1.1 PRÉLIMINAIRES

Cours 1

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Quelques notations
- ✓ Les ensembles de nombres
- ✓ Les fonctions

Quelques notations

Les ensembles

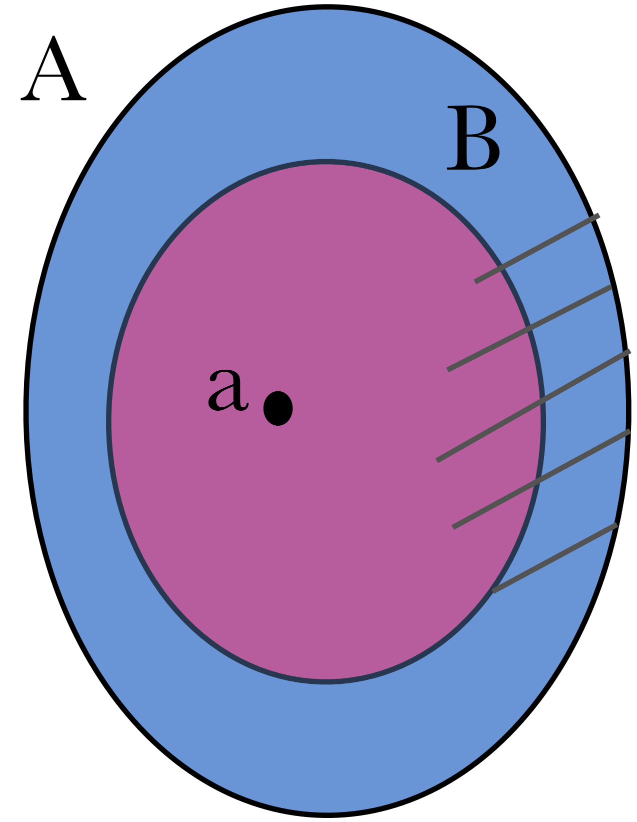
L'ensemble vide: $\emptyset$

Élément de: $a \in A$

Sous-ensemble de: $B \subset A$

Union: $A \cup B$

Intersection: $A \cap B$



La logique

Si ... alors $\Longrightarrow$

Si et seulement si $\Longleftrightarrow$

Pour tous: $\forall$

Il existe: $\exists$

Les ensembles de nombres

Les entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Le fait d'inclure le 0 ou non est une convention qui varie d'un auteur à un autre. Si l'on veut l'exclure, nous l'indiquerons ainsi:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Deux sous-ensembles des entiers sont l'ensemble des nombres pairs et celui des nombres impairs.

$$\text{Pair} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{Impair} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{Pair} \subset \mathbb{N} \qquad \text{Impair} \subset \mathbb{N}$$

$$\text{Pair} \cup \text{Impair} = \mathbb{N}$$

$$\text{Pair} \cap \text{Impair} = \emptyset$$

Les entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

On a que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Les rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0 \right\}$$

$=$ Nombre à développement décimal périodique

Mais pourquoi ces deux descriptions définissent le même ensemble?

À priori, rien n'indique qu'ils représentent la même chose!

Voyons, à l'aide d'exemple, pourquoi

$$\left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0 \right\} \quad = \quad \text{Nombre à développement décimal périodique}$$

En fait, pour vérifier que deux ensembles sont égaux, il suffit de vérifier que l'un est inclus dans l'autre et vice versa.

C'est à dire $\quad A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A \quad \Longrightarrow B = A$

Dans un premier temps, prenons un nombre à développement décimal périodique et vérifions que c'est une fraction.

Ensuite, nous prendrons une fraction et vérifierons que c'est un nombre à développement décimal périodique.

Prenons le nombre $2,\overline{123} = 2,123123123123123123\ldots$

On peut décomposer ce nombre comme suit: $2,\overline{123} = 2 + x$

avec $x = 0,\overline{123}$

$$1000x = 123,\overline{123}$$

$$123 = 1000x - x = (1000-1)x = 999x$$

d'où $x = \dfrac{123}{999}$

$$2,\overline{123} = 2 + x = 2 + \frac{123}{999} = \frac{1998}{999} + \frac{123}{999} = \frac{2121}{999}$$

Donc $2,\overline{123} = \dfrac{2121}{999}$ est bien une fraction.

