4.4 TESTS D'HYPOTHÈSES SUR UNE MOYENNE

cours 25

Dans la méthode scientifique.

On fait des observations

On fait des hypothèses

On fait tests pour valider ou infirmer nos hypothèses.

Soit θ un paramètre quelconque

C'est-à-dire que θ pourrait être une moyenne ou une proportion ou autre chose.

Hypothèse nulle: H_0

Est habituellement l'hypothèse qui n'amène pas de changement.

C'est l'hypothèse du statu quo

Hypothèse alternative: H_1

C'est l'hypothèse qui sera acceptée si on rejette l'hypothèse nulle.

	on accepte H_0	on rejette H_0
H_0 est vraie	Bonne décision	Erreur de type 1
H_0 est fausse	Erreur de type 2	Bonne décision

$$\alpha = P(\text{rejette } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie})$$

$$\beta = P(\text{accepte } H_0 \mid H_0 \text{ est fausse})$$

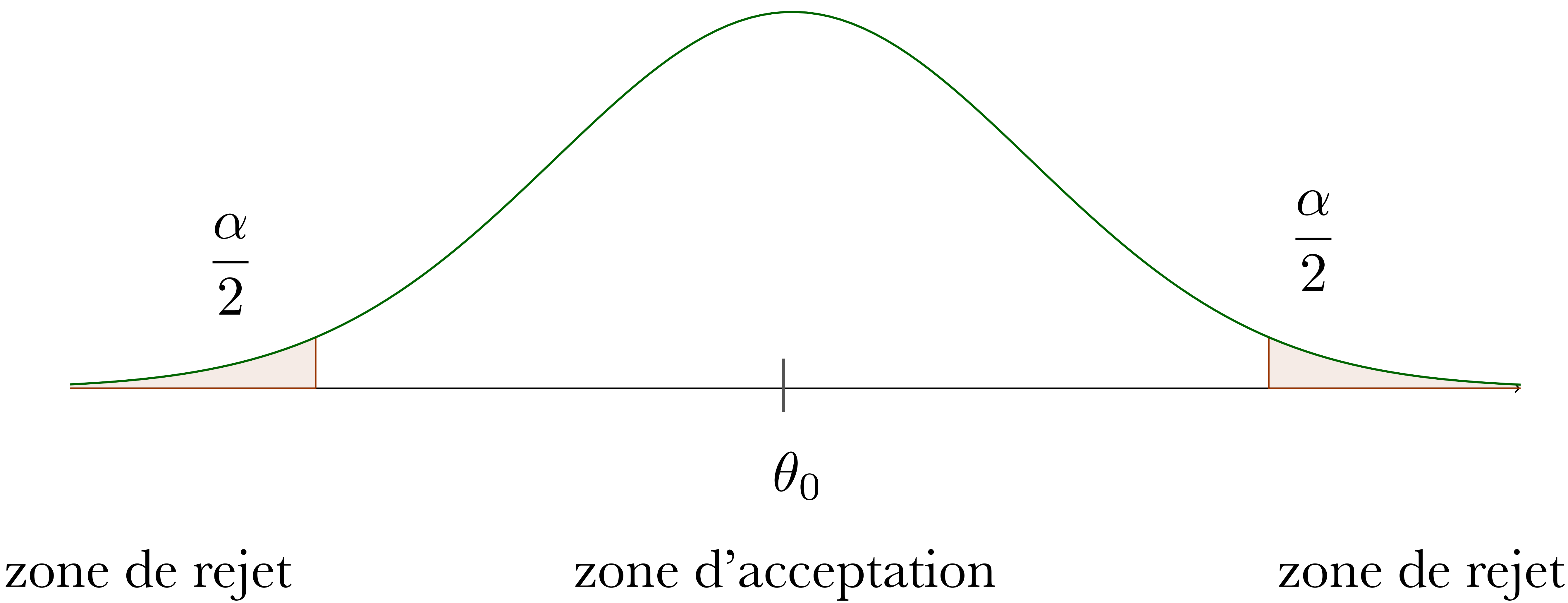
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_1 : \theta \neq \theta_0$	Test bilatéral
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	Test unilatéral à gauche
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$	Test unilatéral à droite

