3.1 VARIABLE ALÉATOIRE

cours 11

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Variables aléatoires
- ✓ Fonctions de répartitions

Lors d’une expérience aléatoire, il arrive souvent qu’on s’intéresse plus à une fonction du résultat qu’au résultat lui-même.

Par exemple si on lance un dé à trois reprises, on pourrait être intéressé par

- La somme des trois dés.
- Le nombre de fois que le 4 sort.
- Le plus grand des trois.
- etc.

Définition Une **variable aléatoire** est une fonction

$$X : S \longmapsto \mathbb{R}$$

qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre.

On nomme l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire l'**ensemble de réalisation**.

$$\mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{R}$$

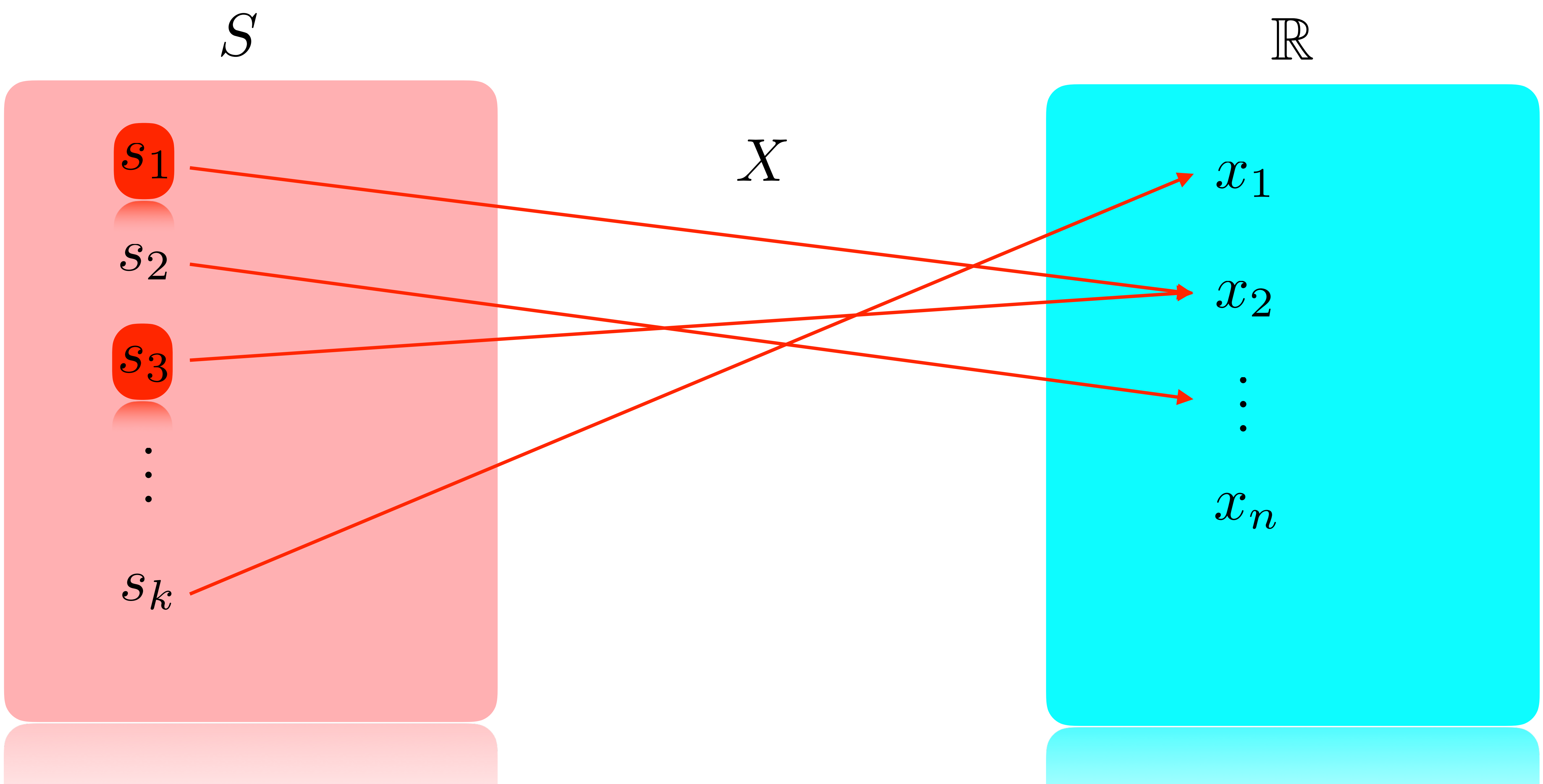
Lorsque l'ensemble de réalisation est fini ou dénombrable, on dit que la **variable aléatoire** est **discrète**.