Certaines fractions ont des développements décimaux très simples, par exemple

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,50000000000000\ldots \quad = 0,5\overline{0}$$

Oui, le développement décimal est périodique, mais on ne voit pas trop pourquoi.

Prenons une fraction un peu plus parlante.

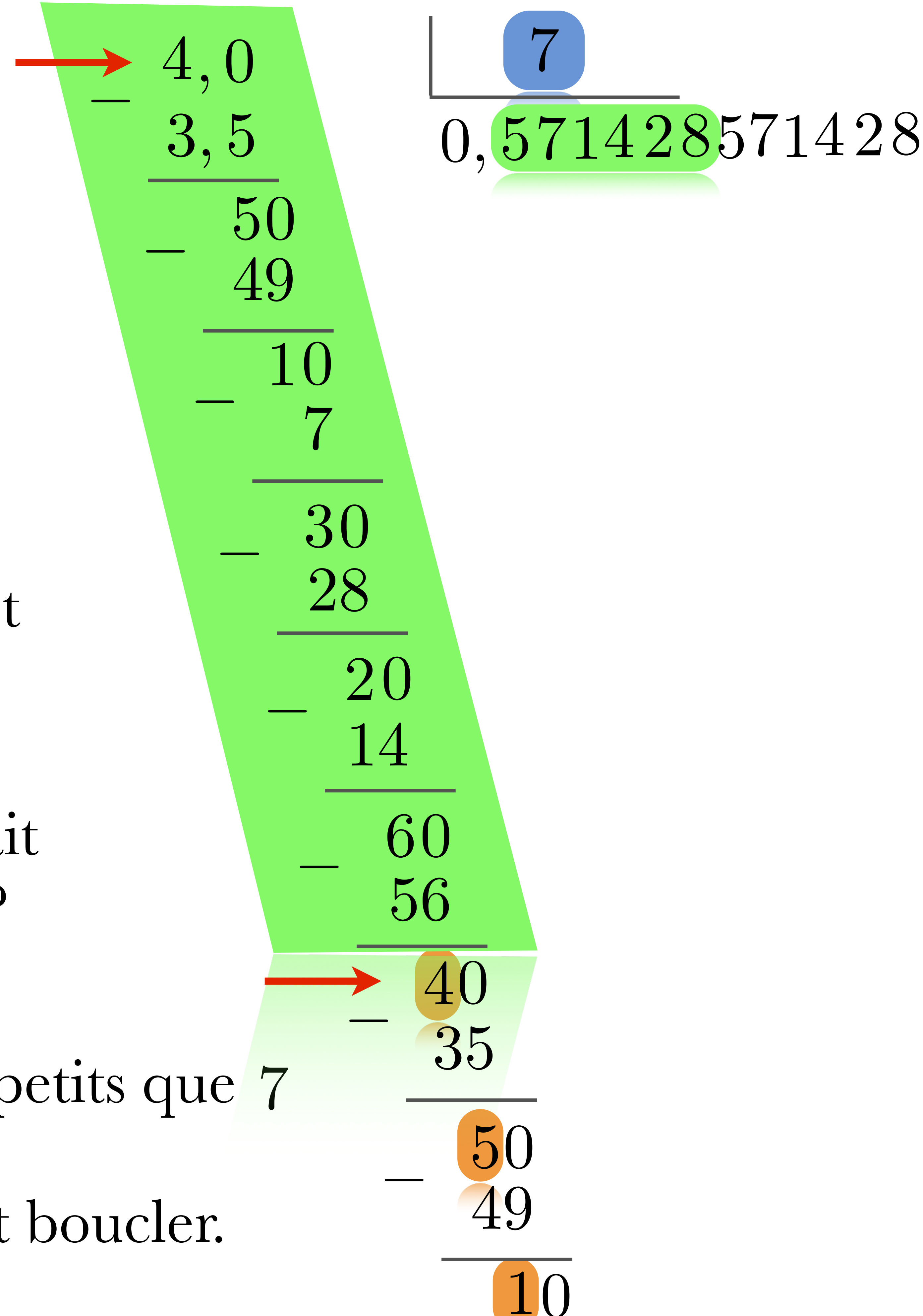
Prenons la fraction $\frac{4}{7}$

On a donc que

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{57148}$$

et on voit donc que son développement décimal est périodique.