Test bilatéral

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

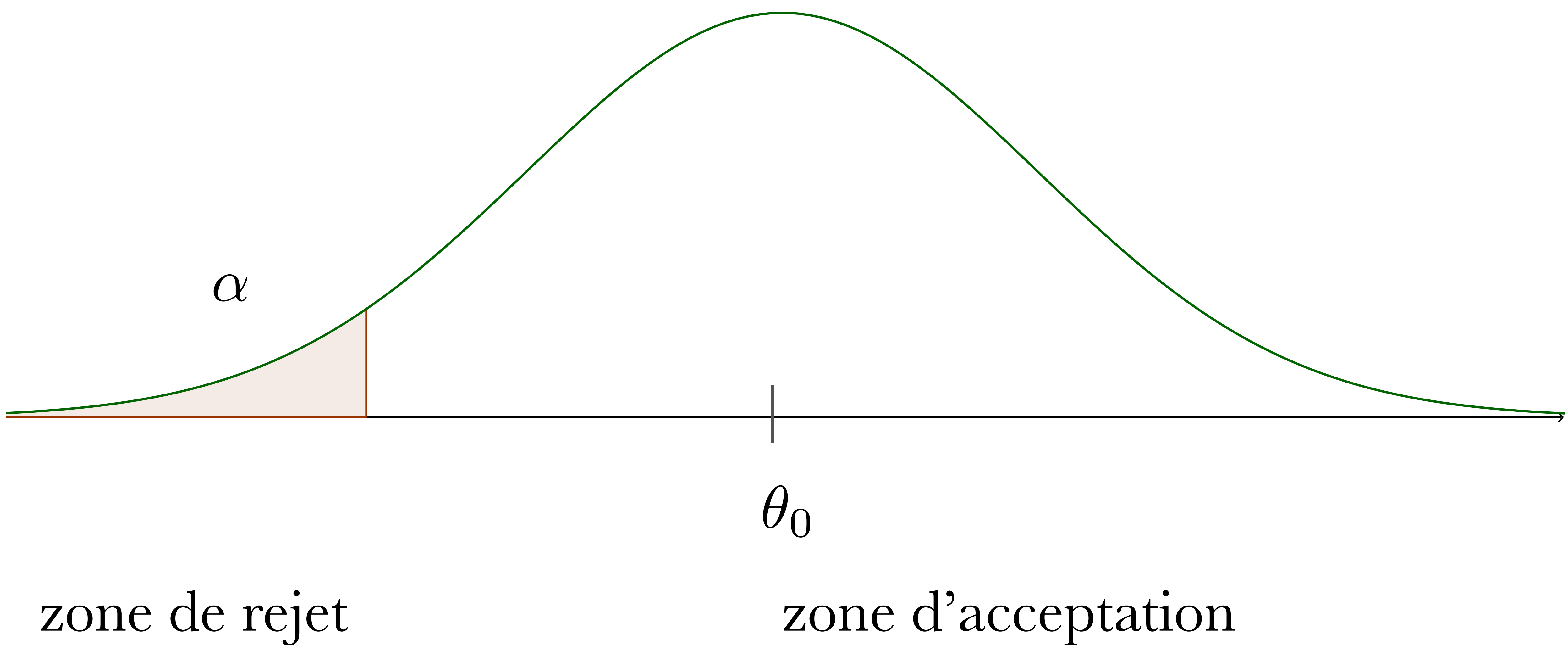
$$\alpha = P(\text{rejette } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie})$$



Test unilatéral à gauche

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

$$\alpha = P(\text{rejette } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie})$$

