3.5 LOIS CONTINUES 1

cours 16

Au dernier cours, nous avons vu

Loi	$P(X=k)$	$E(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Loi de Poisson $X \sim P(\lambda)$	$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Loi hypergéométrique $X \sim H(n,p,N)$	$\dfrac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\dfrac{N-n}{N-1}$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Variable aléatoire continue
- ✓ Loi uniforme

Il arrive souvent qu'une variable aléatoire ait un ensemble de réalisation qui n'est pas dénombrable

Avec de telles variables aléatoires, on a très souvent

$$P(X = x_i) = 0$$

Auquel cas, on pourra difficilement travaillé avec la fonction

$$f(x) = P(X = x)$$

On va donc devoir trouver une généralisation adéquate de la fonction de probabilité

Dans de tels cas, il est plus pratique de travailler avec la fonction répartition.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Définition Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble de réalisation n'est pas dénombrable

On dira que X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction $f(x)$ telle que

$$f(x) \geq 0$$

$$\text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$$

Une telle fonction est dite **fonction de densité**.

Dans ce cas la fonction de répartition est donnée par

$$P(X \leq x) = F(X) \ = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

$$P(X \le b) = \boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx}$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx} + \boxed{\int_{a}^{b} f(x)\ dx}$$

$$P(a \le X \le b) = \boxed{\int_{a}^{b} f(x)\ dx} = \boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx} - \boxed{\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx}$$

$$= P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

Puisqu'on peut considérer

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)\ dx\ = 0$$

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b)\ &= P(a < X \le b) \\ &= P(a \le X < b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

Exemple Supposons que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que vaut C?

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \; dx = \int_{2}^{\infty} 0 \; dx = 0$$

$$1 = \int_{0}^{2} C(4x - x^2) \; dx \; = C \int_{0}^{2} (4x - x^2) \; dx$$

$$= C \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{0}^{2} = C \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3} C$$

$$\frac{16}{3} C = 1 \implies C = \frac{3}{16}$$

Exemple Supposons que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que vaut C? $\implies C = \dfrac{3}{16}$

$$P(X \leq 1) = \frac{3}{16} \int_0^1 (4x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{3}{16} \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3}{16} \left(2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{16}$$

Exemple La durée de vie en heures d'une diode est donnée par la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que 3 de nos 7 diodes soient à remplacer après 150 heures

$f(x)$ est bien une fonction de densité car

$$\int_{100}^{\infty} \frac{100}{x^2}\, dx = -\frac{100}{x}\Big|_{100}^{\infty} = -\frac{100}{\infty} + \frac{100}{100} = 1$$

R_i : la diode i est à remplacer après 150 h.

les R_i sont indépendants

Exemple La durée de vie en heures d'une diode est donnée par la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que 3 de nos 7 diodes soient à remplacer après 150 heures

$$P(R_i) = \int_0^{150} \frac{100}{x^2}\, dx = 100 \int_{100}^{150} x^{-2}\, dx$$

$$= 100\left(-\frac{1}{150} + \frac{1}{100}\right) = 100\left(-\frac{2}{300} + \frac{3}{300}\right) = \frac{1}{3}$$

Exemple La durée de vie en heures d'une diode est donnée par la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que 3 de nos 7 diodes soient à remplacer après 150 heures

$$P(R_i) = \frac{1}{3}$$

$$\binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{35 \cdot 2^4}{3^7} \approx 0,26$$

Faites les exercices suivants

3.35 à 3.38

Définition Soit X une variable aléatoire continue, son l'espérance est

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx$$

et sa variance est

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\ dx$$

Remarque:

Dans le cas continu, il est possible que l'espérance et la variance n'existent pas, car ces intégrales peuvent diverger.

Exemple Supposons que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4x - x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^2 x \frac{3}{16}(4x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^2 4x^2 - x^3\, dx = \frac{3}{16} \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$= 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Exemple Supposons que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4x - x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{5}{4}$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 f(x)\, dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2 \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 (4x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right)(4x - x^2)\, dx$$

Exemple Supposons que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4x - x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{5}{4}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{3}{16}\int_0^2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right)(4x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2 4x^3 - x^4 - 10x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{4}x - \frac{25}{16}x^2\, dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2 -x^4 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{185}{16}x^2 + \frac{25}{4}x\, dx$$

Exemple Supposons que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4x - x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \frac{3}{16} \int_0^2 -x^4 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{185}{16}x^2 + \frac{25}{4}x \; dx \\
&= \frac{3}{16} \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{13x^4}{8} - \frac{185x^3}{54} + \frac{25x^2}{8} \right) \Bigg|_0^2 \\
&= \frac{19}{80}
\end{aligned}$$

Exemple La durée de vie en heures d'une diode est donnée par la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est l'espérance de cette variable aléatoire?