Lorsque l'ensemble de réalisation est non dénombrable, on dit que la **variable aléatoire** est **continue**.

Prenons une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est fini

$$X : S \longmapsto \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$$

$$X = x_2 \qquad X^{-1}(x_2) \subset S$$ la préimage de x_2



Donc à une réalisation x_i on y peut associer

$$X = x_i \qquad\qquad X^{-1}(x_i) \subset S$$

donc $X^{-1}(x_i)$ est un évènement A_i

Et on peut calculer sa probabilité

$$P(A_i) = P(X = x_i)$$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "X"] & \mathbb{R} \arrow[dl, "X^{-1}"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{P}(S) \arrow[r, "P"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

Définition Soit X une variable aléatoire discrète

on définit sa **fonction de probabilités**

$$R = \mathrm{Im}(X) \xrightarrow{f} [0,1]$$

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

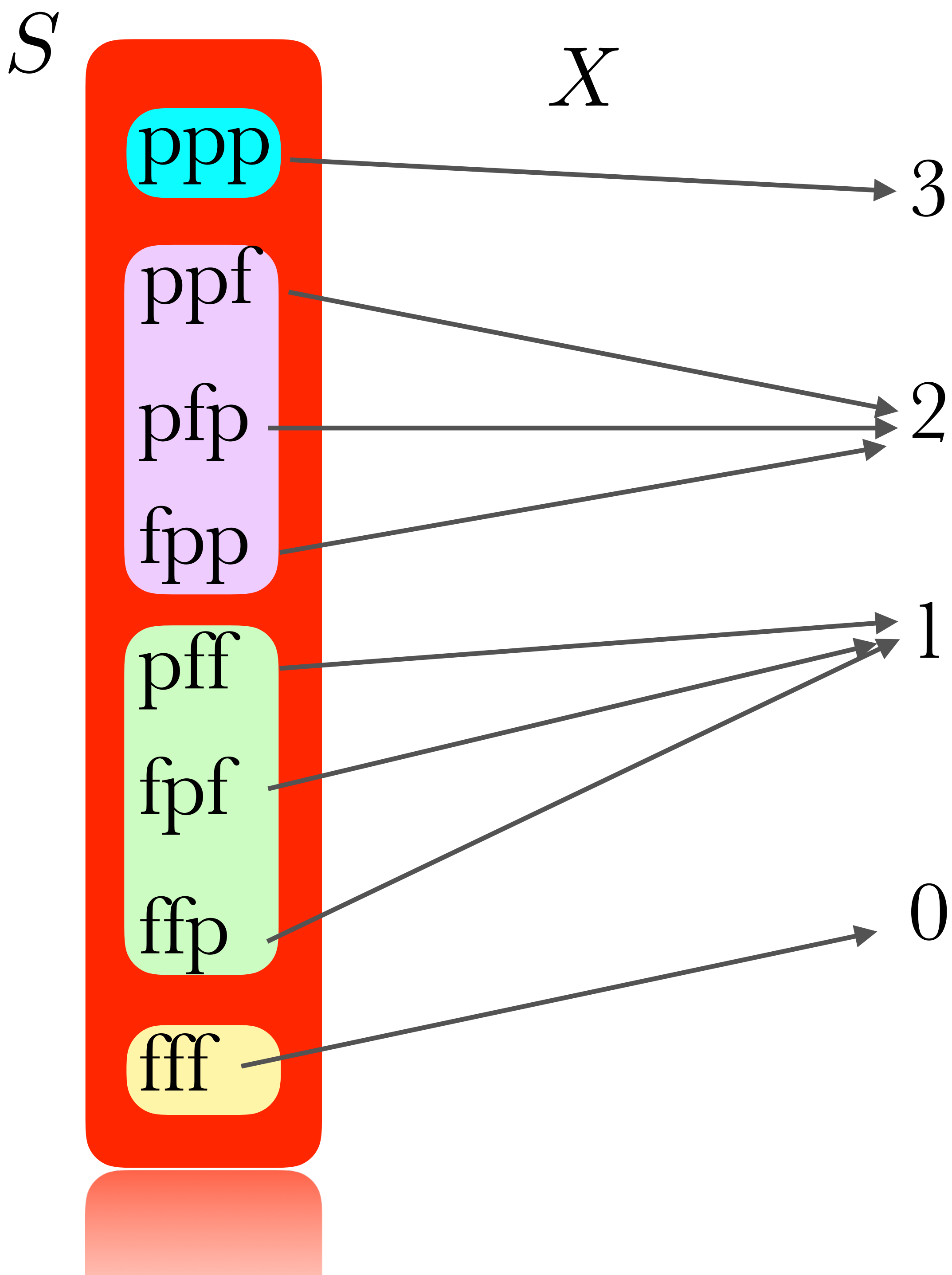
on nomme aussi cette fonction la **loi de probabilités** ou **distribution de probabilités** de la variable aléatoire X

