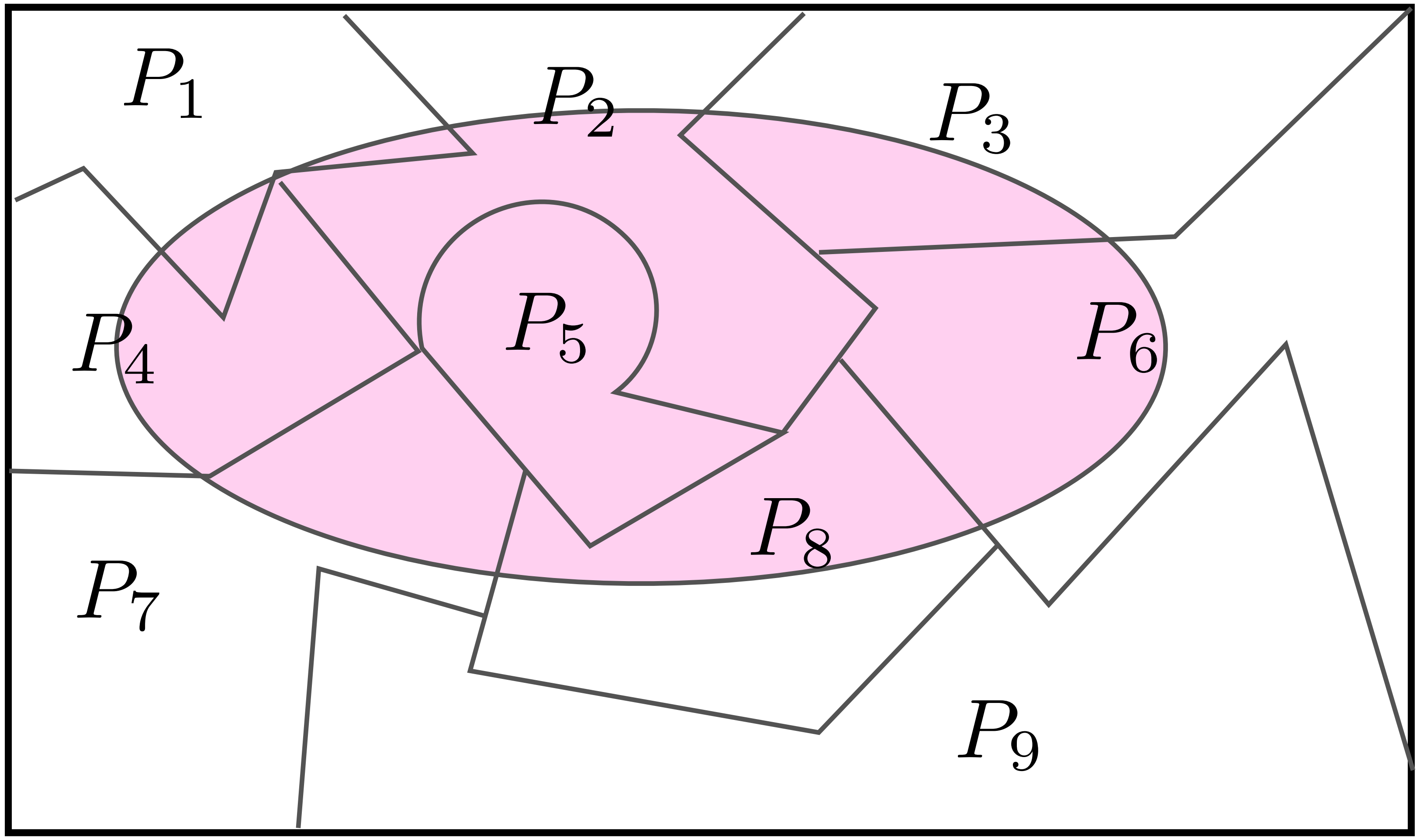


$B \subset S$ Puisque

$$P_1, P_2, \dots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n = S$$

$$P_i \cap P_j = \emptyset$$



$B \subset S$

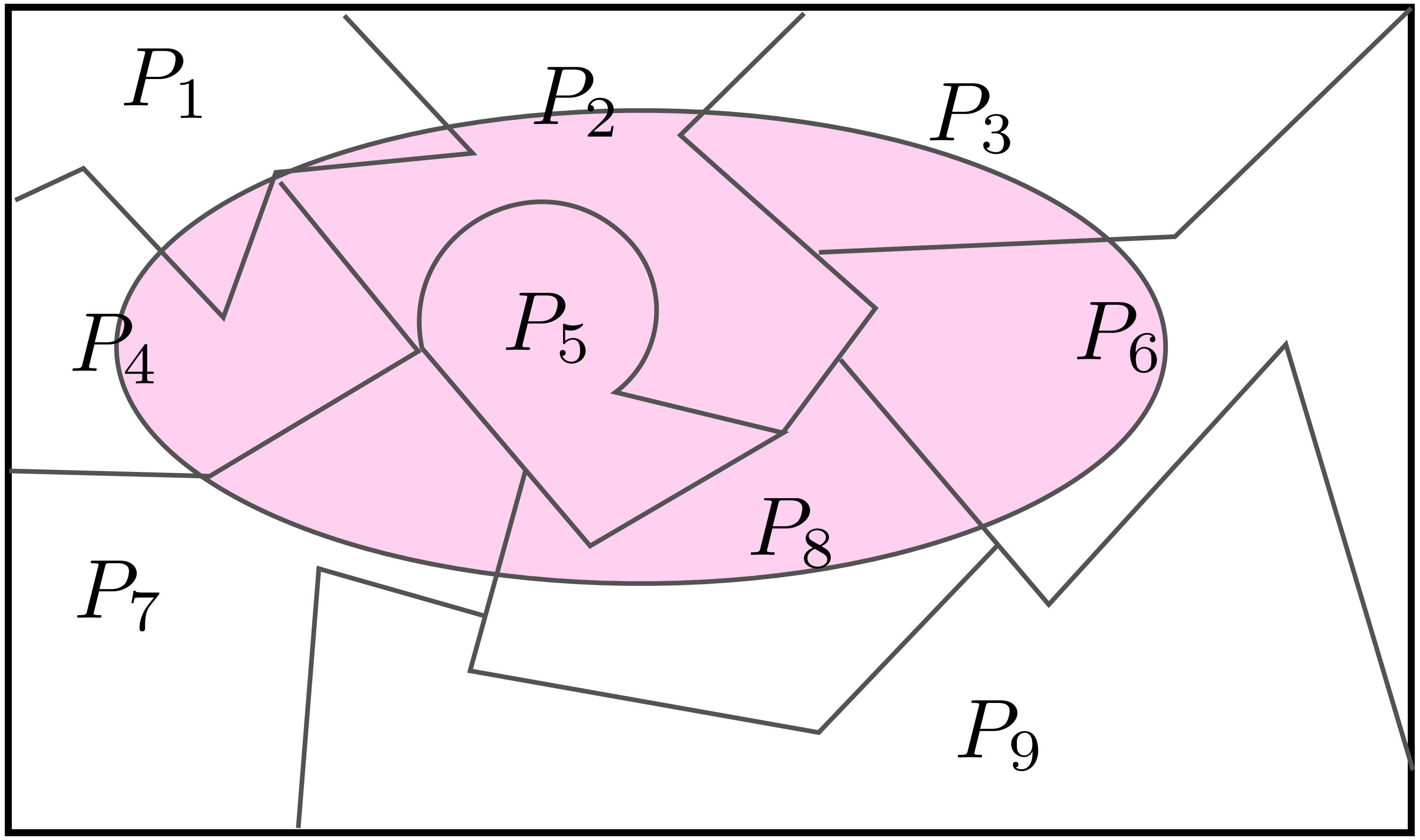
Puisque

$$(B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$$

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S$$

$$\boxed{P_i \cap P_j = \emptyset}$$



$B \subset S$ Puisque $(B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$

$$(B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n) = B$$

$B \subset S$

$(B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$

$$(B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n) = B$$

$$B \subset S$$

$$(B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$$

$$(B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n) = B$$

$$P(B) = P\Big((B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n)\Big)$$

$$B \subset S \qquad\qquad (B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$$

$$(B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n) = B$$

$$P(B) = P\Big((B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n)\Big)$$

$$= P(B \cap P_1) + P(B \cap P_2) + \cdots + P(B \cap P_n)$$

$$B \subset S$$

$$(B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$$

$$(B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n) = B$$

$$P(B) = P\Big((B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n)\Big)$$

$$= P(B \cap P_1) + P(B \cap P_2) + \cdots + P(B \cap P_n)$$

$$= P(B|P_1)P(P_1) + P(B|P_2)P(P_2) + \cdots + P(B|P_n)P(P_n)$$

$$B \subset S \qquad (B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$$

$$(B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n) = B$$

$$P(B) = P\Big((B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n)\Big)$$

$$= P(B \cap P_1) + P(B \cap P_2) + \cdots + P(B \cap P_n)$$

$$= P(B|P_1)P(P_1) + P(B|P_2)P(P_2) + \cdots + P(B|P_n)P(P_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

$B \subset S$ $\qquad$ $(B \cap P_i) \cap (B \cap P_j)$

$$(B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n) = B$$

$$P(B) = P\Big((B \cap P_1) \cup (B \cap P_2) \cup \cdots \cup (B \cap P_n)\Big)$$

$$= P(B \cap P_1) + P(B \cap P_2) + \cdots + P(B \cap P_n)$$

$$= P(B|P_1)P(P_1) + P(B|P_2)P(P_2) + \cdots + P(B|P_n)P(P_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

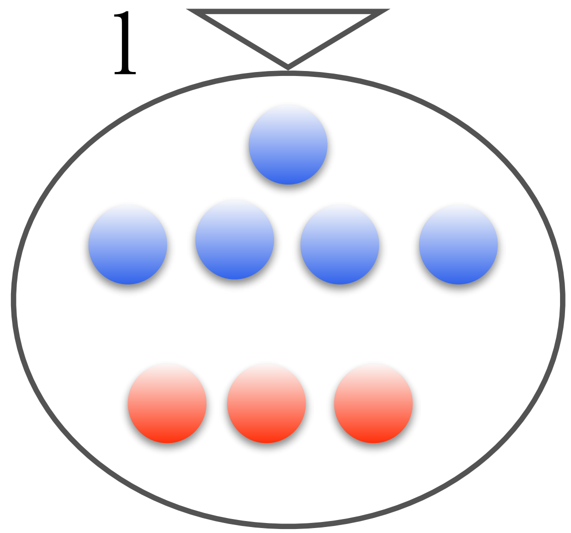
Est la formule des probabilités totales.

