

3.4 LOIS DISCRÈTE 2

cours 15

Au dernier cours, nous avons vu

Loi	$P(X = k)$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Binomiale $X \sim B(n; p)$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
Géométrique $X \sim G(p)$	$q^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomiale négative $X \sim BN(r, p)$	$\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Loi de Poisson
- ✓ Loi hypergéométrique

Loi de poisson

Une variable aléatoire pouvant prendre pour valeurs

0, 1, 2, 3, ...

avec paramètre λ

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p(k)$$

est dite loi de Poisson

$$X \sim P(\lambda)$$

On peut vérifier que cette loi est bien une loi de probabilité

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \end{aligned}$$

La série de Taylor de e^x

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Un des intérêts qu'on porte à la loi de Poisson est dû au fait que dans certaines situations elle permet d'obtenir une approximation de la loi binomiale.

$$\text{Soit } X \sim B(n, p)$$

tel que n est grand et p est petit

de telle sorte que np soit moyen.

$$\text{par exemple } n = 100 \quad p = \frac{1}{25} \quad np = 4$$

Considérons $X \sim B(n, p)$

avec les conditions précédentes et posons $np = \lambda \implies p = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Considérons $X \sim B(n, p)$

avec les conditions précédentes et posons $np = \lambda \implies p = \frac{\lambda}{n}$

$$P(X = k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = 1$$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \approx 1$$

Considérons $X \sim B(n, p)$

avec les conditions précédentes et posons $np = \lambda \implies p = \frac{\lambda}{n}$

$$P(X = k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \approx 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k = 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$$

Considérons $X \sim B(n, p)$

avec les conditions précédentes et posons $np = \lambda \implies p = \frac{\lambda}{n}$

$$P(X = k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \approx 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$$

$$X \sim P(\lambda)$$

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$t = k - 1$$

$$k = 1 \implies t = 0$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$X \sim P(\lambda) \quad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \lambda^2$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1 + 1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] \end{aligned}$$

$$X \sim P(\lambda) \quad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \lambda^2$$

$$E(X^2) = \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + e^{\lambda} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + e^{\lambda} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda} \right]$$

$$X \sim P(\lambda) \quad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \lambda^2$$

$$E(X^2) = \lambda e^{-\lambda} \left[\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda} \right] \quad t = k - 2$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\lambda \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} + e^{\lambda} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} [\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}] = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} [\lambda + 1]$$

$$= \lambda [\lambda + 1] = \lambda^2 + \lambda$$

$$X \sim P(\lambda) \quad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \lambda^2 \\ &= \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Voici quelques exemples de variable aléatoire qui suivent
une loi de Poisson

- Le nombre de coquilles par page d'un livre.
- Le nombre d'individus dépassant l'âge de 100 ans dans une ville.
- Le nombre de maisons vendu par un agent d'immeuble par jour.
- Le nombre de particules alpha émis par un élément radioactif par seconde
- Le nombre de postes devenu vacant dans une école par an.

Dans ces cas on utilise pour λ la valeur moyenne

Exemple

On a mesuré qu'une matière radioactive émet en moyenne 2,3 particules α par seconde par gramme. Quelle est la probabilité qu'au plus 3 particules α soient émises?

Ici le nombre d'atomes n par gramme est grand

et la probabilité qu'un atome se désintègre $p = \frac{2,3}{n}$ est petite.

$$\lambda = 2,3 \quad X \sim P(2,3) \quad f(k) = \frac{(2,3)^k}{k!} e^{-2,3}$$

$$P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= e^{-2,3} + (2,3)e^{-2,3} + \frac{(2,3)^2}{2}e^{-2,3} + \frac{(2,3)^3}{6}e^{-2,3}$$

$$\approx 0,7993$$

Faites les exercices suivants

25 à 32

Loi hypergéométrique

Considérons l'expérience aléatoire consistant à piger sans remise n boules d'une urne en contenant N .

Il y a deux types de boules. On nomme les pN d'un type succès et les qN autre échec

X : le nombre de boules succès pigé.

La loi d'une telle variable aléatoire est dite suivre une loi hypergéométrique

$$X \sim H(n, p, N)$$

$$X \sim H(n, p, N)$$

Le nombre de façons de piger n boules parmi N est $\binom{N}{n}$

le nombre de façons de piger k succès $\binom{pN}{k} \binom{qN}{n-k}$

donc

$$P(X = k) = \frac{\binom{pN}{k} \binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$X \sim H(n, p, N)$$

Ici nous ne démontrera pas comment on a obtenu
l'espérance et la variance

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq \frac{N - n}{N - 1}$$

Exemple

Un groupe de calcul différentiel est composé de 10 étudiants en science humaine et de 20 étudiants en science de la nature.

L'enseignant sélectionne au hasard 8 étudiants. Quelle est la probabilité d'avoir sélectionné 5 étudiants en science de la nature?

$$X \sim H \left(8, \frac{2}{3}, 30 \right)$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{20}{5} \binom{10}{3}}{\binom{30}{8}}$$

Faites les exercices suivants

3.33 et 3.34

Aujourd'hui, nous avons vu

Loi	$P(X = k)$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Loi de Poisson $X \sim P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Loi hypergéométrique $X \sim H(n, p, N)$	$\frac{\binom{pN}{k} \binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq \frac{N-n}{N-1}$

Devoir:

3.25 à 3.34