Exercices

201-GNH

1 Analyse combinatoire

1.1 Ensembles

Q.1.1

Illustrer les propriétés suivantes à l'aide d'un diagramme de Venn approprié pour des ensembles quelconque A, B et C.

a) $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.

b) Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$.

c) Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.

d) Si $A \cap B = \emptyset$ alors $A \subset \bar{B}$.

e) Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$

Q.1.2

Utiliser les diagramme de Venn pour illustrer les identités suivantes

a) $B \backslash A = \bar{A} \cap B$.

b) $B \backslash A \subset B$.

c) $A \subset \overline{B \backslash A}$.

d) $A \backslash \bar{A} = A$.

Q.1.3

Supposons que A et B sont des ensemble de cardinalité finie. Dire si les énoncés suivants sont vrai ou faux

a) $|A \cup B| = |A| + |B|$

b) $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

c) $|A \backslash B| = |A| - |B|$

d) $\bar{A} \Delta \bar{B} = A \Delta B$

Q.1.4

Donner trois partitions différente de l'ensemble

$$S = \{a, b, c, d, e\}.$$

Q.1.5

Soient A, B et C trois événements. Écrire les expressions suivantes en utilisant la notation des ensembles.

a) A se produit mais ni B ni C ne se produisent.

b) A et B se produisent mais pas C

c) A ou B se produisent mais pas C

d) Aucun de A, B et C ne se produisent.

e) A, B ou C se produisent.

f) Soit A se produit mais pas B, ou B se produit mais pas A.

g) Deux ou plus de A, B et C se produisent.

h) Exactement deux de A, B et C se produisent.

i) Moins de deux de A, B et C se produisent.

j) Exactement un de A, B et C se produit.

1.2 Principes de dénombrement

Q.1.6

Soit A et B, les deux ensembles suivants :
A={Jean, Lucie, Sylvie, Pierre} et B={1, 3, 5, 7}
Écrire toutes les dispositions de trois éléments, non ordonnées et sans répétitions que l'on peut faire avec les éléments de A et écrire toutes les dispositions de deux éléments, ordonnées et avec répétitions que l'on peut faire avec les éléments de B.

Q.1.7

Combien de repas complets différents peut-on former si une cafétéria propose deux choix de soupe, trois choix de repas principal et trois choix de dessert ?

Q.1.8

Chaque fois qu'on effectue une transaction au comptoir d'une caisse populaire, le caissier appose ses initiales (2 lettres) sur le bordereau. Une municipalité a 20 caisses populaires avec 35 préposés au comptoir chacune. Montrer qu'au moins deux de ces préposés ont les mêmes initiales.

Q.1.9

Combien de codes alphabétiques peut-on former sachant qu'il a :

a) trois lettres et se termine par a ou b (sans répétition)

b) trois lettres et se termine par a ou b (avec répétition)

c) quatre lettres et se terminant par a, b ou c (sans répétition)

Q.1.10

Afin de pourvoir un poste de trésorier et un poste de secrétaire d'un comité, on doit choisir parmi plusieurs candidatures (2 femmes et 5 hommes). Combien de comités différents peut-on former si :

a) les deux personnes doivent appartenir au même sexe

b) les deux personnes ne doivent pas être du même sexe

Q.1.11

Afin de convaincre sa femme de ne pas aller magasiner, un travailleur professionnel lui jure qu'il peut se vêtir différemment chaque jour durant un an à partir de la garde-robe qu'il possède déjà alors que celle-ci comprenant 5 chemises, 4 pantalons, 10 cravates et 2 paires de chaussures. A-t-il raison ? Supposer qu'il doit porter un item de chaque catégorie tous les jours.

Q.1.12

Une librairie possède 40 000 livres à identifier par un code alphanumérique (chaque élément du code peut être un chiffre de 0 à 9 ou une lettre). Quelle longueur minimale doit avoir le code pour que chaque livre ait un code unique.

Q.1.13

Combien de plaques d'immatriculation peut-on fabriquer si les numéros de ces plaques comprennent trois lettres différentes (excluant le O et le I), suivies de deux chiffres différents ?

Q.1.14

Combien de nombre de trois chiffres différents peut-on former qui ne contiennent pas de chiffre pair ?