Mais pourquoi ça devrait marcher tout le temps?



Car les restes sont tous plus petits que 7

Donc on va inévitablement boucler.

Les réels

$\mathbb{R}$ = Les nombres à virgule.

Vous savez qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels.

Par exemple: $\pi \approx 3,141592653589\ldots$

$e \approx 2,718281828459\ldots$

$\phi \approx 1,618033988749\ldots$ (le nombre d'or)

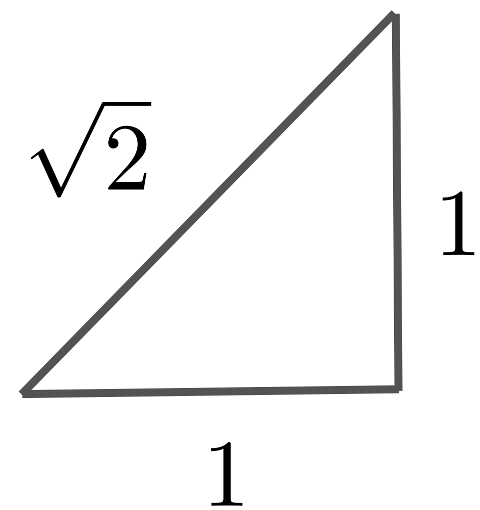
Mais comment fait-on pour savoir que leurs développements ne sont pas périodiques?

Ces nombres pourraient avoir des périodes très grandes!

Vérifier qu'un nombre n'est pas rationnel est en général très compliqué.

Il serait quand même bien de pouvoir vérifier, au moins pour un nombre, qu'il existe bien des nombres irrationnels

Si on prend le triangle suivant



par Pythagore, on a que

est un nombre qui apparait assez naturellement en mathématique.

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237309\ldots$$

Est-il une fraction?

Théorème $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Nous allons prouver ceci par contradiction.
C'est-à-dire, on suppose le contraire et si cette supposition entraîne une contradiction, cela voudra dire que notre supposition était fausse.

Preuve: Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ c'est à dire $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ sa fraction réduite.

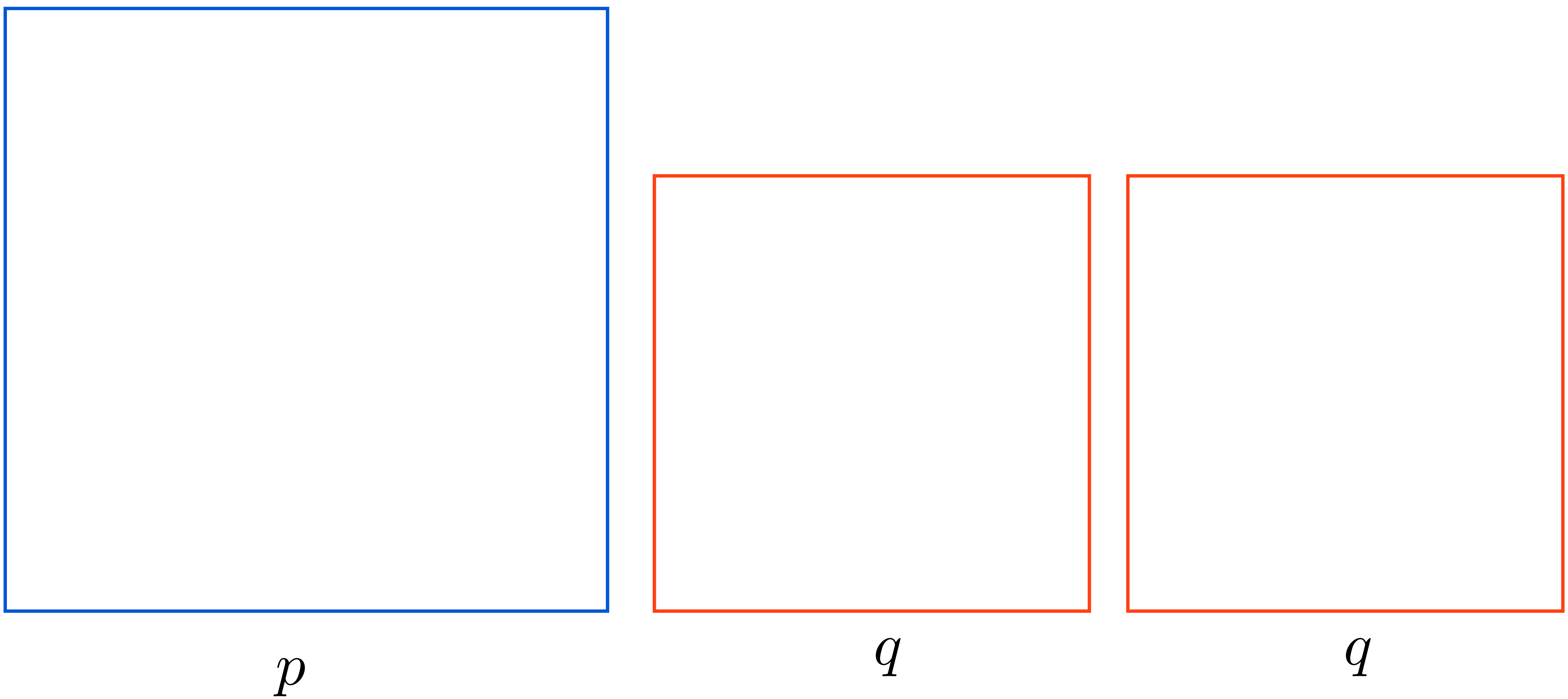
$$2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$$

