4.5 TESTS D'HYPOTHÈSES SUR UNE PROPORTION

cours 26

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Tests d'hypothèse sur une proportion
- ✓ Tests d'hypothèse sur une différence de moyenne
- ✓ Tests d'hypothèse sur une différence de proportion

Pour les tests d'hypothèse sur une proportion, c'est-à-dire

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

on ne considérera que les cas où

$$n \geq 30 \qquad n\pi \geq 5 \qquad n(1-\pi) \geq 5$$

Dans ce cas, on aura

$$\frac{\bar{P} - \pi}{\sigma_{\bar{P}}} \sim N(0,1) \qquad \sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

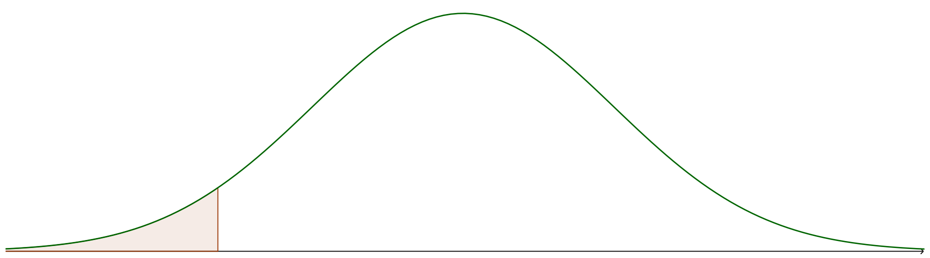
Pour le reste, les tests d'hypothèse se font de la même façon que pour un test d'hypothèse sur une moyenne.

Exemple

Une chaine de restaurant affirme que 80% de sa clientèle visite leurs restaurants plus d'une fois par semaine. Pour tester cette hypothèse, une firme sonde 460 de ces clients dont 358 affirment visiter le restaurant plus d'une fois par semaine. Avec niveau de signification 0,05 que peut-on conclure?

$$H_0 : \pi = 0,8 \qquad H_1 : \pi < 0,8$$

$$n = 460 \qquad n\pi = 368 \qquad n(1-\pi) = 92$$



$$-z_{0,05} = -1,645$$

$$Z = \frac{\bar{P} - 0,8}{\sqrt{\frac{(0,8)(0,2)}{460}}} = \frac{\bar{P} - 0,8}{0,0187} \sim N(0,1)$$

mais ici

$$\bar{p} = \frac{358}{460} = 0,7783$$

Zone d'acceptation $\dfrac{\bar{p} - 0,8}{0,0187} \geq -1,645$

$$\bar{p} \geq (-1,645)(0,0187) + 0,8 = 0,7692$$

Donc on accepte H_0

Faites les exercices suivants

4.31 à 4.34

Il arrive souvent qu'on veuille faire un test d'hypothèse pour comparer deux populations.

Par exemple, on pourrait être intéressé à savoir s'il y a une différence entre le poids des écureuils de Montréal et celui des écureuils de Toronto.

Dans ce cas, on fait plutôt un test d'hypothèse sur une différence de moyenne.

Supposons qu'on ait une population P_1

sur laquelle on étudie une variable statistique X_1

de moyenne μ_1 et d'écart type σ_1

et $\bar{X}_1$ la variable aléatoire pour un échantillon de taille n_1

et une deuxième population P_2

sur laquelle on étudie la même variable statistique X_2

de moyenne μ_2 et d'écart type σ_2

et $\bar{X}_2$ la variable aléatoire pour un échantillon de taille n_2

Considérons maintenant la variable aléatoire qui nous donne la différence des deux

$$D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

pour éviter les complications, nous considérerons que les cas où

$$n_1 \geq 30 \qquad \text{et} \qquad n_2 \geq 30$$

et donc

$\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ suivent des lois normales.