Q.1.15

Combien de nombres pairs de cinq chiffres différents peut-on former qui commencent par le chiffre 1, 2 ou 3 ?

Q.1.16

Combien existe-t-il de nombres compris entre 100 et 100 000 commençant par un chiffre impair et contenant des chiffres différents ?

Q.1.17

Combien de nombres pairs de 3 chiffres peut-on former en utilisant sans aucune répétition les chiffres 1, 5, 6, 8 et 9 seulement ?

Q.1.18

De combien de façons 4 hommes et 4 femmes peuvent-ils s'asseoir alternativement sur une rangée de 8 chaises si la dernière chaise doit être occupée par une femme ?

Q.1.19

De combien de façons peut-on aller de Montréal à Toronto, puis à Chicago si le trajet entre chaque ville peut se faire en voiture, en autobus, par train ou par avion ?

Q.1.20

Combien de nombres peut-on former si on lance un dé pour obtenir les unités et si on recommence pour les dizaines et pour les centaines ?

Q.1.21

Un numéro d'identification est constitué de 3 lettres suivies de 4 chiffres. Combien de numéros peut-on faire :

a) si on peut répéter les lettres et les chiffres ?
b) si on ne peut répéter que les lettres ?
c) si la première lettre ne peut être réutilisée ?
d) si on ne peut utiliser deux fois de suite la même lettre ?

Q.1.22

Un cube a 2 faces rouges, 2 faces noires et 2 faces blanches. On lance ce cube à 4 reprises. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Q.1.23

Combien de nombres impairs de 4 chiffres (le nombre ne peut pas débuter par 0) peut-on former avec les chiffres 0, 3, 5, 6 et 8, si

a) les répétitions sont permises ?
b) les répétitions sont interdites ?

Q.1.24

On lance un dé 4 fois. De combien de façons peut-on obtenir la face 6 exactement 2 fois consécutives ? (note : on peut avoir plus de 2 fois la face 6. Par exemple, 6636)

Q.1.25

Trouvez le nombre total de nombres entiers que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 si ces nombres comportent au plus 5 chiffres ? Les répétitions sont permises.

1.3 Permutations, arrangements et combinaisons

Q.1.26

De combien de façons un professeur peut-il placer les copies d'examen de ses 25 étudiants si la meilleure copie et la pire doivent être ensemble ?

Q.1.27

De combien de façons un professeur peut-il placer les copies d'examen de ses 25 étudiants si la meilleure copie et la pire ne doivent pas se suivre ?

Q.1.28

a) Combien d'anagrammes peut-on former en permutant les 10 lettres du mot MISTASSINI ?
b) Combien y en a-t-il qui commencent et se terminent par un S ?
c) Combien y en a-t-il où tous les S se suivent ?

Q.1.29

Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot VOLUME si :

a) les consonnes doivent occuper les positions impaires ?

b) les consonnes et les voyelles doivent alterner ?

c) les consonnes doivent se suivre ?

d) les mots doivent commencer et se terminer par une consonne ?

Q.1.30

On veut former des mots en permutant les lettres du mot PARALLÈLE.

a) Combien de mots peut-on former ?

b) Combien de ces mots commencent par R et se terminent par L ?

c) Combien y en a-t-il où les L se suivent ?

Q.1.31

4 hommes, 3 femmes et 2 enfants se tiennent en ligne pour une photographie. On a pris autant de photos qu'il y a de façons de placer 9 personnes sur une ligne. Lorsqu'on développa les photos, elles étaient si floues que l'on ne pouvait distinguer les hommes entre eux, les femmes entre elles et les enfants entre eux. Combien de photos différentes peut-on distinguer ?

Q.1.32

Combien de mots de quatre lettres distinctes peut-on former avec les lettres du mot ÉQUATIONS ?

Q.1.33

De combien de manières différentes peut-on former un conseil composé d'un président, d'un vice-président, d'un secrétaire et d'un trésorier si on choisit dans un groupe de 20 citoyens ?

Q.1.34

Une association est formée de 14 hommes et 9 femmes. De combien de façons peuvent-ils élire un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier, si

a) les postes de président et de vice-président doivent être occupés par des femmes et ceux de secrétaire et de trésorier par des hommes ?

b) cet exécutif doit être formé de 2 hommes et 2 femmes ?

c) les hommes ne sont pas éligibles ?

d) Manon n'est pas éligible ?

e) Gérard doit absolument occuper un poste ?

f) Sylvain et Julie ne peuvent absolument pas travailler ensemble ?