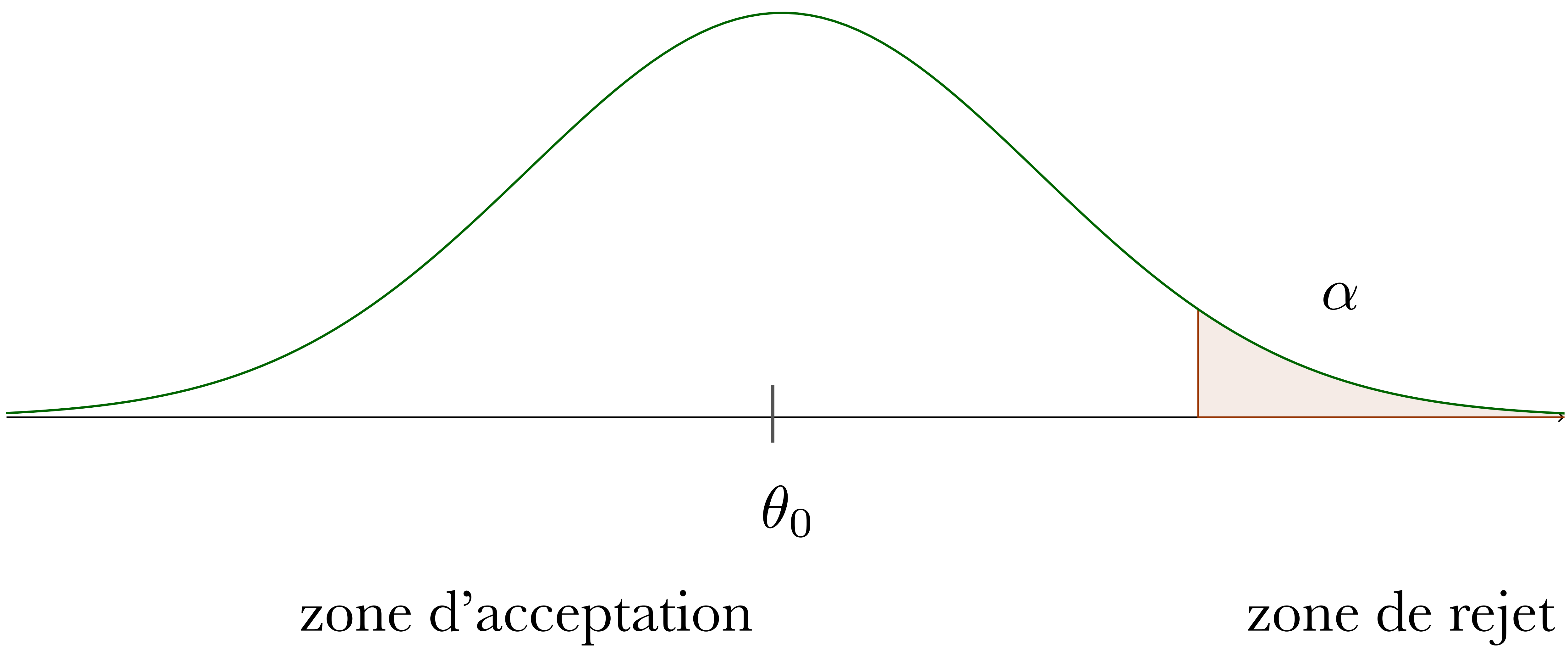


Test unilatéral à droite

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

$$\alpha = P(\text{rejette } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie})$$