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.

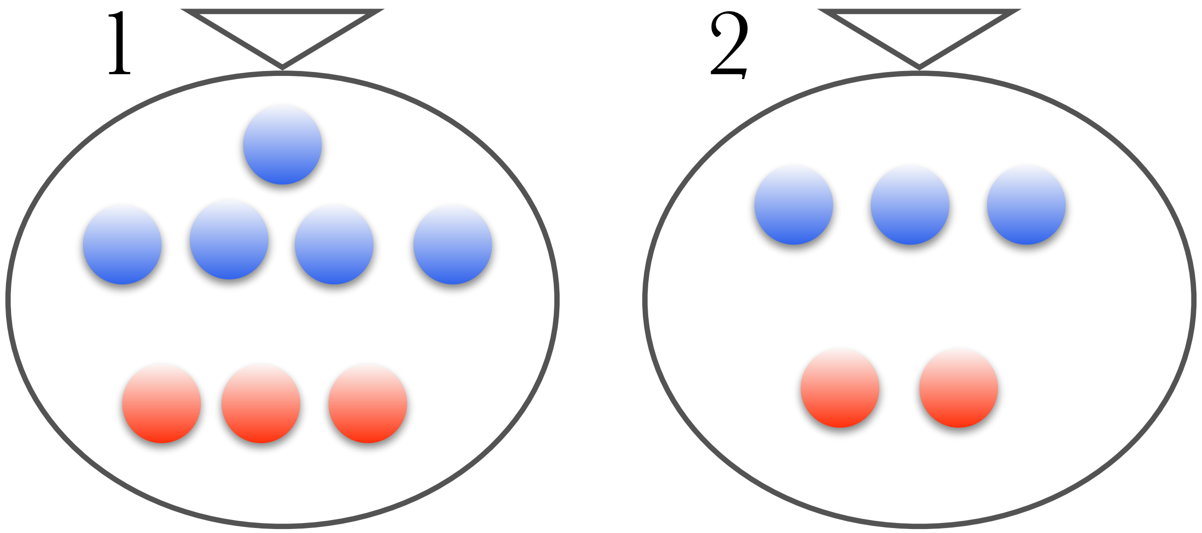
Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



Exemple

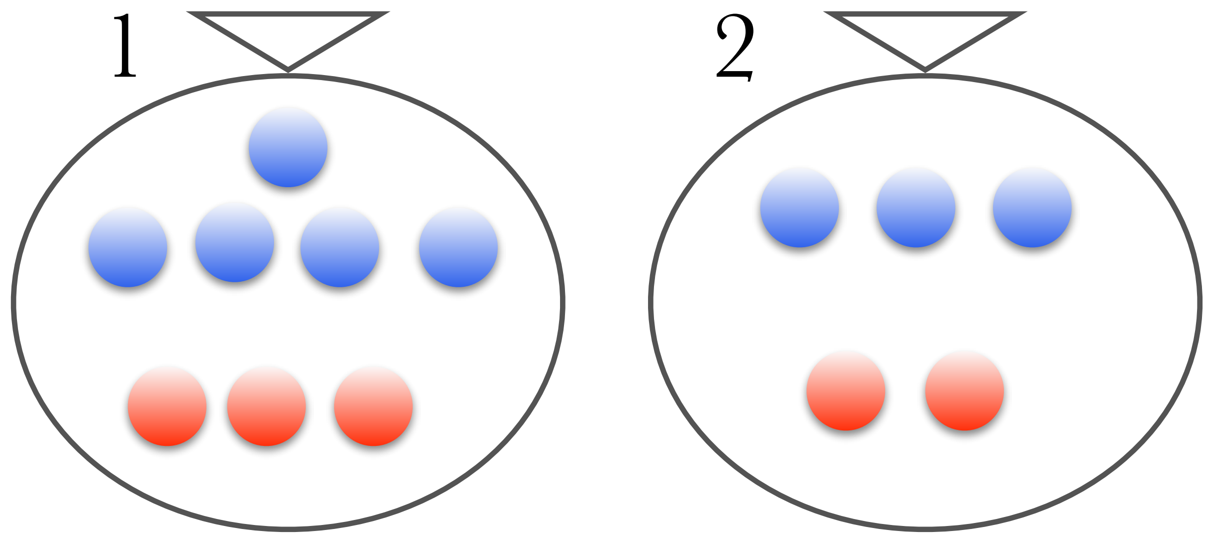
On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



Exemple

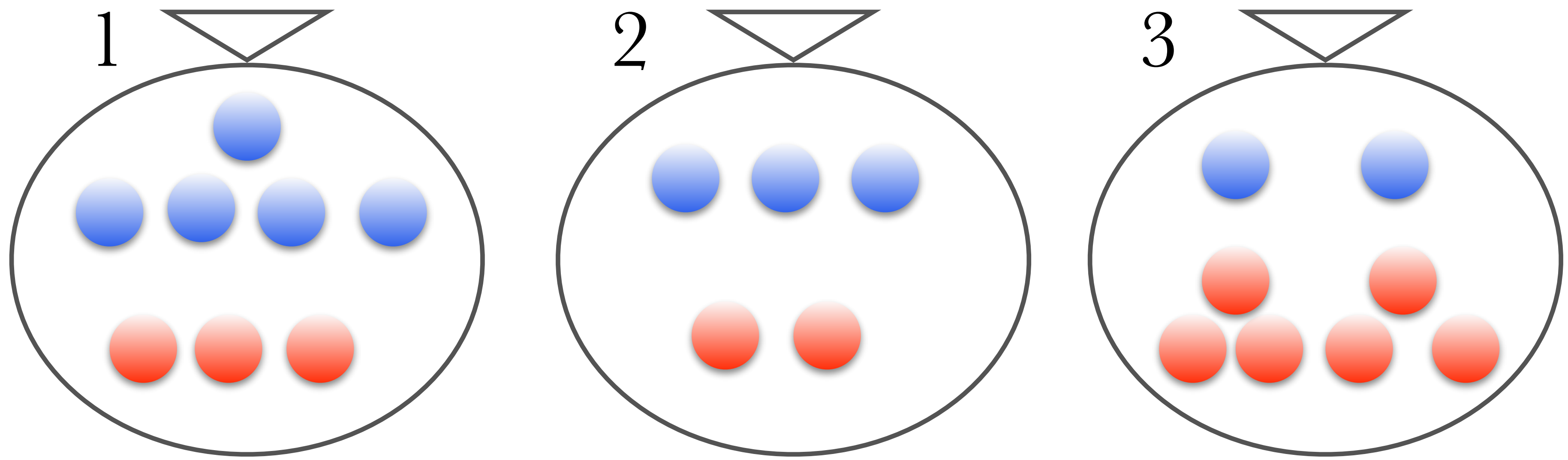
On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.

Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?



Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.

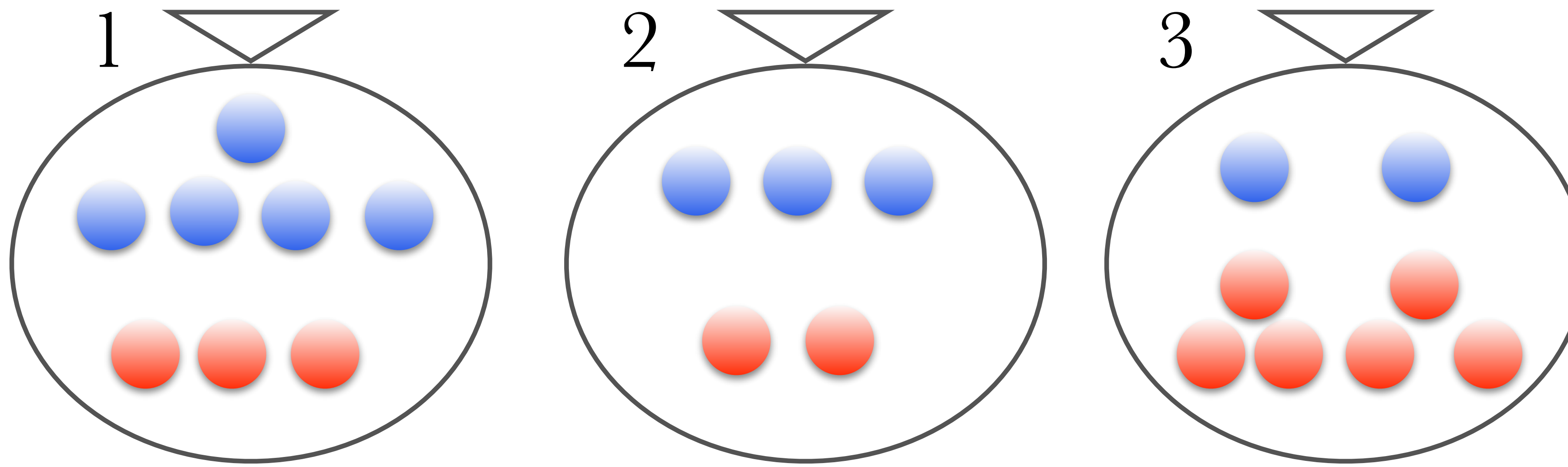


Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.