Preuve: Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ c'est à dire $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$

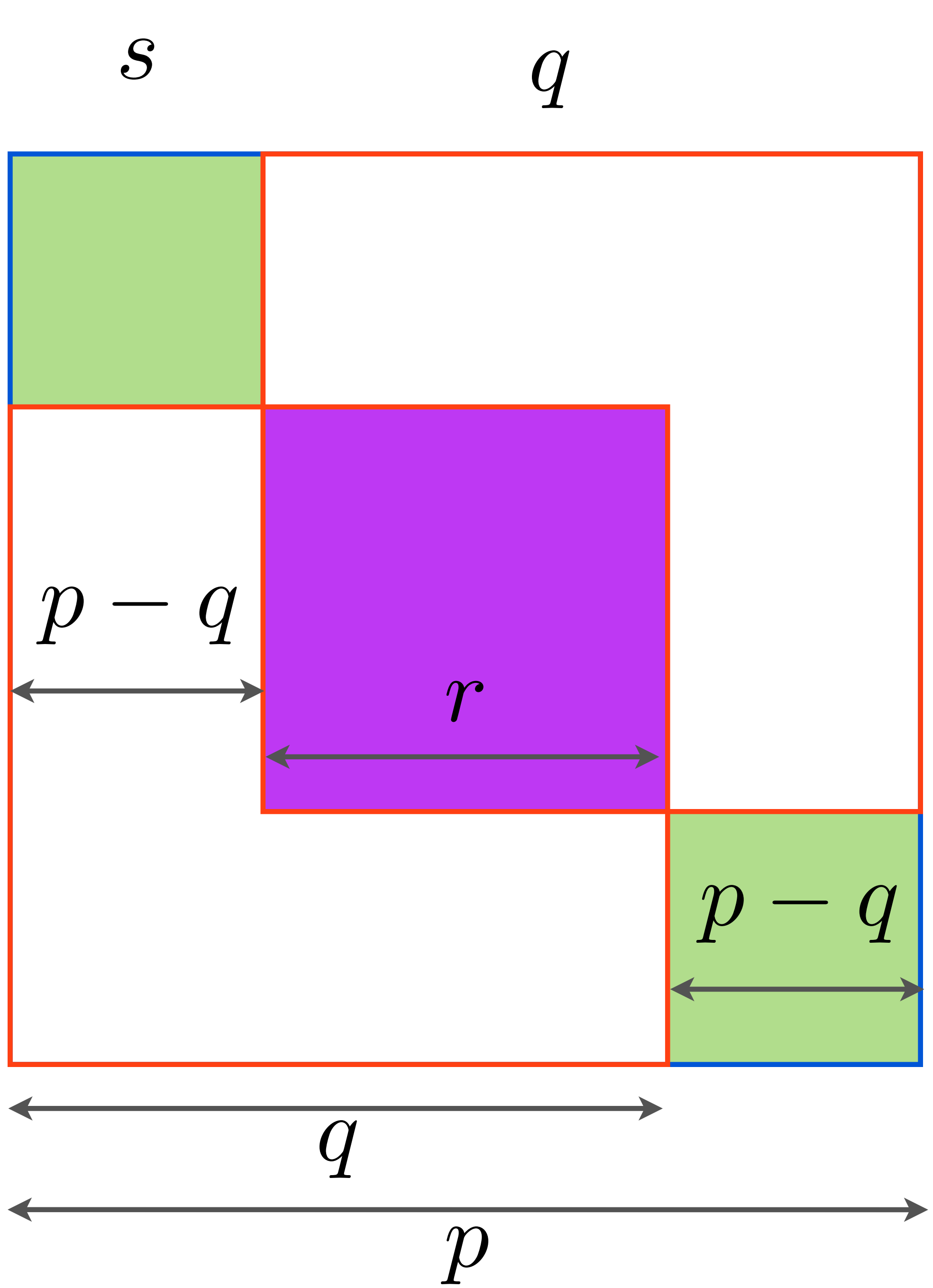
sa fraction réduite. $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$