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx \ = \int_{100}^{\infty} \frac{100}{x}\ dx \ = 100 \ln|x| \Big|_{100}^{\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty} 100(\ln|t| - \ln(100) \ = \infty$$

donc dans ce cas-ci, l'espérance n'existe pas.

Faites les exercices suivants

3.39

Théorème Si X est une variable aléatoire continue et

$Y = aX + b$ alors $E(Y) = aE(X) + b$

Preuve:

$$E(Y) = E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)\ dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx + b\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx}$$

$$= aE(X) + b$$

Théorème Si X est une variable aléatoire continue et

$Y = g(X)$ $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\ dx$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\ dx\ = E[(X - E(X))^2]$$

L'argumentaire utilisé lors du cours sur la variance à savoir que

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

reste valide pour les variables aléatoires continues.

Exemple Supposons que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4x - x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{5}{4}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{9}{5} - \frac{25}{16}$$

$$= \frac{144}{80} - \frac{125}{80} = \frac{19}{80}$$

$$E(X^2) = \frac{3}{16}\int_0^2 x^2(4x - x^2)\ dx = \frac{3}{16}\int_0^2 4x^3 - x^4\ dx$$

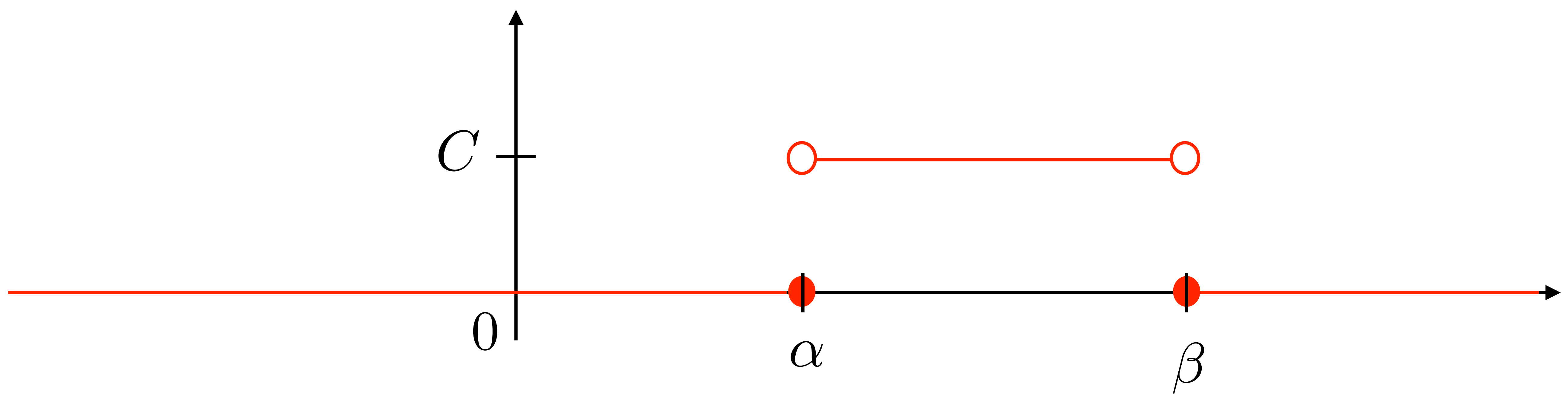
$$= \frac{3}{16}\left(x^4 - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$$

Loi uniforme

Une variable aléatoire continue dont la fonction de densité une constante sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ et nulle partout ailleurs est dite loi uniforme

$$X \sim U(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \begin{cases} C & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Trouvons cette constante $f(x) = \begin{cases} C & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} C\ dx\ = Cx\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$= C(\beta - \alpha)\ = 1$$

donc $\quad C = \dfrac{1}{\beta - \alpha}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Faites les exercices suivants

3.40 à 3.44

Devoir: # 3.35 à 3.44