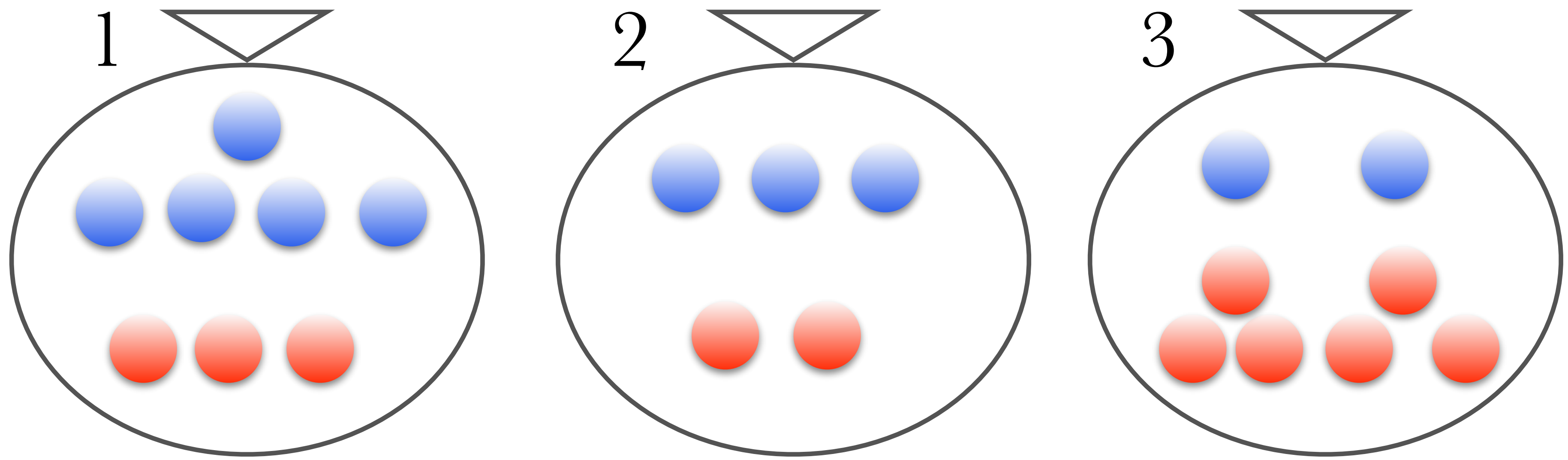
Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?



Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



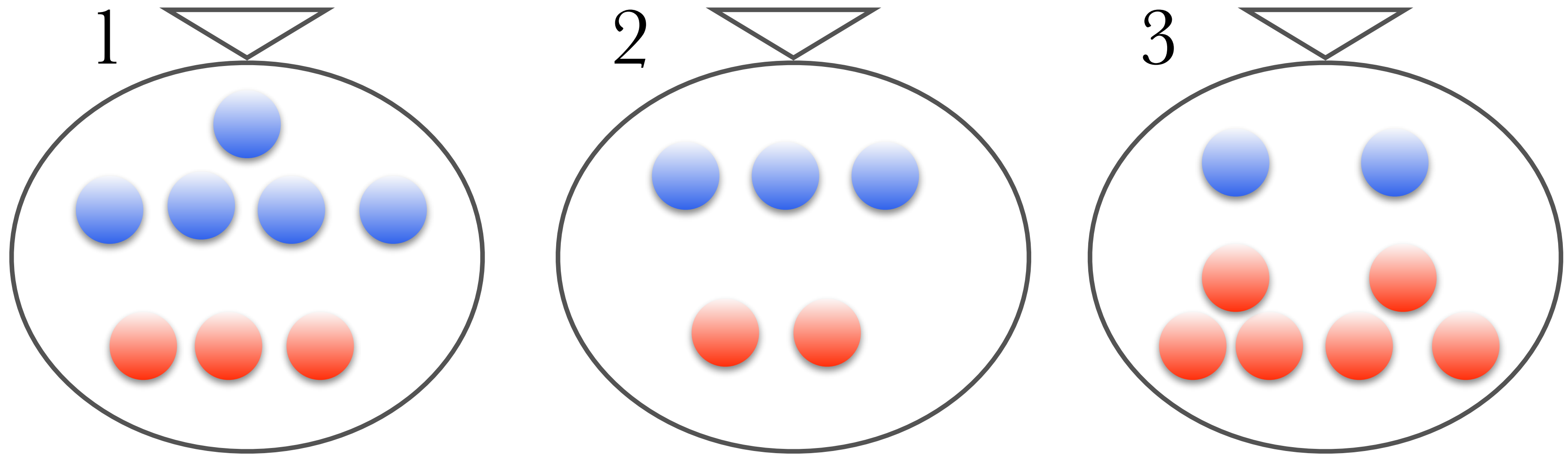
Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?

Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

$R =$ piger une bille rouge

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



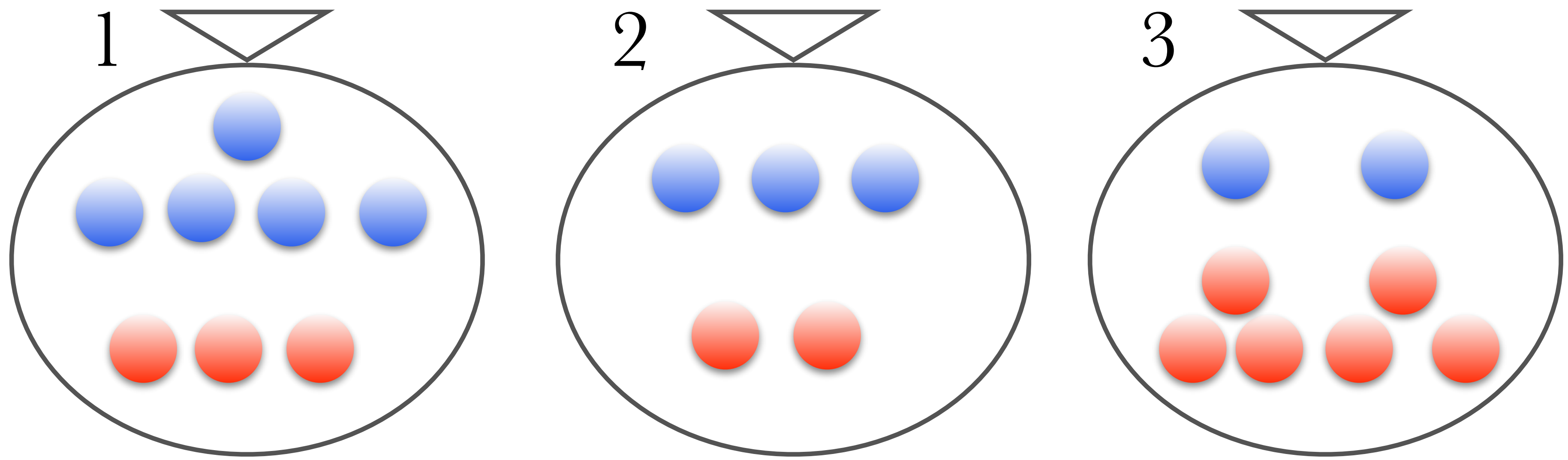
Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?

Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

$R =$ piger une bille rouge $\qquad S_i =$ piger le sac i

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?

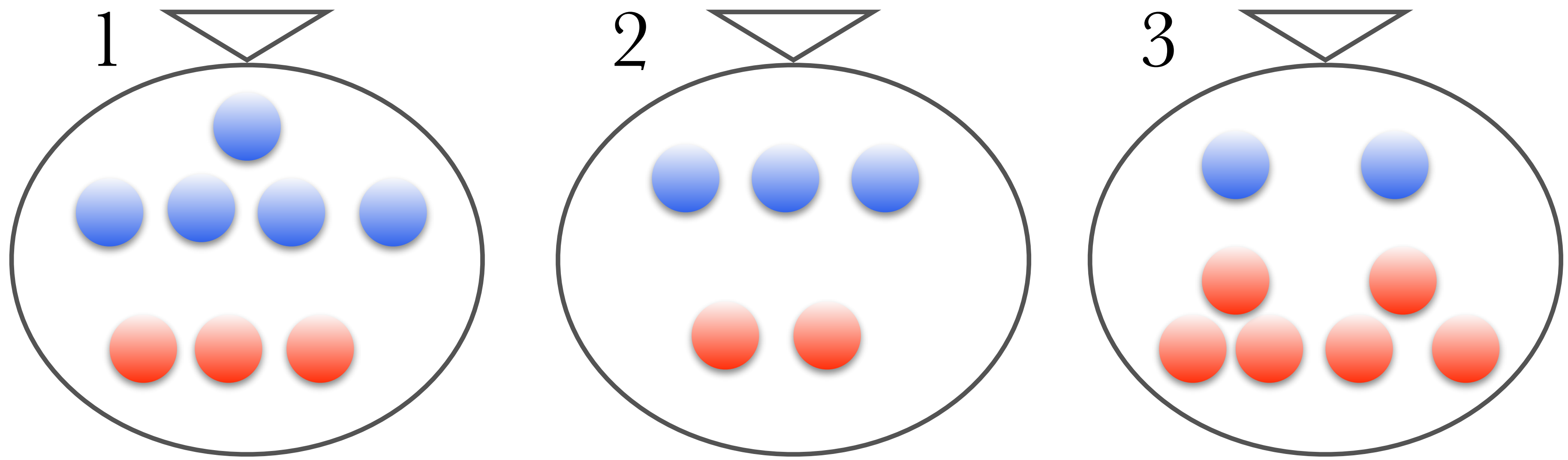
Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

$R =$ piger une bille rouge $\qquad S_i =$ piger le sac i

$$P(R) = P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)$$

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?

Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

$R =$ piger une bille rouge $\qquad S_i =$ piger le sac i

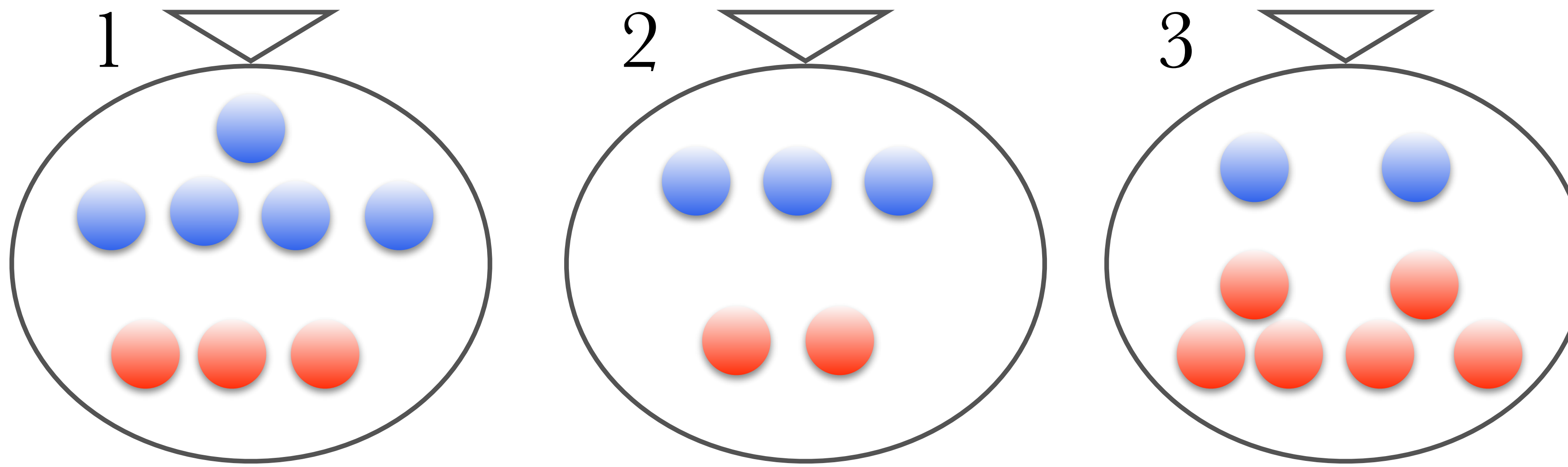
$$P(R) = P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.

Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?



Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

$R =$ piger une bille rouge $\qquad S_i =$ piger le sac i

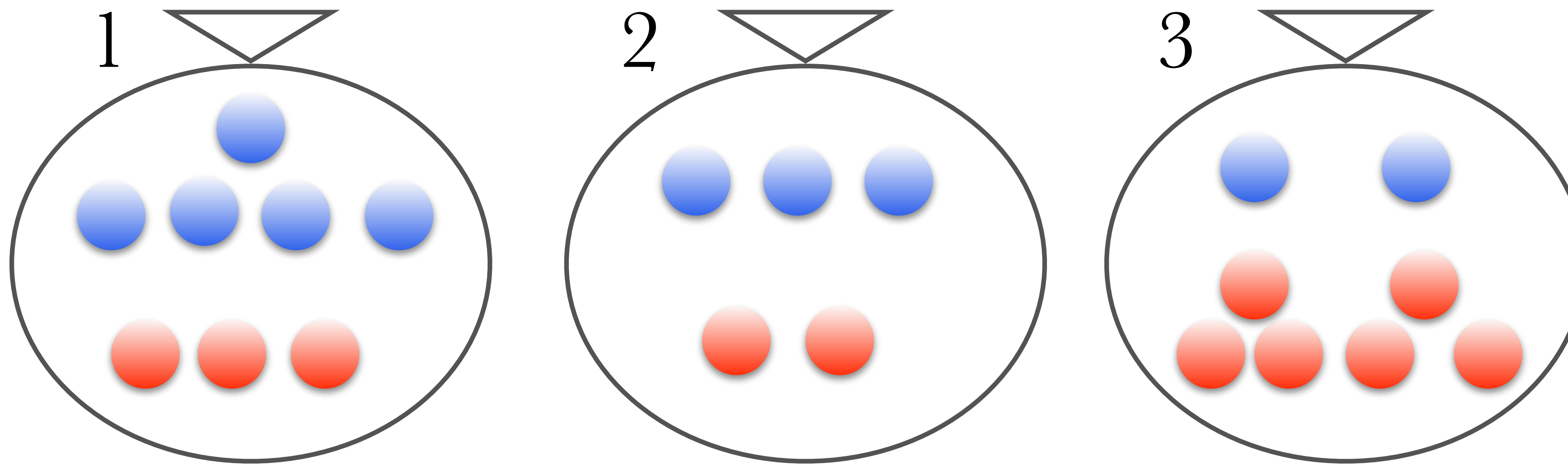
$$P(R) = P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{15} + \frac{6}{24}$$

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?

Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

$R =$ piger une bille rouge $\qquad S_i =$ piger le sac i

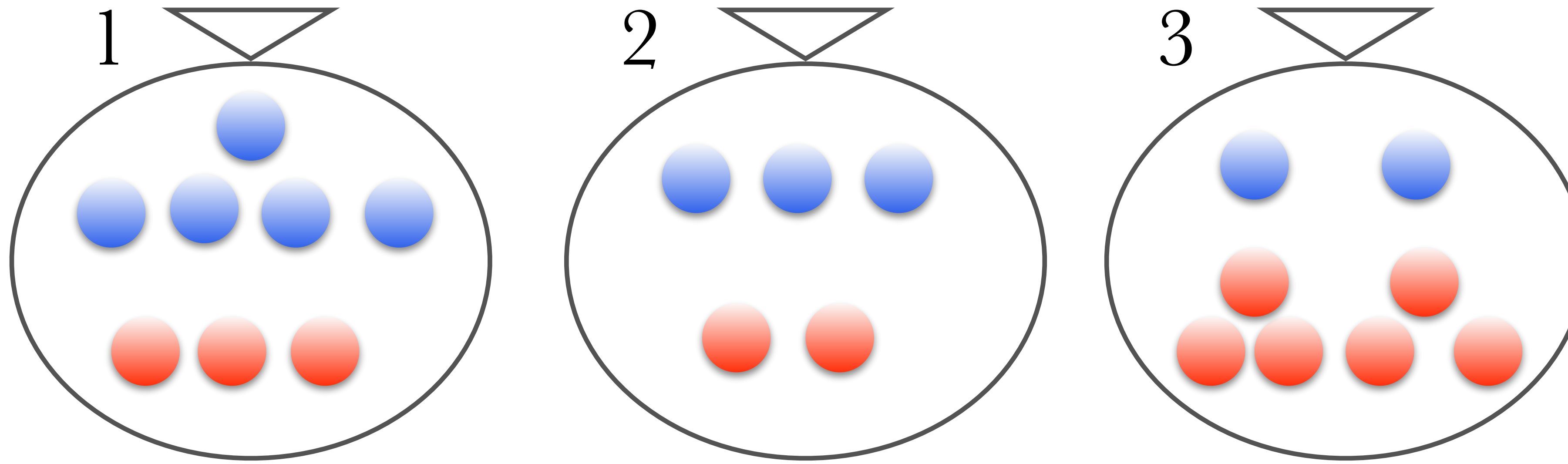
$$P(R) = P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{15} + \frac{6}{24} = \frac{15 + 16 + 30}{120}$$

Exemple

On a trois sacs contenant un nombre de billes rouges et bleues. On pige un sac au hasard et ensuite on pige une bille.



Quelle est la probabilité de piger une bille rouge?

Avec la formule des probabilités totales, on peut conditionner selon le sac qu'on pige.

$R =$ piger une bille rouge $\qquad S_i =$ piger le sac i

$$P(R) = P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{15} + \frac{6}{24} = \frac{15+16+30}{120} = \frac{61}{120}$$

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Exemple

Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Quelle est la probabilité qu'un transistor soit défectueux?

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Quelle est la probabilité qu'un transistor soit défectueux?

$$P(D) = P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) + P(D|U_4)P(U_4)$$

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Quelle est la probabilité qu'un transistor soit défectueux?

$$P(D) = P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) + P(D|U_4)P(U_4)$$

$$= (0,3)(0,1) + (0,2)(0,15) + (0,4)(0,3) + (0,1)(0,4)$$

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Quelle est la probabilité qu'un transistor soit défectueux?

$$P(D) = P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) + P(D|U_4)P(U_4)$$

$$= (0,3)(0,1) + (0,2)(0,15) + (0,4)(0,3) + (0,1)(0,4)$$

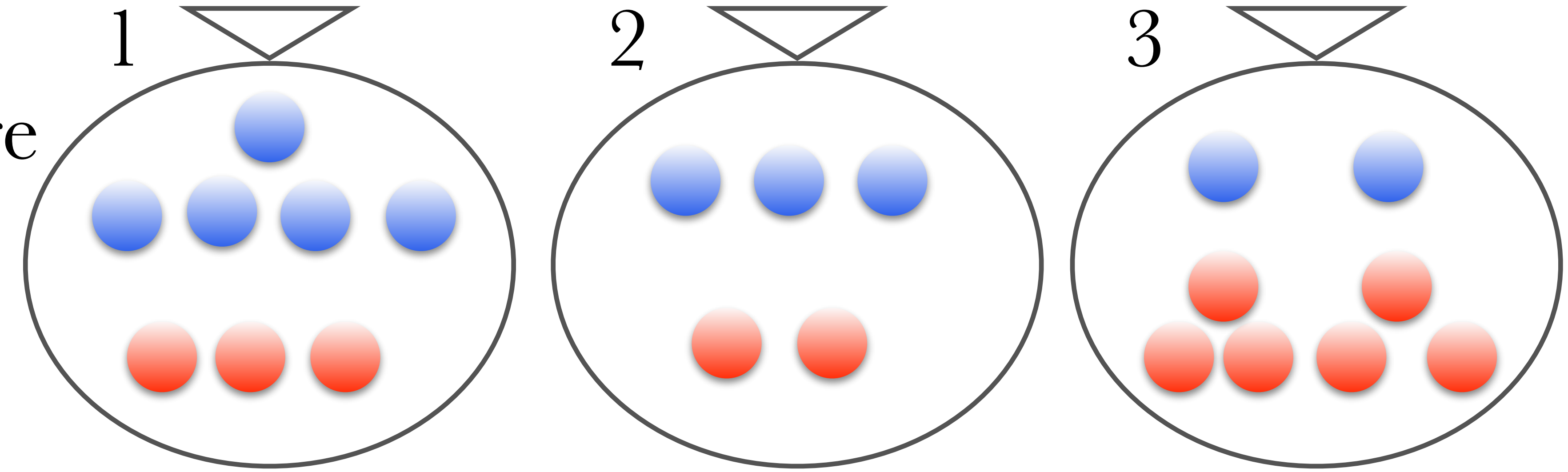
$$= 0,22$$

Faites les exercices suivants

#2.31 et 2.32

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?