Q.1.35

On veut former un comité de 6 personnes parmi 7 francophones et 14 anglophones. Combien y a-t-il de comités possibles si

a) le comité doit contenir exactement 2 francophones ?

b) le comité ne doit contenir que des gens parlant une même langue ?

Q.1.36

On choisit une main de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant

a) exactement 2 as ?

b) 2 cœurs et 1 pique ?

c) 5 cartes d'une même sorte ?

d) aucun cœur ?

e) au moins un carreau ?

f) l'as de pique ?

Q.1.37

Un examen consiste à répondre VRAI ou FAUX à 10 questions. De combien de façons peut-on répondre VRAI à 5 questions et FAUX aux autres ?

Q.1.38

20 candidats inscrits à un concours se disputent 3 prix différents. De combien de façons l'attribution peut-elle se faire si

a) un même candidat ne peut recevoir plus d'un prix ?

b) un candidat peut recevoir plusieurs prix ?

Q.1.39

De combien de façons peut-on élire un exécutif composé d'un président, d'un vice-président, d'un secrétaire et d'un trésorier dans une association regroupant 12 hommes et 18 femmes si

a) une seule fille doit être choisie ?

b) Jean doit être choisi ?

c) le président et le vice-président ne doivent pas être du même sexe ?

d) Marie et Pierre ne sont pas éligibles ?

Q.1.40

De combien de façons peut-on choisir 4 personnes d'un groupe de 5 couples mariés

a) si on doit choisir 2 hommes et 2 femmes ?

b) si un mari et son épouse ne peuvent être choisis tous les deux ?

Q.1.41

Une association de 20 membres comprend 4 étudiants. De combien de façons peut-on former un comité de 3 membres s'il doit contenir au moins un étudiant ?

Q.1.42

Combien de mots de 4 lettres distinctes contenant 2 voyelles et 2 consonnes peut-on former à partir de 5 voyelles et 9 consonnes ?

Q.1.43

Lors d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur 10.

a) Combien a-t-il de choix possibles ?
b) Combien y en a-t-il s'il doit obligatoirement répondre aux 3 premières questions ?
c) Combien y en a-t-il s'il doit répondre à au moins 4 des 5 premières questions ?

Q.1.44

On a établi à 105 le nombre de poignées de mains échangées lors d'une réunion. Combien y avait-il de personnes à cette réunion si on suppose que tous se sont donné la main ?

Q.1.45

De combien de façons peut-on partager 10 objets différents entre 3 enfants si le premier doit en recevoir 5 et le deuxième doit en recevoir 3 ?

Q.1.46

De combien de manières peut-on diviser un groupe de 12 personnes en trois équipes de 4 personnes chacune ?

Q.1.47

Dans un parc d'attraction, André possède 12 tickets pour embarquer dans des manèges. S'il y a 10 manèges, que chaque manège coûte un ticket et que l'ordre dans lequel il choisit les manèges n'est pas important, de combien de manières différentes André peut-il dépenser ses 12 tickets ? André peut faire les manèges autant de fois qu'il le désire.

Q.1.48

Montrer algébriquement que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}.$$

Pouvez-vous donner une justification combinatoire à cette égalité ?

1.4 Binôme de Newton et Triangle de Pascal

Q.1.49

Donner une interprétation combinatoire de le règle de Pascal

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Q.1.50

Démontrer la relation de récurrence $\binom{n}{r+1} = \frac{(n-r)}{(r+1)}\binom{n}{r}$.

Q.1.51

Donner un argument combinatoire pour justifier l'égalité

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

si $r \leq n$ et $r \leq m$.

Q.1.52

Utiliser le résultat de la question précédente pour démontrer que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Q.1.53

Trouver le septième terme du développement de $(a+b)^8$.

Q.1.54

Trouver le huitième terme du développement de $\left(2a + \frac{b}{2}\right)^{11}$.

Q.1.55

Trouver le terme contenant x^{12} dans le développement de $(x^2 - 4y)^8$.

Q.1.56

Trouver le terme du milieu dans le développement de $\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^8$

Q.1.57

À l'aide du développement du binôme de Newton, trouver la valeur de 103^3 (sans calculatrice !)