Implique que p et q sont les plus petits entiers qui respectent

et donc ça aussi. On peut interpréter ceci géométriquement.



Preuve: Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ c'est à dire $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ sa fraction réduite. $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$



$$\begin{aligned} q-(p-q) &= q-p+q \\ &= 2q-p \\ &= r \\ p-q &= s \end{aligned}$$

$$r^2 = 2s^2$$

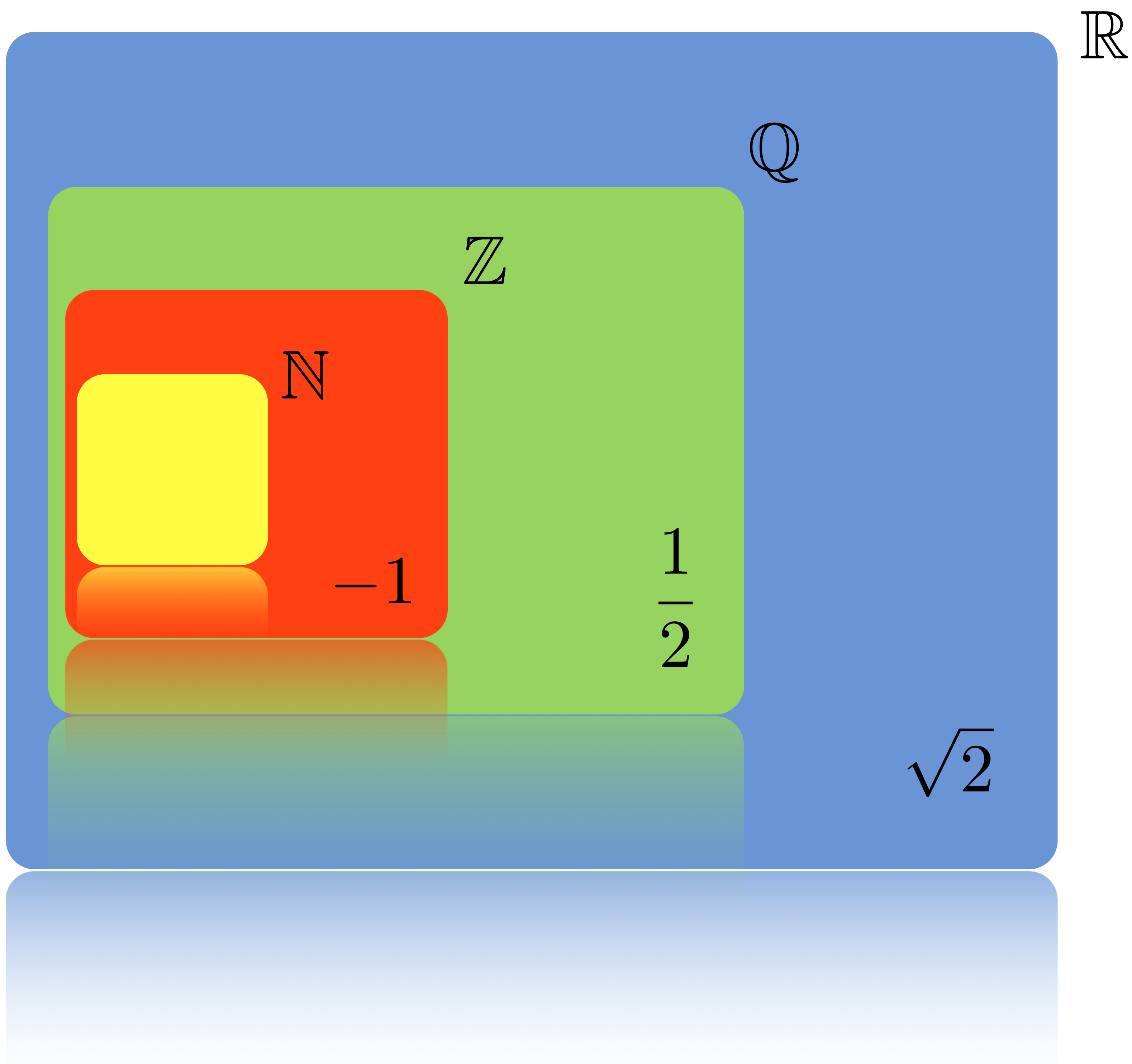
où $r < p$, $s < q$

et $r,s \in \mathbb{Z}$

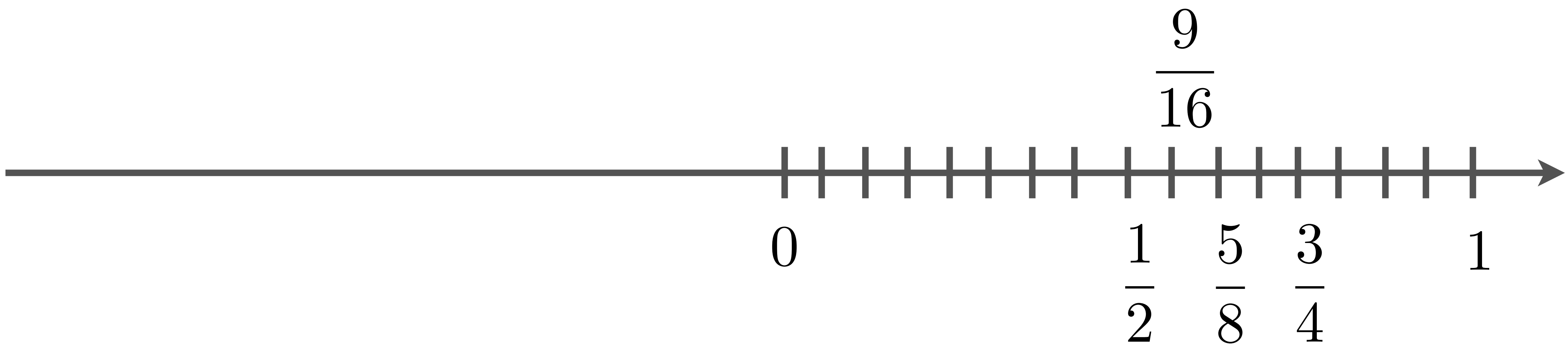
On obtient donc une contradiction.

Ces ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres comme suit:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



On représente habituellement les réels sur un axe.



Les réels et les rationnels ont la propriété d'être denses.

C'est-à-dire qu'entre deux rationnels, il y en a toujours un autre.

Par contre les naturels et les entiers relatifs ne le sont pas.

Les fonctions

Les fonctions vont être les objets d'étude centrale du cours.

En gros, les fonctions servent à expliciter un lien entre deux quantités.

Vous devriez déjà avoir une connaissance des fonctions, donc ce qui suit est une petite révision.

Ou du moins, des notions connues vues sous un nouvel angle.