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$



$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

x_i	$f(x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

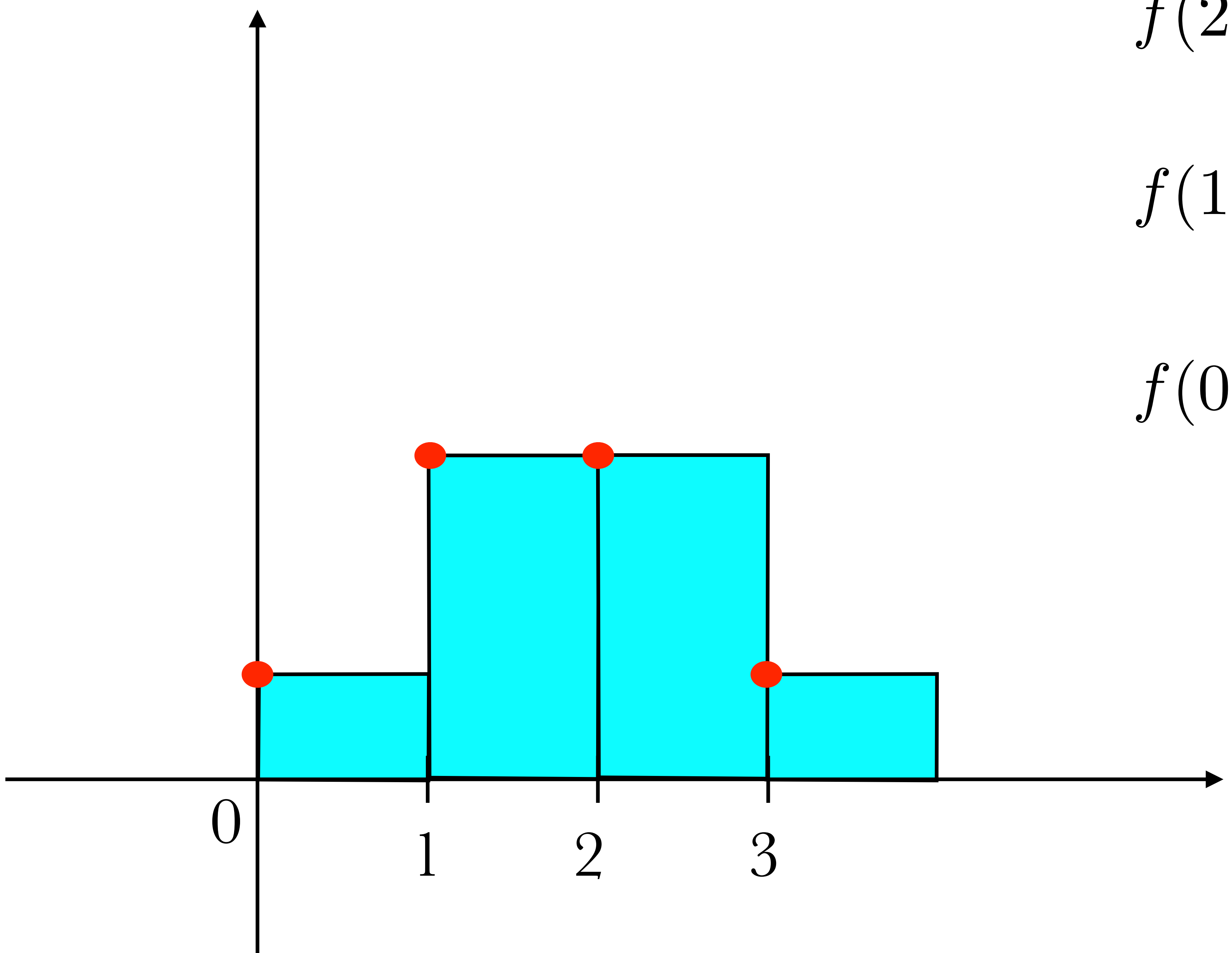
L'ensemble de réalisation de X est $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$