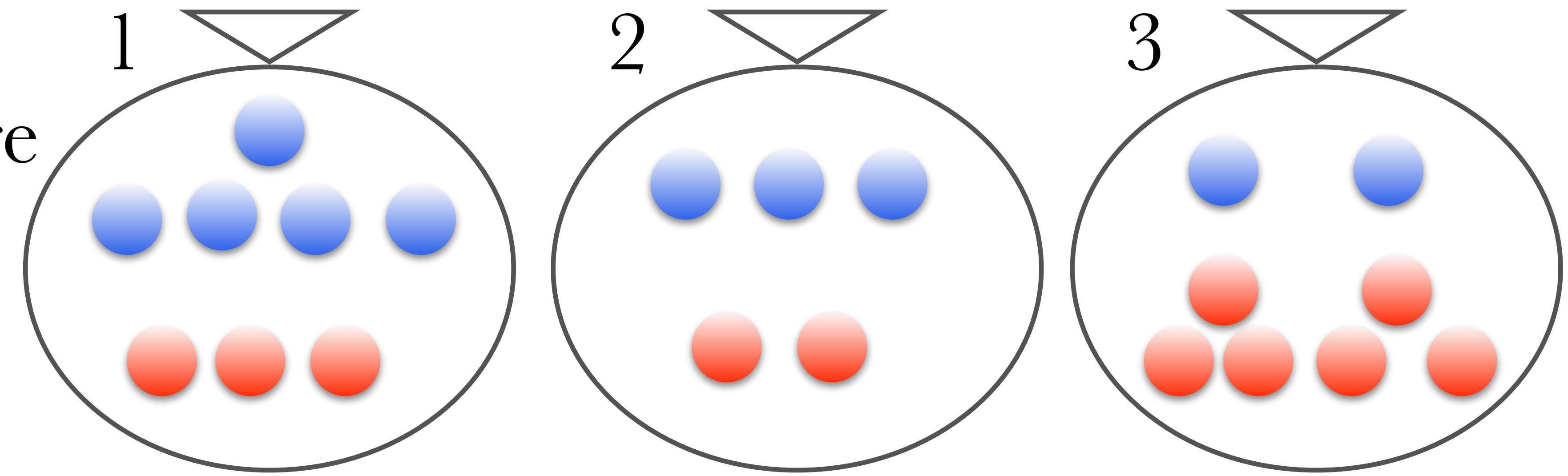


R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?



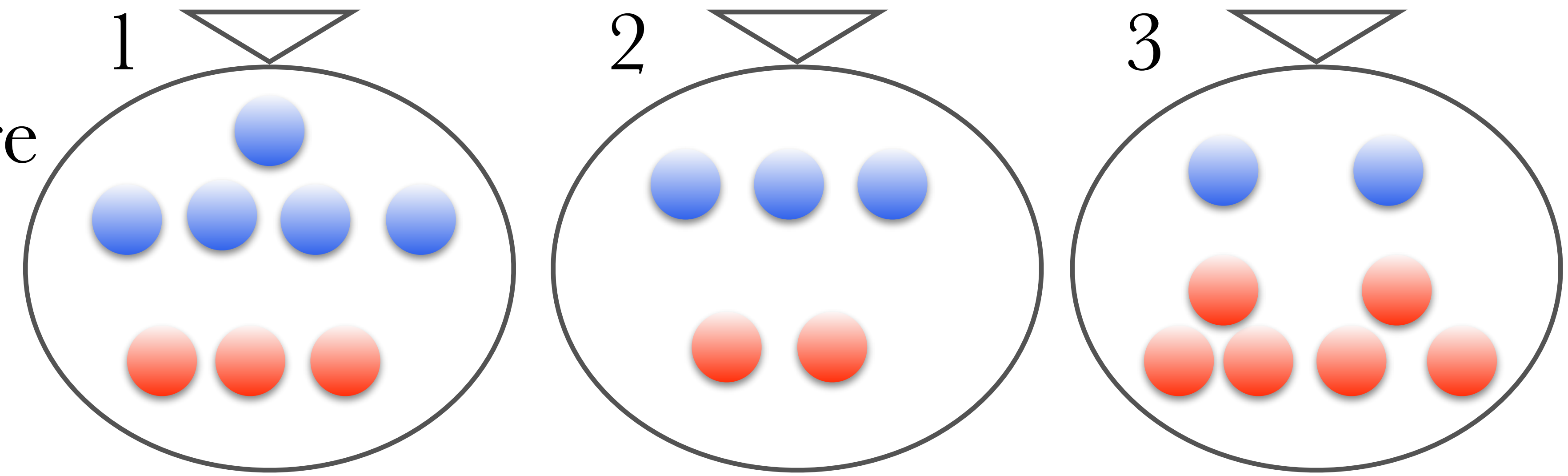
R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i

$$P(S_1|R)$$

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?



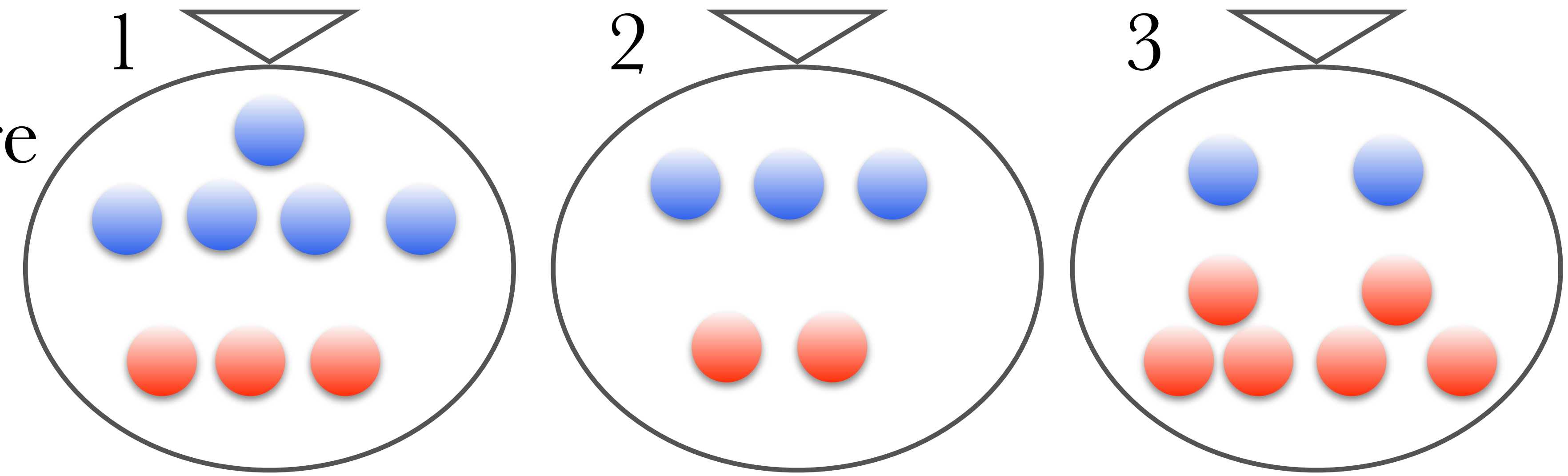
R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i

$$P(S_1|R) = \frac{P(S_1 \cap R)}{P(R)}$$

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?



R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i

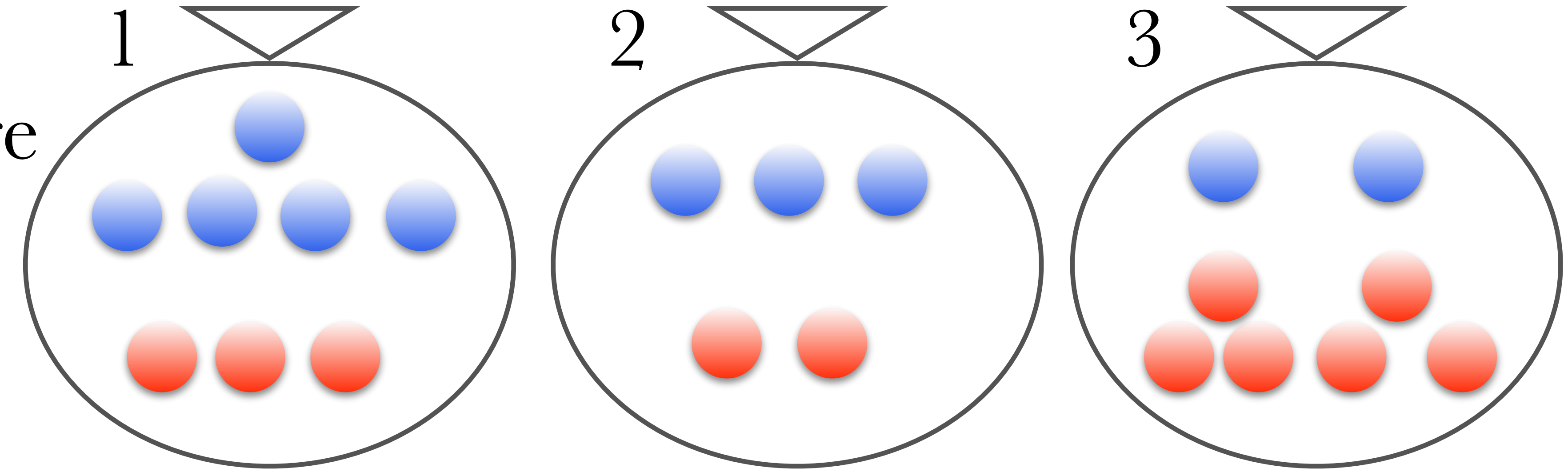
$$P(S_1|R) = \frac{P(S_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R)}$$

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?