Définition Une **relation** entre deux ensembles A et B est un sous-ensemble R du produit cartésien $A \times B$.

$$R \subset A \times B$$

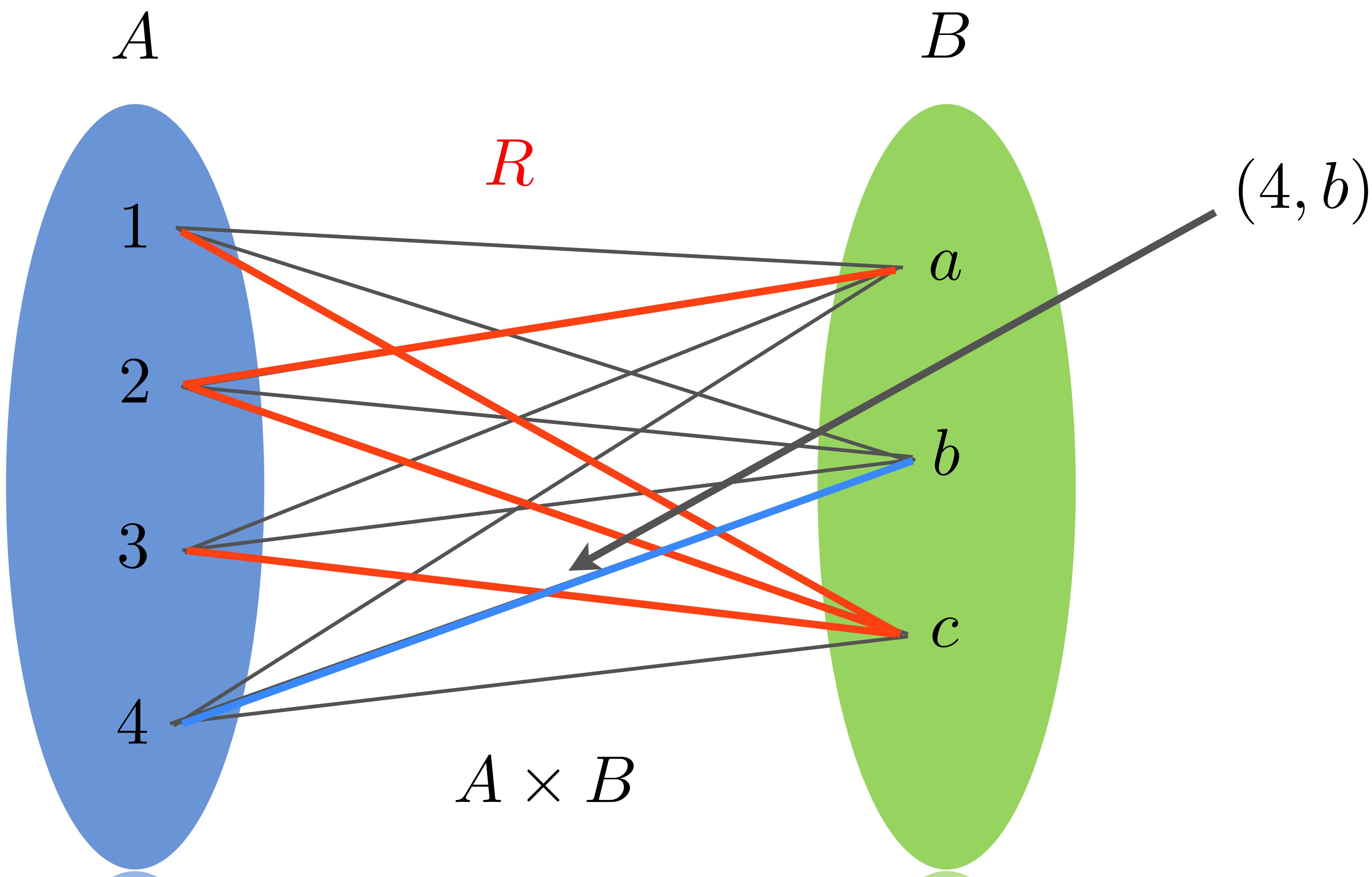
Exemple $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b, c\}$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

$$R = \{(1, c), (2, a), (2, b), (3, c)\}$$

Est une relation car $R \subset A \times B$

On illustre habituellement l'exemple précédent comme suit.