Q.1.58

On a déjà vu que si A est un ensemble de cardinalité $|A| = n$ alors le nombre de sous-ensemble de A est $\mathcal{P}(A) = 2^n$. Démontrer ce résultat en utilisant le binôme de Newton, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Q.1.59

Montrer que

$$\sum_{k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k}.$$

1.5 Exercices récapitulatifs

Q.1.60

Dans une ligue de hockey, il y a huit équipes. Chaque équipe doit jouer dix matches contre chacune des autres équipes. Combien de matches sont disputés au cours de la saison ?

Q.1.61

Dans un plan, considérons huit points placés de sorte que trois d'entre eux ne sont jamais sur une même droite. Combien y a-t-il de segments de droite distincts joignant deux de ces points ?

Q.1.62

Un club de soccer compte 55 membres. Parmi ceux-ci, 27 ont un enfant, 15 ont deux enfants, 8 ont trois enfants et cinq en ont quatre. On organise un tournoi «parent-enfant». Combien y a-t-il de tandems possibles ?

Q.1.63

Combien de mots de quatre lettres distinctes peut-on former avec les lettres du mot CARTES ?

Q.1.64

J'ai 5 chapeaux, 2 manteaux, 3 paires de bottes et 2 paires de gants. De combien de façons

a) puis-je me vêtir ?

b) puis-je me vêtir si je dois porter le manteau bleu et les gants bleus ?

Q.1.65

À partir de tout l'alphabet, on veut former des mots de 6 lettres différentes en utilisant 3 consonnes et 3 voyelles. Combien...

a) de tels mots y a-t-il ?

b) d'entre eux contiennent la lettre F ?

c) d'entre eux contiennent les lettres F et G ?

d) d'entre eux commencent par F et contiennent G ?

e) d'entre eux contiennent F et E ?

f) d'entre eux commencent par F et finissent par E ?

g) d'entre eux commencent par G et finissent par F ?

h) d'entre eux contiennent F, G, H ?

i) d'entre eux contiennent F, G, E ?

Q.1.66

Combien d'anagrammes sont possibles pour

a) le mot TABLE ?

b) le mot TABLE si le mot formé doit commencer par T ?

c) le mot ANAGRAMME ?

Q.1.67

Je possède 10 BD différentes de Tintin, de combien de façons puis-je

a) en placer 4 sur une étagère ?

b) en apporter 4 chez un ami ?

Q.1.68

Une population est constituée de 9 Québécois, 6 Italiens et 4 Américains. On pige au hasard et sans remise un échantillon de 3 personnes dans cette population. Combien d'échantillons

a) différents sont possibles ?

b) comprennent 3 Italiens ?

c) comprennent exactement deux Québécois ?

d) comprennent exactement 1 Québécois et 1 Italien ?

e) comprennent au moins deux Québécois ?

f) comprennent au moins 1 Québécois ?

Q.1.69

On veut former des nombres de trois chiffres distincts en utilisant les six chiffres suivants : 1, 3, 5, 6, 7, 8.

a) Combien de nombres différents peut-on former ?

b) Combien d'entre eux sont inférieurs à 400 ?

c) Combien d'entre eux sont pairs ?

d) Combien se terminent par un 3 ?

e) Combien sont impairs ?

f) Combien sont des multiples de 5 ?

g) Combien sont inférieurs à 400 et pairs ?

Q.1.70

Soit le mot GRAMMAIRE. Combien y a-t-il d'anagrammes différentes

a) en tout ?

b) si les deux M se suivent, les deux A se suivent et les deux R se suivent ?

c) si les voyelles se suivent ?

d) si l'anagramme commence et se termine avec la même lettre ?

e) si l'anagramme se termine par une voyelle ?

Q.1.71

Une équipe de ménage formée de 9 personnes doit se répartir le travail. De combien de manières peut-on faire cette répartition si 3 personnes s'occupent des salles de bain, 4 personnes de la cuisine et 2 des chambres à coucher ?

Q.1.72

De combien de façons peut-on distribuer 7 pommes et 6 oranges à 4 enfants si chaque enfant reçoit au moins une pomme ?

Q.1.73

Considérons l'ensemble

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, J\}.$$

Combien y a-t-il de sous-ensembles possibles (en incluant l'ensemble vide) ?