alors D suit aussi une loi normale

$$D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

$$\begin{aligned} E(D) = E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) \\ &= \mu_1 - \mu_2 = d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= \mathrm{Var}(\bar{X}_1) + \mathrm{Var}(-\bar{X}_2) \\ &= \mathrm{Var}(\bar{X}_1) + (-1)^2\mathrm{Var}(\bar{X}_2) \\ &= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \end{aligned}$$

$$D \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$D \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

d'où

$$\frac{D - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \qquad \frac{D - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

On est donc en mesure de faire un test d'hypothèse du genre

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = k$$

Exemple

Un chercheur prétend que le poids moyen d'un Canadien est identique à celui d'un américain. Son collègue croit plutôt que le poids des Américains est plus grand. Ils décident de prendre un échantillon de 66 Canadiens avec un poids moyen de 165 lb avec écart-type échantillonnal de 12 lb et un échantillon de 82 américain avec poids moyen de 173 lb avec écart-type échantillonnal de 17lbs. Avec niveau de signification 5% que peut-on conclure?

X_1 : poids Can. μ_1 : moy. Can. X_2 : poids Amé. μ_2 : moy. Amé.

$$D = X_2 - X_1 \qquad H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0 \qquad H_1 : \mu_2 - \mu_1 > 0$$

$$n_1 = 66 \qquad \bar{x}_1 = 165 \qquad s_1 = 12 \qquad \alpha = 0,05$$

$$n_2 = 82 \qquad \bar{x}_2 = 173 \qquad s_2 = 17$$

Exemple

X_1 : poids Can. $\quad$ X_2 : poids Amé.

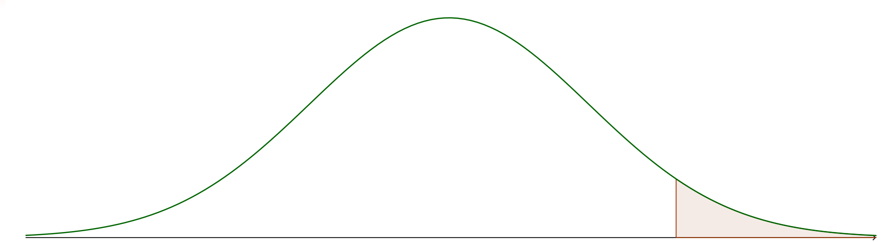
μ_1 : moy. Can. $\quad$ μ_2 : moy. Amé.

$$D = X_2 - X_1 \qquad H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0 \qquad H_1 : \mu_2 - \mu_1 > 0$$

$$n_1 = 66 \qquad \bar{x}_1 = 165 \qquad s_1 = 12 \qquad \alpha = 0,05$$

$$n_2 = 82 \qquad \bar{x}_2 = 173 \qquad s_2 = 17$$

$$\frac{D}{2,3888} = \frac{D - 0}{\sqrt{\frac{12^2}{66} + \frac{17^2}{82}}} \sim N(0,1)$$



$$z_{0,05} = 1,645$$

$$\frac{D}{2,3888} \leq 1,645$$

$$d = 173 - 165 = 8 \;> 3,9296$$

$$D \leq 3,9296$$

Donc on rejette H_0

Faites les exercices suivants

#4.35 à 4.38

Similairement, pour faire un test d'hypothèse sur une différence de proportion, on considère

$$D = \bar{P}_1 - \bar{P}_2$$

$$n_1, n_2 \geq 30 \qquad n_1\pi_1, n_2\pi_2 \geq 5 \qquad n_1(1-\pi_1), n_2(1-\pi_2) \geq 5$$

$$E(D) = E(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) = E(\bar{P}_1) - E(\bar{P}_2) = \pi_1 - \pi_2 = d$$

$$\mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) = \mathrm{Var}(\bar{P}_1) + \mathrm{Var}(\bar{P}_2)$$

$$= \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$$

$$E(D) = E(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \quad = \pi_1 - \pi_2$$

$$\mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \quad = \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$$

$$\frac{D - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{D - (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1-1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2-1}}} \sim N(0,1)$$

Faites les exercices suivants

4.39 à 4.42

Devoir: 3.49 à 3.61