R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i

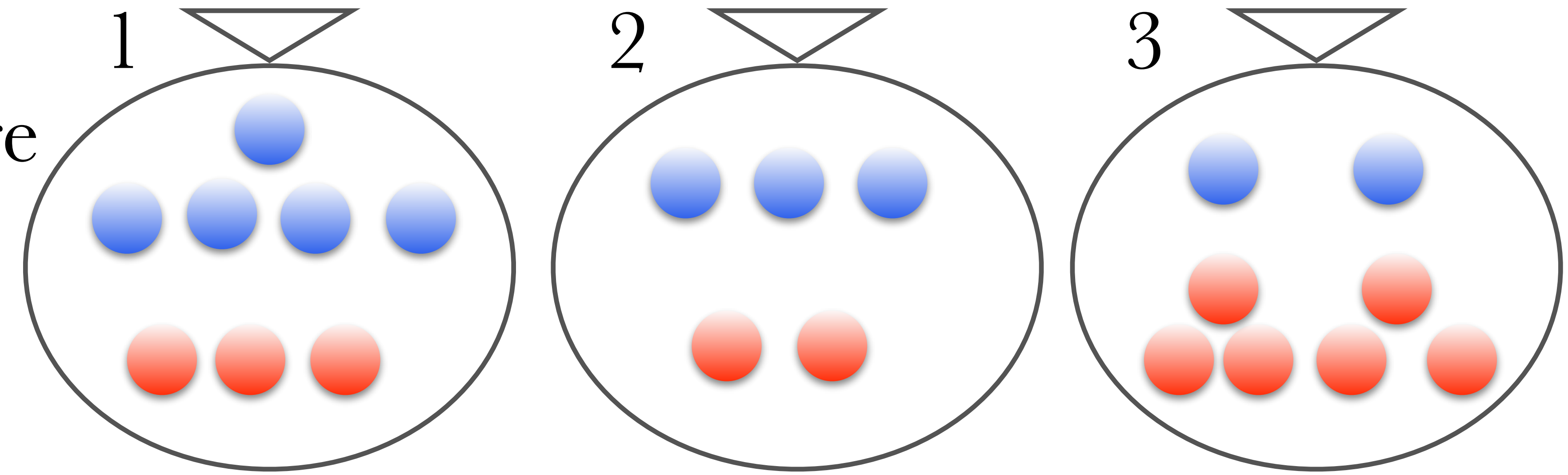


$$P(S_1|R) = \frac{P(S_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R)}$$

$$= \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)}$$

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?



R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i

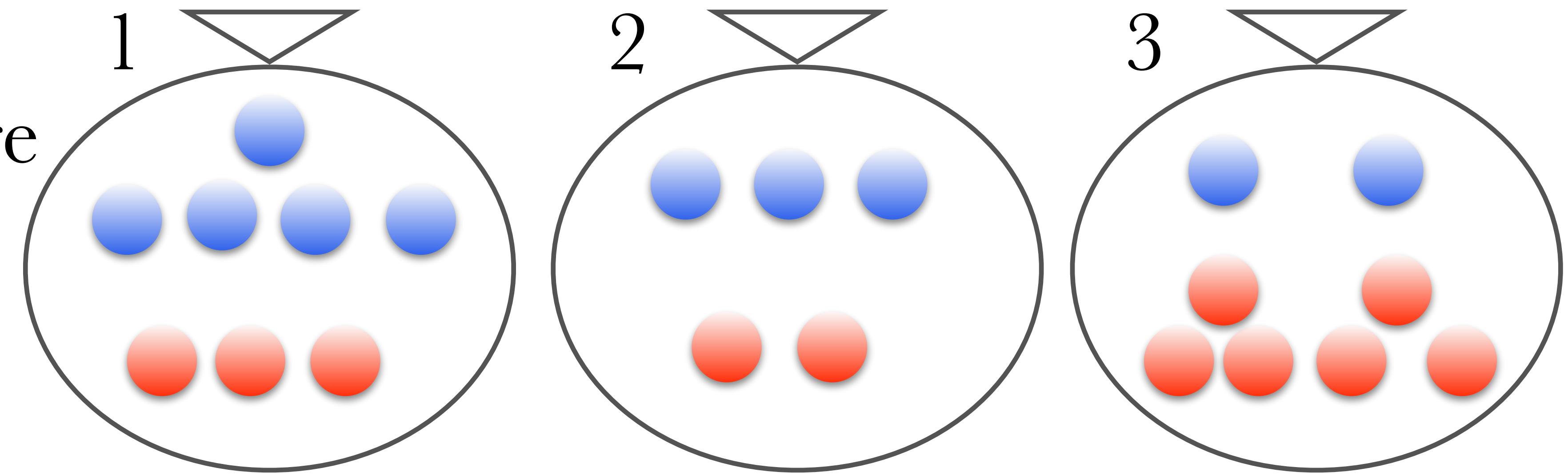
$$P(S_1|R) = \frac{P(S_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R)}$$

$$= \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)}$$

$$= \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{\frac{61}{120}}$$

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?



R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i

$$P(S_1|R) = \frac{P(S_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R)}$$

$$= \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)}$$

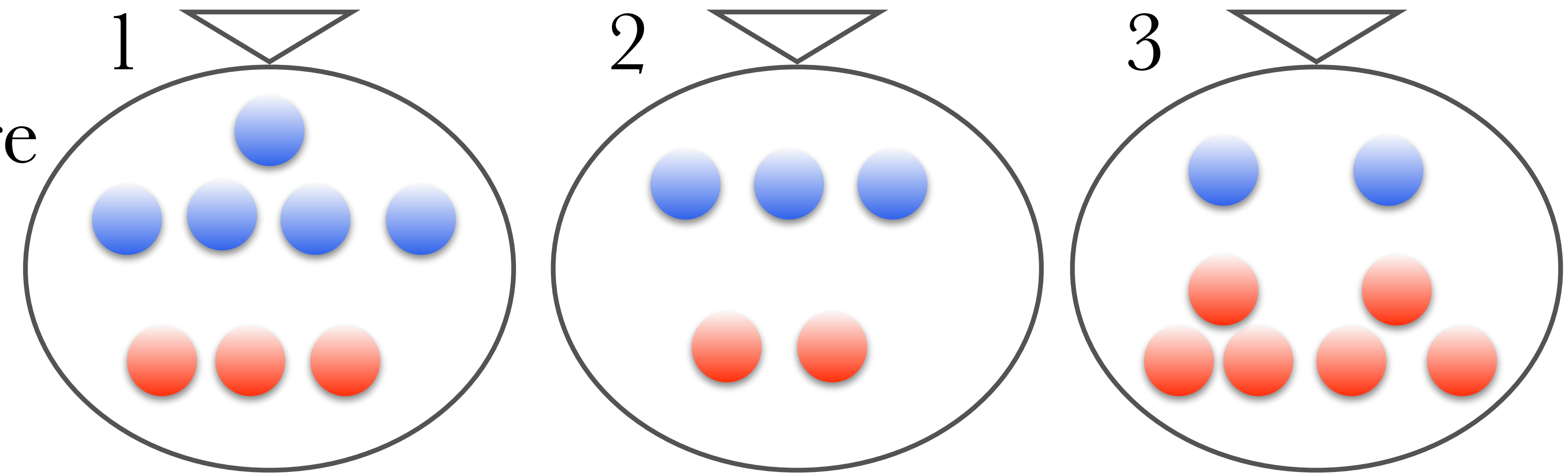
$$= \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{\frac{61}{120}} = \frac{120}{8 \times 61}$$

Exemple

Reprenons notre expérience de billes. On pige une bille rouge, qu'elle est la probabilité que nous eussions pigé le sac 1?

R = piger une bille rouge

S_i = piger le sac i



$$P(S_1|R) = \frac{P(S_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R)}$$

$$= \frac{P(R|S_1)P(S_1)}{P(R|S_1)P(S_1) + P(R|S_2)P(S_2) + P(R|S_3)P(S_3)}$$

$$= \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{\frac{61}{120}} = \frac{120}{8 \times 61} = \frac{15}{61}$$

Formule de Bayes

L'exemple précédant est un exemple de ce qu'on appelle la formule de Bayes

Formule de Bayes

L'exemple précédant est un exemple de ce qu'on appelle la formule de Bayes

Si on a une partition

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

Formule de Bayes

L'exemple précédant est un exemple de ce qu'on appelle la formule de Bayes

Si on a une partition

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad\qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

Formule de Bayes

L'exemple précédant est un exemple de ce qu'on appelle la formule de Bayes

Si on a une partition

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

La formule des probabilités totales.

Formule de Bayes

L'exemple précédant est un exemple de ce qu'on appelle la formule de Bayes

Si on a une partition

$$P_1, P_2, \dots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad\qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

La formule des probabilités totales.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

Formule de Bayes

L'exemple précédant est un exemple de ce qu'on appelle la formule de Bayes

Si on a une partition

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad\qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

La formule des probabilités totales.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

$$P(P_i|B)$$

Formule de Bayes

L'exemple précédant est un exemple de ce qu'on appelle la formule de Bayes

Si on a une partition

$$P_1, P_2, \ldots P_n \subset S$$

$$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n = S \qquad\qquad P_i \cap P_j = \emptyset$$

La formule des probabilités totales.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

$$P(P_i|B) = \frac{P(P_i \cap B)}{P(B)}$$

Formule de Bayes

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

$$P(P_i|B) = \frac{P(P_i \cap B)}{P(B)}$$

Formule de Bayes

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

$$P(P_i|B) = \frac{P(P_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|P_i)P(P_i)}{P(B)}$$

Formule de Bayes

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)$$

$$P(P_i|B) = \frac{P(P_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|P_i)P(P_i)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|P_i)P(P_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|P_i)P(P_i)}$$

Formule de Bayes

$$P(B) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} P(B|P_i)P(P_i)}$$

$$P(P_i|B) = \frac{P(P_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|P_i)P(P_i)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|P_i)P(P_i)}{\boxed{\sum_{i=1}^{k} P(B|P_i)P(P_i)}}$$

Formule de Bayes

$$P(P_i|B) = \frac{P(B|P_i)P(P_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(B|P_i)P(P_i)}$$

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Si on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine 2?