Faites les exercices suivants

3.1 et 3.2

Remarque:

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de réalisation est

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

puisque X est une fonction,

les évènements

$$X = x_i \qquad\qquad X = x_j$$

forment une partition de S

on doit nécessairement avoir

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = 1$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

X : le nombre de lancé avant d'arrêter

$$P(F) = 1 - P(P)$$
$$= 1 - p$$

L'ensemble de réalisation est $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P(X = 1) = P(\{P\}) = p$$

$$P(X = 2) = P(\{F, P\}) = (1 - p)p$$

$$P(X = 3) = P(\{F, F, P\}) = (1 - p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P(X = n - 1) = P(\{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-2}, P\}) = (1 - p)^{n-2} p$$

$$P(X = n) = P(\{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-1}, P\} \cup \{\underbrace{F, \ldots, F}_{n-1}, F\}) = (1 - p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P\left(X = x_i\right) + P(X = x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} p + (1-p)^{n-1}$$

$$= p \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, mais au plus n fois. La probabilité d'obtenir pile est p.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}\right) = p\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}$$

$$= p\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{\boxed{1-(1-p)}}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= \cancel{p}\left(\frac{1-(1-p)^{n-1}}{\boxed{\cancel{p}}}\right) + (1-p)^{n-1}$$

$$= 1 - \cancel{(1-p)^{n-1}} + \cancel{(1-p)^{n-1}}$$

$$= 1$$

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X est

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_i)$$

Remarque: Voici quelques propriétés des fonctions de répartitions

$F(x)$ est non décroissante

c'est-à-dire $a < b \implies F(a) \leq F(b)$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Exemple