Exemple

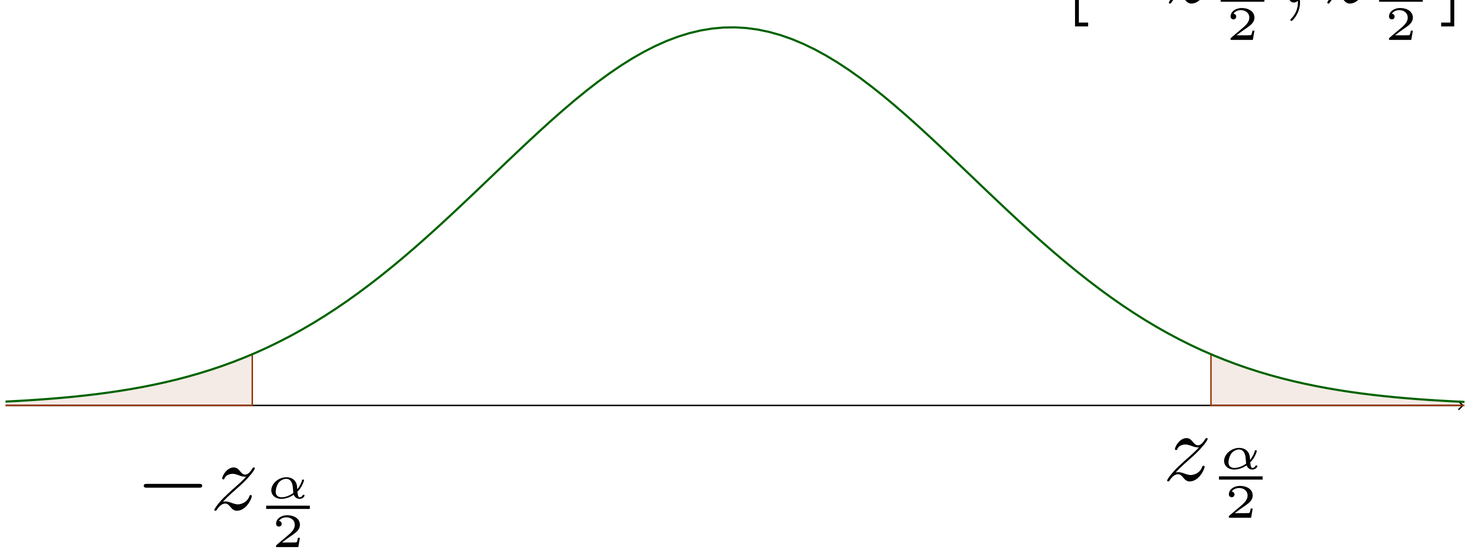
Le vétérinaire du coin affirme que la durée de vie moyenne d'un labrador est de 12,3 ans avec un écart type de 2,5 ans. On décide de prendre un échantillon de 50 chiens pour tester l'affirmation.

$$H_0 : \mu = 12,3 \qquad\qquad H_1 : \mu \neq 12,3$$

avec un niveau de signification $\alpha = 0,05$ $\qquad \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$Z = \frac{\bar{X} - 12,3}{\sqrt{\frac{(2,5)^2}{50}}} \sim N(0,1)$$

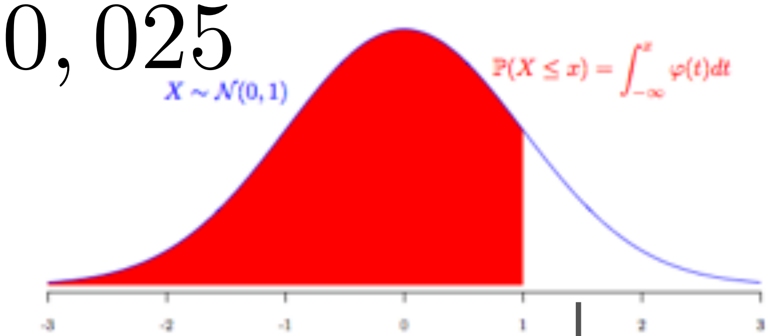
$\left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ est la zone d'acceptation



Exemple

Le vétérinaire du coin affirme que la durée de vie moyenne d'un labrador est de 12,3 ans avec un écart type de 2,5 ans. On décide de prendre un échantillon de 50 chiens pour tester l'affirmation.

$$H_0 : \mu = 12,3 \qquad H_1 : \mu \neq 12,3 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0,025$$



$$Z = \frac{\bar{X} - 12,3}{\sqrt{\frac{(2,5)^2}{50}}} \sim N(0,1)$$

$$P(Z \leq z_{0,025}) = 1 - 0,025$$

$$= 0,975$$

$$z_{0,025} = 1,96$$

$$[-1,96,\ 1,96]$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Exemple

Le vétérinaire du coin affirme que la durée de vie moyenne d'un labrador est de 12,3 ans avec un écart type de 2,5 ans. On décide de prendre un échantillon de 50 chiens pour tester l'affirmation.

$$H_0 : \mu = 12,3 \qquad H_1 : \mu \neq 12,3$$

avec un niveau de signification $\alpha = 0,05$ $\qquad \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$$Z = \frac{\bar{X} - 12,3}{\sqrt{\frac{(2,5)^2}{50}}} \sim N(0,1)$$

$$\bar{X} = \sqrt{\frac{2,5^2}{50}}Z + 12,3$$

$$= 0,3536Z + 12,3$$

$$[-1,96, \ 1,96]$$

$$a = 0,3536(-1,96) + 12,3 = 11,61$$

$$b = 0,3536(1,96) + 12,3 \quad = 12,99$$

$$[11,61; \ 12,99]$$

Exemple

Le vétérinaire du coin affirme que la durée de vie moyenne d'un labrador est de 12,3 ans avec un écart type de 2,5 ans. On décide de prendre un échantillon de 50 chiens pour tester l'affirmation.