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Si on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine 2?

$$P(U_2|D) = \frac{P(D|U_2)P(U_2)}{P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) + P(D|U_4)P(U_4)}$$

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Si on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine 2?

$$P(U_2|D) = \frac{P(D|U_2)P(U_2)}{P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) + P(D|U_4)P(U_4)}$$

$$= \frac{(0,2)(0,15)}{(0,3)(0,1) + (0,2)(0,15) + (0,4)(0,3) + (0,1)(0,4)}$$

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Si on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine 2?

$$P(U_2|D) = \frac{P(D|U_2)P(U_2)}{P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) + P(D|U_4)P(U_4)}$$

$$= \frac{(0,2)(0,15)}{(0,3)(0,1) + (0,2)(0,15) + (0,4)(0,3) + (0,1)(0,4)}$$

$$= \frac{0,03}{0,22}$$

Exemple Une compagnie fabrique des transistors dans quatre usines qui produisent respectivement, 10%, 15%, 35% et 40% des pièces.

Chaque usine n'a pas les mêmes standards et il s'en suit que la fréquence des pièces défectueuse par usine est respectivement 0.3, 0.2, 0,4 et 0.1.

Si on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine 2?

$$P(U_2|D) = \frac{P(D|U_2)P(U_2)}{P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) + P(D|U_4)P(U_4)}$$

$$= \frac{(0,2)(0,15)}{(0,3)(0,1) + (0,2)(0,15) + (0,4)(0,3) + (0,1)(0,4)}$$

$$= \frac{0,03}{0,22} \approx 0,14$$

Exemple Une clinique offre un test de dépistage d'une maladie. Ils assurent une fiabilité de 95% de détection si la maladie est présente. Cependant, le test donne dans 1% des cas un faux positif. Cette maladie est présente que chez 0,5% de la population. Quelle est la probabilité de réellement avoir la maladie si on obtient un test positif?

Exemple Une clinique offre un test de dépistage d'une maladie. Ils assurent une fiabilité de 95% de détection si la maladie est présente. Cependant, le test donne dans 1% des cas un faux positif. Cette maladie est présente que chez 0,5% de la population. Quelle est la probabilité de réellement avoir la maladie si on obtient un test positif?

M Avoir la maladie

Exemple Une clinique offre un test de dépistage d'une maladie. Ils assurent une fiabilité de 95% de détection si la maladie est présente. Cependant, le test donne dans 1% des cas un faux positif. Cette maladie est présente que chez 0,5% de la population. Quelle est la probabilité de réellement avoir la maladie si on obtient un test positif?

M Avoir la maladie $\qquad$ T Le test est positif

Exemple Une clinique offre un test de dépistage d'une maladie. Ils assurent une fiabilité de 95% de détection si la maladie est présente. Cependant, le test donne dans 1% des cas un faux positif. Cette maladie est présente que chez 0,5% de la population. Quelle est la probabilité de réellement avoir la maladie si on obtient un test positif?

M Avoir la maladie

T Le test est positif

$$P(M|T)$$

Exemple Une clinique offre un test de dépistage d'une maladie. Ils assurent une fiabilité de 95% de détection si la maladie est présente. Cependant, le test donne dans 1% des cas un faux positif. Cette maladie est présente que chez 0,5% de la population. Quelle est la probabilité de réellement avoir la maladie si on obtient un test positif?

M Avoir la maladie $\qquad$ T Le test est positif

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})}$$

Exemple Une clinique offre un test de dépistage d'une maladie. Ils assurent une fiabilité de 95% de détection si la maladie est présente. Cependant, le test donne dans 1% des cas un faux positif. Cette maladie est présente que chez 0,5% de la population. Quelle est la probabilité de réellement avoir la maladie si on obtient un test positif?

M Avoir la maladie $\qquad$ T Le test est positif

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})}$$

$$= \frac{0,95 \times 0,005}{0,95 \times 0,005 + 0,01 \times 0,995}$$

Exemple Une clinique offre un test de dépistage d'une maladie. Ils assurent une fiabilité de 95% de détection si la maladie est présente. Cependant, le test donne dans 1% des cas un faux positif. Cette maladie est présente que chez 0,5% de la population. Quelle est la probabilité de réellement avoir la maladie si on obtient un test positif?

M Avoir la maladie $\qquad$ T Le test est positif

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})}$$

$$= \frac{0,95 \times 0,005}{0,95 \times 0,005 + 0,01 \times 0,995}$$

$$\approx 0,3231$$

Exemple (Problème de Monty Hall)

Lors d'un jeu, on présente trois boîtes au participant, dont une ayant un prix, et on lui demande d'en choisir une.

On lui propose soit de changer ou garder la même boîte.

Est-ce que ça change quelque chose?

P_i Le prix est dans la boîte i

C_3 Le participant choisi la boîte 3

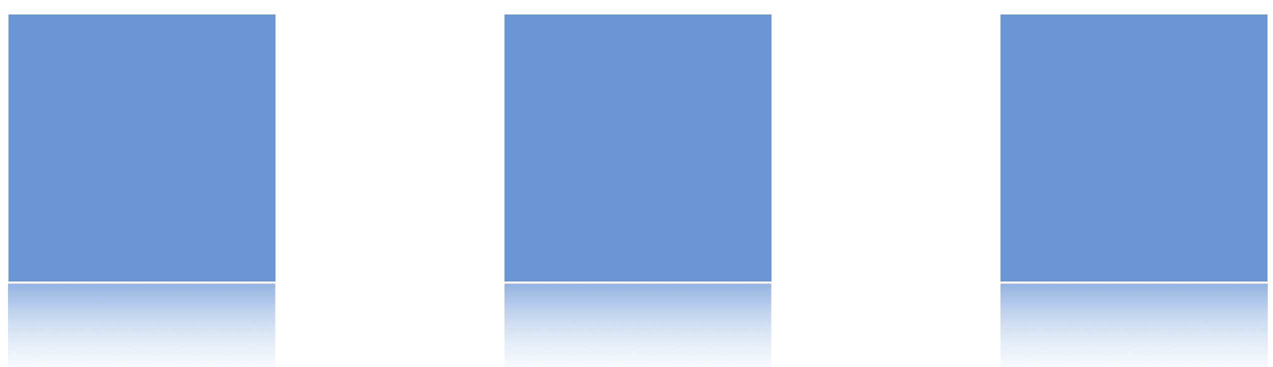
E_1 On enlève la boîte 1

Exemple (Problème de Monty Hall)

Lors d'un jeu, on présente trois boîtes au participant, dont une ayant un prix, et on lui demande d'en choisir une.

On lui propose soit de changer ou garder la même boîte.

Est-ce que ça change quelque chose?



P_i Le prix est dans la boîte i

C_3 Le participant choisi la boîte 3

E_1 On enlève la boîte 1

Exemple (Problème de Monty Hall)

Lors d'un jeu, on présente trois boîtes au participant, dont une ayant un prix, et on lui demande d'en choisir une.

On lui propose soit de changer ou garder la même boîte.

Est-ce que ça change quelque chose?

P_i Le prix est dans la boîte i

C_3 Le participant choisi la boîte 3

E_1 On enlève la boîte 1

Exemple (Problème de Monty Hall)

Lors d'un jeu, on présente trois boîtes au participant, dont une ayant un prix, et on lui demande d'en choisir une.

Après son choix, on enlève une des deux boîtes n'ayant pas le prix.

On lui propose soit de changer ou garder la même boîte.

Est-ce que ça change quelque chose?

P_i Le prix est dans la boîte i

C_3 Le participant choisi la boîte 3

E_1 On enlève la boîte 1

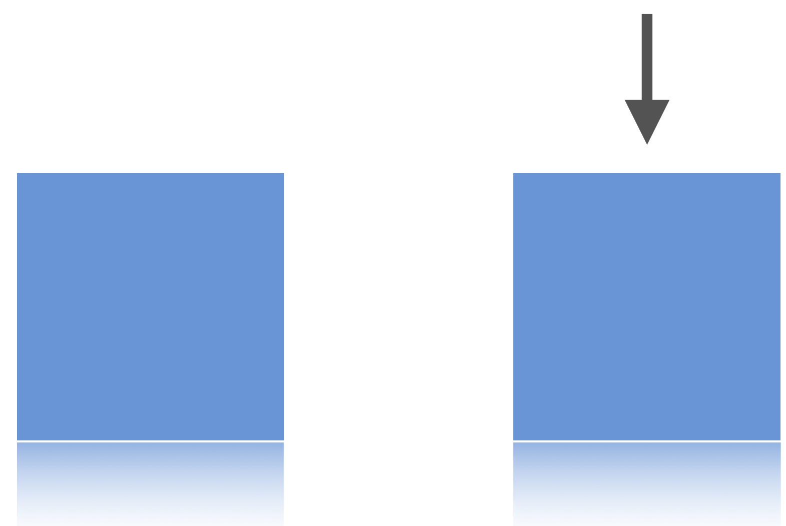
Exemple (Problème de Monty Hall)

Lors d'un jeu, on présente trois boîtes au participant, dont une ayant un prix, et on lui demande d'en choisir une.

Après son choix, on enlève une des deux boîtes n'ayant pas le prix.

On lui propose soit de changer ou garder la même boîte.

Est-ce que ça change quelque chose?