On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

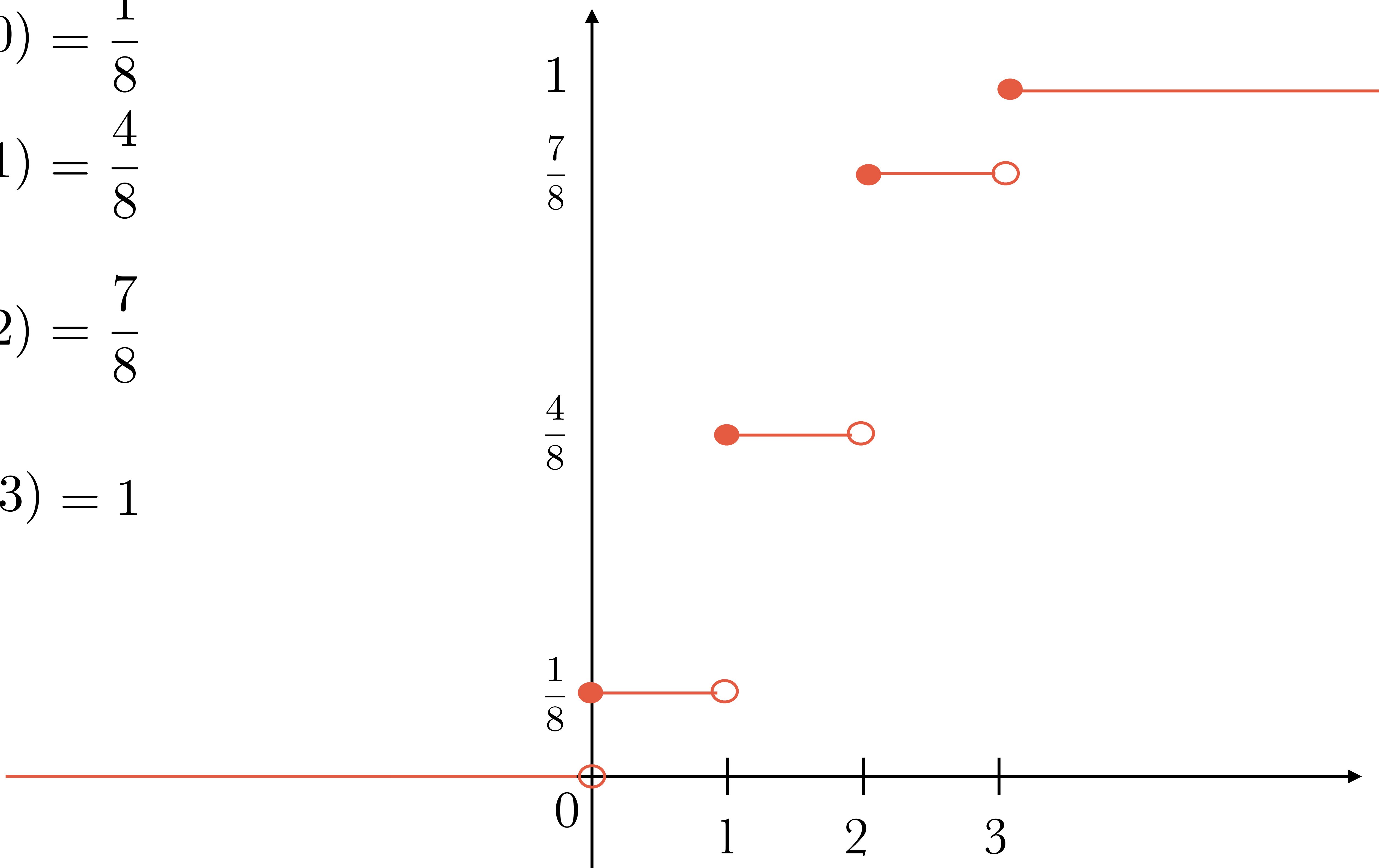
X : le nombre de piles obtenues

$$F(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = 1$$



$$P(a < X \leq b)$$

$$P(X \leq b) = P(\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\})$$

$$= P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

Faites les exercices suivants

#3.3 à 3.7

Parois, il arrive qu'on veuille regarder une variable aléatoire obtenue d'une autre.

$$S \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$Y = g \circ X$$

si par exemple $\quad g(x) = ax + b$

$$Y = g(X) = aX + b$$

Exemple On lance une pièce de monnaie trois fois. On reçoit 1$ pour jouer et 2$ par pile sortie.

X : le nombre de piles obtenues

La variable aléatoire

Y : le montant obtenu

$$Y = 2X + 1$$

$$P(Y = 5) = P(2X + 1 = 5)$$

$$= P(2X = 4) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Variable aléatoire discrète
- ✓ Variable aléatoire continue
- ✓ Loi de probabilité
- ✓ Fonction de répartition

Devoir: Section 3.1