Q.1.74

Considérons le mulitensemble

$$\{\!\{A, A, A, B, B, C, D, E, F\}\!\}.$$

Combien y a-t-il de sous-multiensembles possibles (en incluant l'ensemble vide) ?

Q.1.75

Au bridge, une main comprend 13 cartes. Combien y en a-t-il :

a) Avec exactement un as ?

b) Avec l'as de cœur ?

c) Avec au moins un as ?

d) Avec un as et un roi ?

e) Avec un as et 3 figures dont 2 rois ?

f) Avec une carte de chaque valeur

Q.1.76

Combien de mains de poker (5 cartes) différentes contiennent exactement trois dames, si les deux autres cartes ne forment pas une paire ?

Q.1.77

Simplifier l'expression suivante : $\dfrac{n!(n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}$

Q.1.78

Simplifier l'expression suivante : $\dfrac{n! + (n-1)!}{(n+1)!}$

Q.1.79

Trouver n si $(n!)^2 + 720 = 126(n!)$

Q.1.80

Trouver n si $C_2^n = 55$

Q.1.81

Trouver n si $8A_4^n = A_5^{n+1}$

Q.1.82

Trouver le terme contenant $x^{21}y^5$ dans le développement de $(x^3 - y)^{12}$.

Réponses aux exercices

R.1.1 Laissé à l'étudiant.

R.1.2 Laissé à l'étudiant.

R.1.3

a) Faux $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

b) Vrai

c) Faux $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$

d) Vrai

R.1.4 Il y a plusieurs réponses possible mais en voici 3 ;

1. $A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{c, d\}, A_3 = \{e\}$
2. $B_1 = \{a, c, e\}, B_2 = \{b, d\}$
3. $C_1 = \{a\}, C_2 = \{b, c, d, e\}$

R.1.5

a) $A \backslash (B \cup C)$

b) $(A \cap B) \backslash C$

c) $(A \cup B) \backslash C$

d) $\overline{A \cup B \cup C}$

e) $A \cup B \cup C$

f) $A \Delta B$

g) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)$

h) $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)) \backslash (A \cap B \cap C)$

i) $\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)}$

j) $((A \Delta B) \Delta C) \backslash (A \cap B \cap C)$

R.1.6 A : sans ordre, sans répétition JLS, JLP, JSP, LSP
B : avec ordre, avec répétition
11, 13, 15, 17, 31, 33, 35, 37, 51, 53, 55, 57, 71, 73, 75, 77

R.1.7 $\begin{array}{|c|}2\\\hline \text{S}\end{array} \times \begin{array}{|c|}3\\\hline \text{P}\end{array} \times \begin{array}{|c|}3\\\hline \text{D}\end{array} =$ 18 repas complets

R.1.8 $20 \cdot 35 = 700$ préposés $> 26 \cdot 26 = 676$ initiales

R.1.9

a) $\begin{array}{|c|}2\\\hline \text{a ou b}\end{array} \times \begin{array}{|c|}25\\\hline \text{L1}\end{array} \times \begin{array}{|c|}24\\\hline \text{L2}\end{array} = 1200$

b) $\begin{array}{|c|}2\\\hline \text{a ou b}\end{array} \times \begin{array}{|c|}26\\\hline \text{L1}\end{array} \times \begin{array}{|c|}26\\\hline \text{L2}\end{array} = 1352$

c) $\begin{array}{|c|}3\\\hline \text{a, b ou c}\end{array} \times \begin{array}{|c|}25\\\hline \text{L1}\end{array} \times \begin{array}{|c|}24\\\hline \text{L2}\end{array} \times \begin{array}{|c|}23\\\hline \text{L3}\end{array} = 41\ 400$

R.1.10

a) 22

b) 20

R.1.11 Il a raison car $5 \times 4 \times 10 \times 2 = 400 > 365$

R.1.12 Le code doit être de longueur 3, ($36^3 > 40\ 000$)

R.1.13 $\begin{array}{|c|}24\\\hline \text{L}\end{array} \times \begin{array}{|c|}23\\\hline \text{L}\end{array} \times \begin{array}{|c|}22\\\hline \text{L}\end{array} \times \begin{array}{|c|}10\\\hline \text{C}\end{array} \times \begin{array}{|c|}9\\\hline \text{C}\end{array}$
$= 1\ 092\ 960$ plaques