$$H_0 : \mu = 12,3 \qquad H_1 : \mu \neq 12,3$$

avec un niveau de signification $\alpha = 0,05$

$$[11,61;\ 12,99]$$

La règle de décision est

Accepter H_0 si $11,61 \leq \bar{x} \leq 12,99$

Rejeter H_0 si $\bar{x} < 11,61$ ou $\bar{x} > 12,99$

Étapes d'un test d'hypothèse

1. Déterminer la variable à étudier.
2. Formuler les hypothèses à confronter.
3. Établir le niveau de signification.
4. Déterminer la distribution de l'estimateur.
5. Établir la règle de décision.
6. Effectuer les calculs nécessaires.
7. Prendre la décision.

bilatérale

unilatéral

$n \geq 30$

σ connue

On fait comme dans l'estimation d'une moyenne

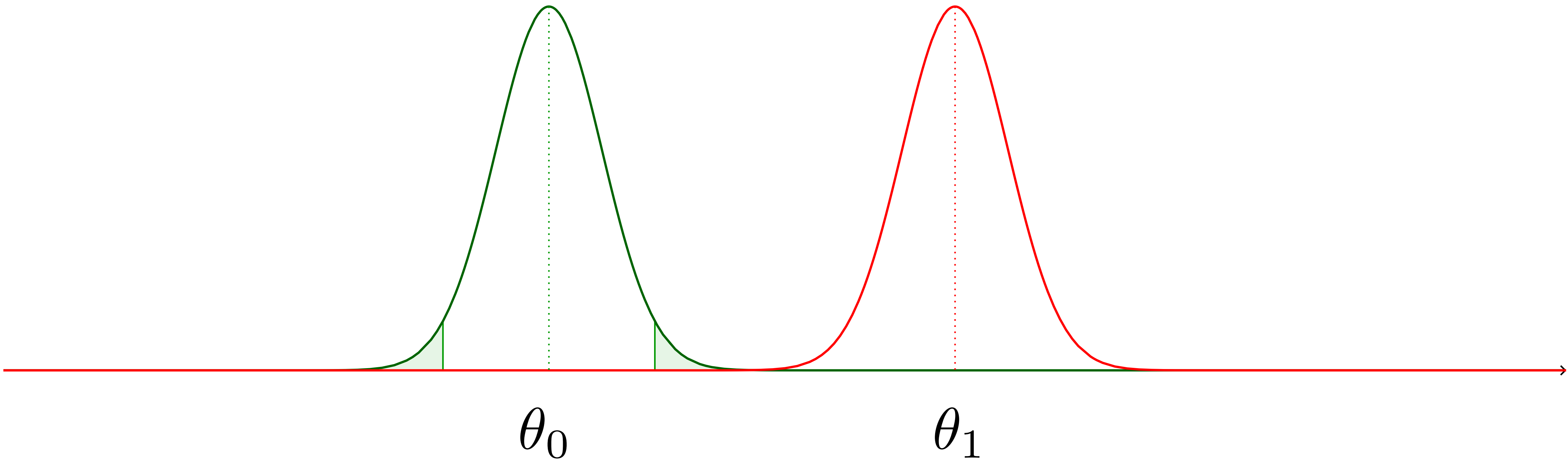
Faites les exercices suivants

#4.26 à 4,27

Lorsqu'on fait un test d'hypothèse si on prend α très petit pour évité de faire une erreur de type 1

on augmente nos chances de faire une erreur de type 2

$$\beta = P(\text{accepte } H_0 \mid H_0 \text{ est fausse})$$



On pourrait calculer la **puissance du test,** mais c'est un peu inutile, car on ne verra pas d'autres tests.

La meilleure chose à faire est d'augmenter la taille de l'échantillon pour diminuer l'écart type.

Devoir: 4.26 à 4.30