P_i Le prix est dans la boîte i

C_3 Le participant choisi la boîte 3

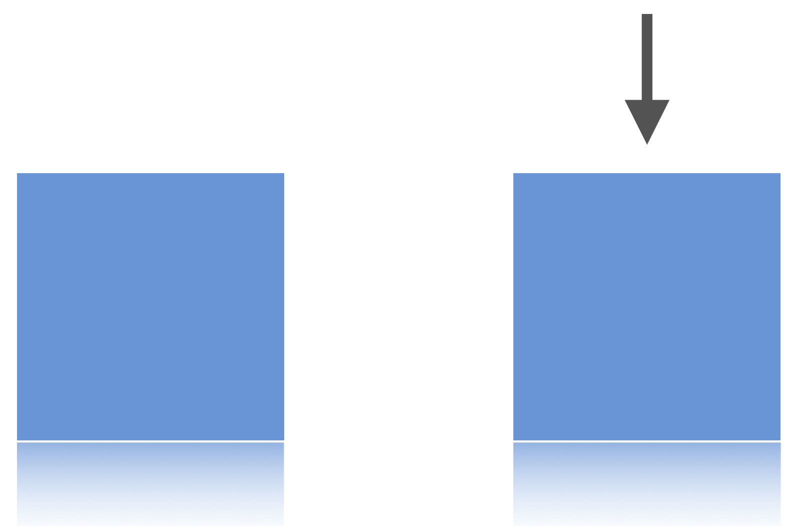
E_1 On enlève la boîte 1

Exemple (Problème de Monty Hall)

Lors d'un jeu, on présente trois boîtes au participant, dont une ayant un prix, et on lui demande d'en choisir une.

Après son choix, on enlève une des deux boîtes n'ayant pas le prix.

Est-ce que ça change quelque chose?



P_i Le prix est dans la boîte i

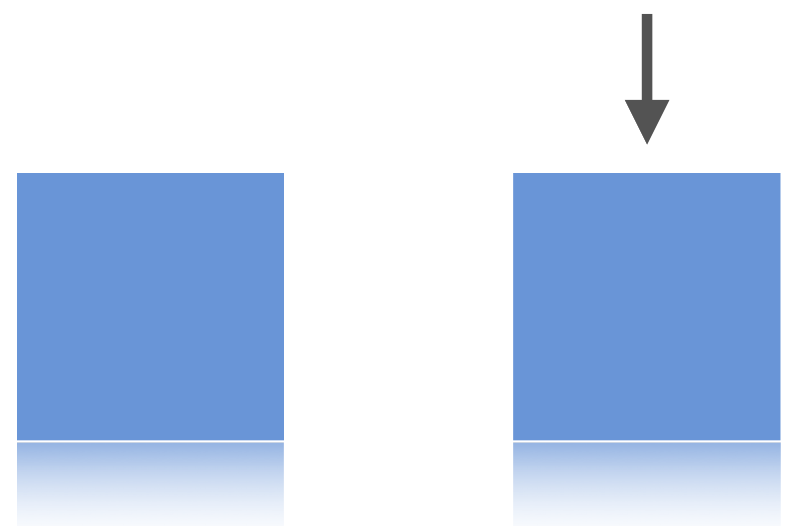
C_3 Le participant choisi la boîte 3

E_1 On enlève la boîte 1

Exemple (Problème de Monty Hall)

Lors d'un jeu, on présente trois boîtes au participant, dont une ayant un prix, et on lui demande d'en choisir une.

Après son choix, on enlève une des deux boîtes n'ayant pas le prix.



P_i Le prix est dans la boîte i

C_3 Le participant choisi la boîte 3

E_1 On enlève la boîte 1

Exemple (Problème de Monty Hall)

P_i Le prix est dans la boîte i

E_1 On enlève la boîte 1

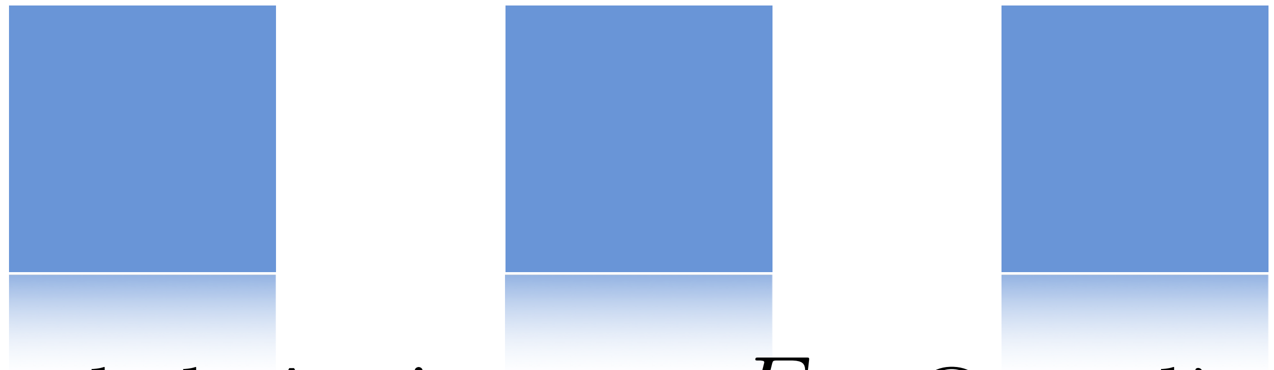
C_3 Le participant choisi la boîte 3

$$P(P_2|E_1)$$

$$= \frac{P(E_1|P_2)P(P_2)}{P(E_1|P_1)P(P_1) + P(E_1|P_2)P(P_2) + P(E_1|P_3)P(P_3)}$$

$$= \frac{1\left(\frac{1}{3}\right)}{0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Exemple (Problème de Monty Hall)



P_i Le prix est dans la boîte i

E_1 On enlève la boîte 1

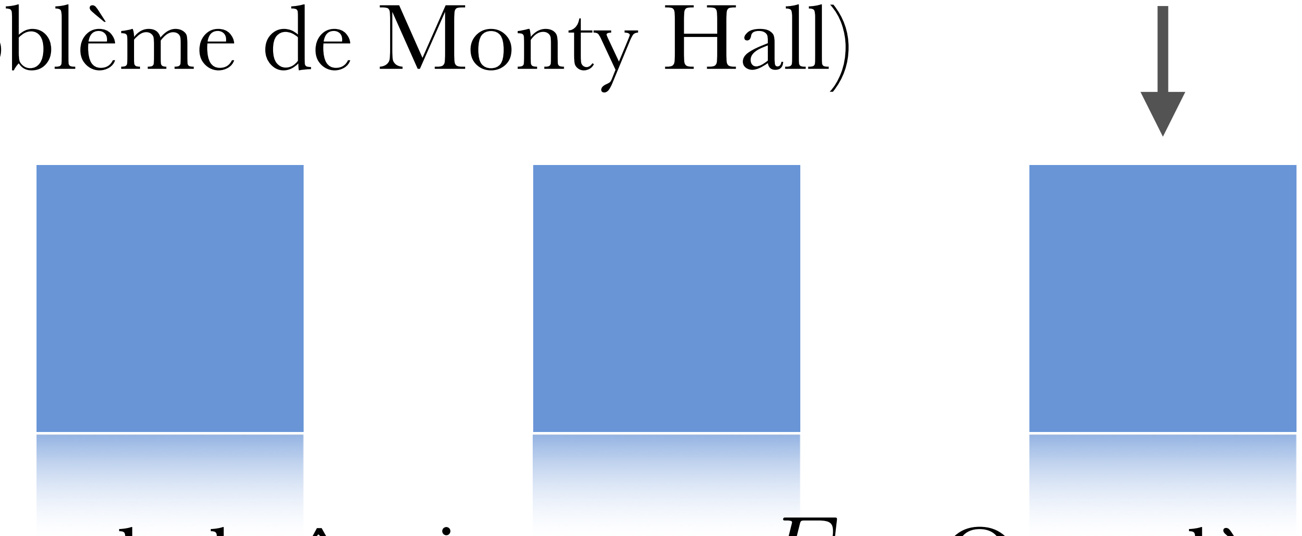
C_3 Le participant choisi la boîte 3

$$P(P_2|E_1)$$

$$= \frac{P(E_1|P_2)P(P_2)}{P(E_1|P_1)P(P_1) + P(E_1|P_2)P(P_2) + P(E_1|P_3)P(P_3)}$$

$$= \frac{1\left(\frac{1}{3}\right)}{0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Exemple (Problème de Monty Hall)



P_i Le prix est dans la boîte i

E_1 On enlève la boîte 1

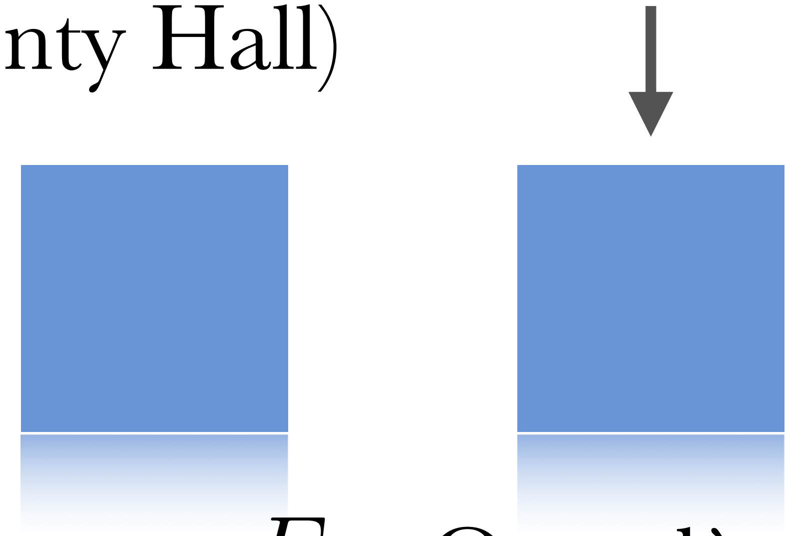
C_3 Le participant choisi la boîte 3

$$P(P_2|E_1)$$

$$= \frac{P(E_1|P_2)P(P_2)}{P(E_1|P_1)P(P_1) + P(E_1|P_2)P(P_2) + P(E_1|P_3)P(P_3)}$$

$$= \frac{1\left(\frac{1}{3}\right)}{0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Exemple (Problème de Monty Hall)



P_i Le prix est dans la boîte i

E_1 On enlève la boîte 1

C_3 Le participant choisi la boîte 3

$$P(P_2|E_1)$$

$$= \frac{P(E_1|P_2)P(P_2)}{P(E_1|P_1)P(P_1) + P(E_1|P_2)P(P_2) + P(E_1|P_3)P(P_3)}$$

$$= \frac{1\left(\frac{1}{3}\right)}{0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Faites les exercices suivants

#2.33 à 2.36

Devoir: Section 2.3