R.1.14 60

R.1.15 $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}2 & 5 & 8 & 7 & 6\\\hline \text{1 ou 3} & \text{pair} & & & \\\hline\end{array}$
$\begin{array}{c}+\\\text{ou}\end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|}1 & 4 & 8 & 7 & 6\\\hline 2 & \text{pair} & & & \\\hline\end{array} = 4\ 704$

R.1.16 18 000

R.1.17 24

R.1.18 576

R.1.19 16

R.1.20 216

R.1.21

a) $26^3 \cdot 10^4 = 175\ 760\ 000$

b) $26^3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 88\ 583\ 040$

c) $26 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 10^4 = 162\ 500\ 000$

d) $26 \cdot 25 \cdot (24 + 1) \cdot 10^4 = 162\ 500\ 000$

R.1.22 $3^4 = 81$

R.1.23

a) 200

b) 36

R.1.24 $\begin{array}{|c|c|c|c|}1 & 1 & 5 & 6\\\hline 6 & 6 & \text{pas 6} & \\\hline\end{array} \begin{array}{c}+\\\text{ou}\end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|}5 & 1 & 1 & 5\\\hline \text{pas 6} & 6 & 6 & \text{pas 6}\\\hline\end{array}$
$\begin{array}{c}+\\\text{ou}\end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|}6 & 5 & 1 & 1\\\hline & \text{pas 6} & 6 & 6\\\hline\end{array} = 85$

R.1.25 3 905

R.1.26 $2 \cdot 24!$

R.1.27 $23 \cdot 24!$

R.1.28

a) $\dfrac{10!}{3!3!} = 100\ 800$

b) $\dfrac{8!}{3!} = 6\ 720$

c) $\dfrac{8!}{3!} = 6720$

R.1.29

a) $3! \cdot 3! = 36$

b) $2 \cdot 36 = 72$

c)

4!	3!
v + bloc c	c entre elles

$= 144$

d)

3	2	4!
1ère	6ème	autres

$= 144$

R.1.30

a) 15 120 b) 630 c) 1 260

R.1.31 $\dfrac{9!}{4!3!2!} = 1\ 260$

R.1.32 $A_4^9 = 3\ 024$

R.1.33 $A_4^{20} = 116\ 280$

R.1.34

a) $A_2^9 A_2^{14} = 13\ 104$

b) $\binom{14}{2}\binom{9}{2} \cdot 4! = 78\ 624$

c) $A_4^9 = 3\ 024$

d) $A_4^{22} = 175\ 560$

e) $4 \cdot A_3^{22} = 36\ 960$

f) $4 \cdot A_3^{21} + 4 \cdot A_3^{21} + A_4^{21} = 207\ 480$

R.1.35

a) $\binom{7}{2}\binom{14}{4} = 21\ 021$ b) $\binom{7}{6} + \binom{14}{6} = 3\ 010$

R.1.36

a) $\binom{4}{2}\binom{48}{3} = 103\ 776$

b) $\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{26}{2} = 329\ 550$

c) $\binom{4}{1}\binom{13}{5} = 5\ 148$

d) $\binom{39}{5} = 575\ 757$

e) $\binom{52}{5} - \binom{39}{5} = 2\ 023\ 203$

f) $\binom{1}{1}\binom{51}{4} = 249\ 900$

R.1.37 252

R.1.38

a) $A_3^{20} = 6\ 840$ b) $20^3 = 8\ 000$

R.1.39

a) 95 040 b) 87 696 c) 326 592 d) 491 400

R.1.40

a) 100 b) 80

R.1.41 $C_3^{20} - C_3^{16} = 580$

R.1.42 $C_2^5 C_2^9 4! = 8\ 640$

R.1.43

a) 45 b) 21 c) 35

R.1.44 $C_2^n = 105$, donc $n = 15$

R.1.45 $C_5^{10} C_3^5 C_2^2 = 2\ 520$

R.1.46 $\dfrac{C_4^{12} C_4^8 C_4^4}{3!} = 5\ 775$

R.1.47 $K_{12}^{10} = \dfrac{(12+10-1)!}{12!(10-1)!} = \dfrac{21!}{12!9!} = 293\ 930$

R.1.48 Laissé à l'étudiant.

R.1.49 $\binom{n}{r}$ donne le nombre de façon de choisir r éléments parmi n. Choisissons un éléments au hasard. Il y a $\binom{n-1}{r-1}$ choix qui le contiennent et $\binom{n-1}{r}$ choix qui ne le contiennent pas. Donc la somme des deux donne bien $\binom{n}{r}$.

R.1.50 Laissé à l'étudiant.

R.1.51 Laissé à l'étudiant.

R.1.52 Indice : Utiliser le fait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

R.1.53 $\binom{8}{6} a^{8-6} b^6 = 28a^2b^6$

R.1.54 $\binom{11}{7}(2a)^{11-7}\left(\dfrac{b}{2}\right)^7 = \dfrac{165}{4}a^4b^7$

R.1.55 $x^{12} = (x^2)^6 = (x^2)^{8-2}$,

donc $\binom{8}{6}(x^2)^6(-4y)^2 = 448x^{12}y^2$

R.1.56 $\binom{8}{4}\left(\dfrac{2}{x}\right)^4\left(\dfrac{x}{2}\right)^{8-4} = 70$

R.1.57 $103^3 = (100+3)^3 = \ldots = 1\ 092\ 727$

R.1.58 Chaque $\binom{n}{k}$ compte le nombre de sous-ensembles de taille k, donc la somme compte tous les sous-ensemble possible. En posant $x = 1$ et $y = 1$, le binôme de Newton nous donne

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

R.1.59 En posant $x = 1$ et $y = -1$, le binôme de Newton nous donne

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k}$$

Et on envoi les termes négatifs de l'autre côté de l'équation.

R.1.60 280

R.1.61 28

R.1.62 $27 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 101$

R.1.63 360

R.1.64

a) 60
b) 15

R.1.65

a) 16 416 000
b) 2 462 400
c) 259 200
d) 43 200
e) 1 231 200
f) 41 040
g) 8640
h) 14 400
i) 129 600

R.1.66

a) 120
b) 24
c) 30 240

R.1.67

a) $A_4^{10} = 5\ 040$
b) $C_4^{10} = 210$

R.1.68

a) 969
b) 20
c) 360
d) 216
e) 444
f) 849

R.1.69

a) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
b) $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$
c) $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$
d) $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
e) $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$
f) $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
g) $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$

R.1.70

a) $\dfrac{9!}{2!2!2!} = 45\ 360$
b) $6! = 720$
c) $\dfrac{6!}{2!2!} \cdot \dfrac{4!}{2!} = 2\ 160$
d) $3 \cdot \dfrac{7!}{2!2!} = 3\ 780$
e) $C_1^2 \cdot \dfrac{8!}{2!2!2!} + C_1^2 \cdot \dfrac{8!}{2!2!} \div 2! = 20\ 160$

R.1.71 1 260

R.1.72 Après que chaque enfant ait reçu une pomme, il reste 3 pommes et 6 oranges à distribuer à 4 enfants (avec répétition), donc $K_3^4 K_6^4 = \dfrac{6!}{3!3!} \cdot \dfrac{9!}{6!3!} = 1\ 680$

R.1.73 $2^9 = 512$

R.1.74 192

R.1.75

a) $C_1^4 \cdot C_{12}^{48}$
b) $C_1^1 \cdot C_{12}^{51}$
c) $C_{13}^{52} - C_{13}^{48} = C_1^4 \cdot C_{12}^{48} + C_2^4 \cdot C_{11}^{48} + C_3^4 \cdot C_{10}^{48} + C_4^4 \cdot C_9^{48}$
d) $C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_{11}^{44}$
e) $C_1^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^8 \cdot C_9^{36}$
f) $\left(C_1^4\right)^{13} = 4^{13}$

R.1.76 $C_3^4 \cdot \dfrac{C_1^{48} C_1^{44}}{2!}$ ou $C_3^4 C_2^{12} C_1^4 C_1^4 = 4\ 224$

R.1.77 $\dfrac{n-1}{n+1}$

R.1.78 $\dfrac{1}{n}$

R.1.79 Solutions : $n = 3$ ou $n = 5$

R.1.80 Solution : $n = 11$

R.1.81 Solution : $n = 7$

R.1.82 $-792 x^{21} y^5$