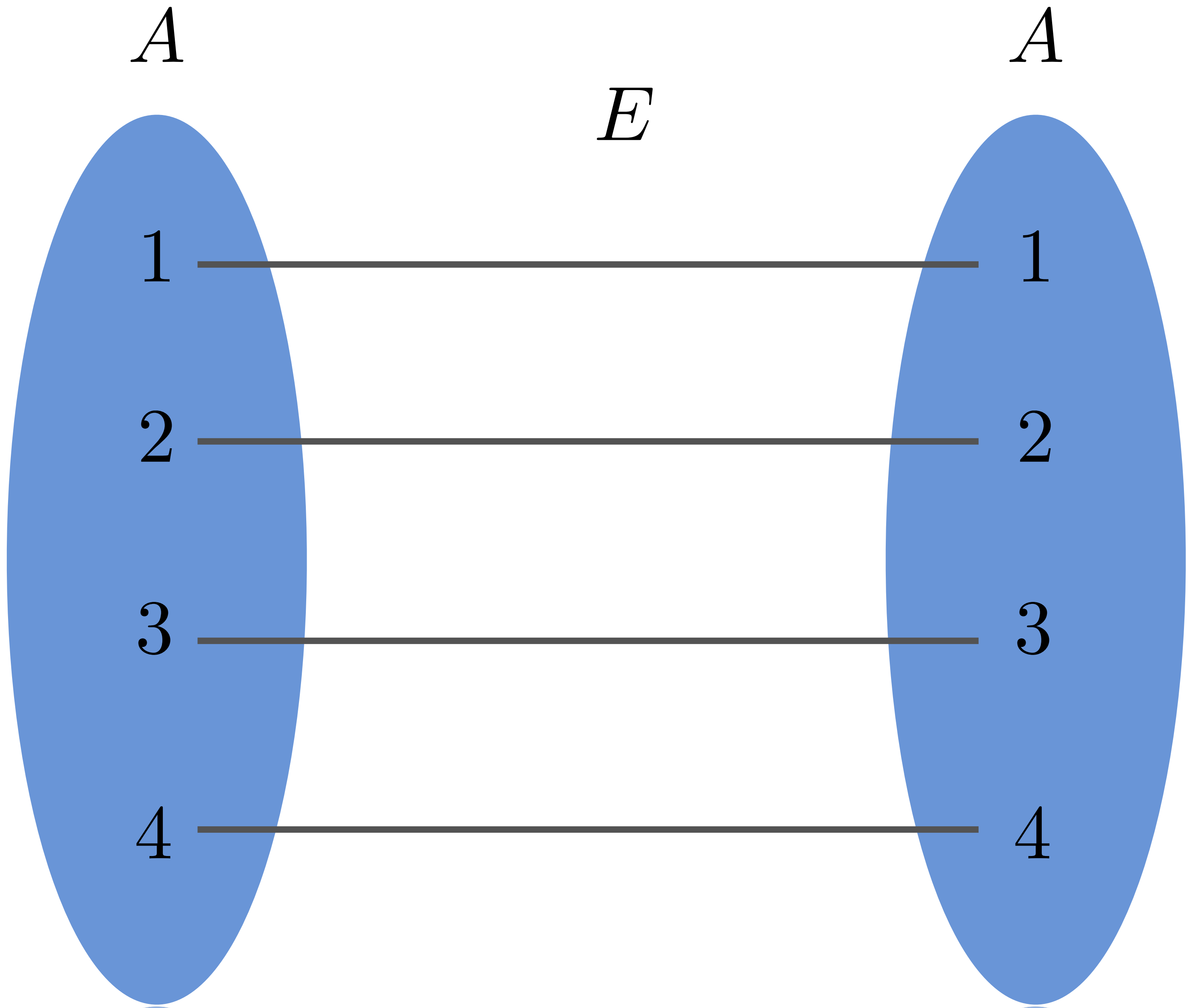


Dans cet exemple, on peut dire que 1 est en relation avec c, que 2 est en relation avec a et avec c et que 3 est en relation avec c.

La nature de cette relation dépend bien sûr du contexte.

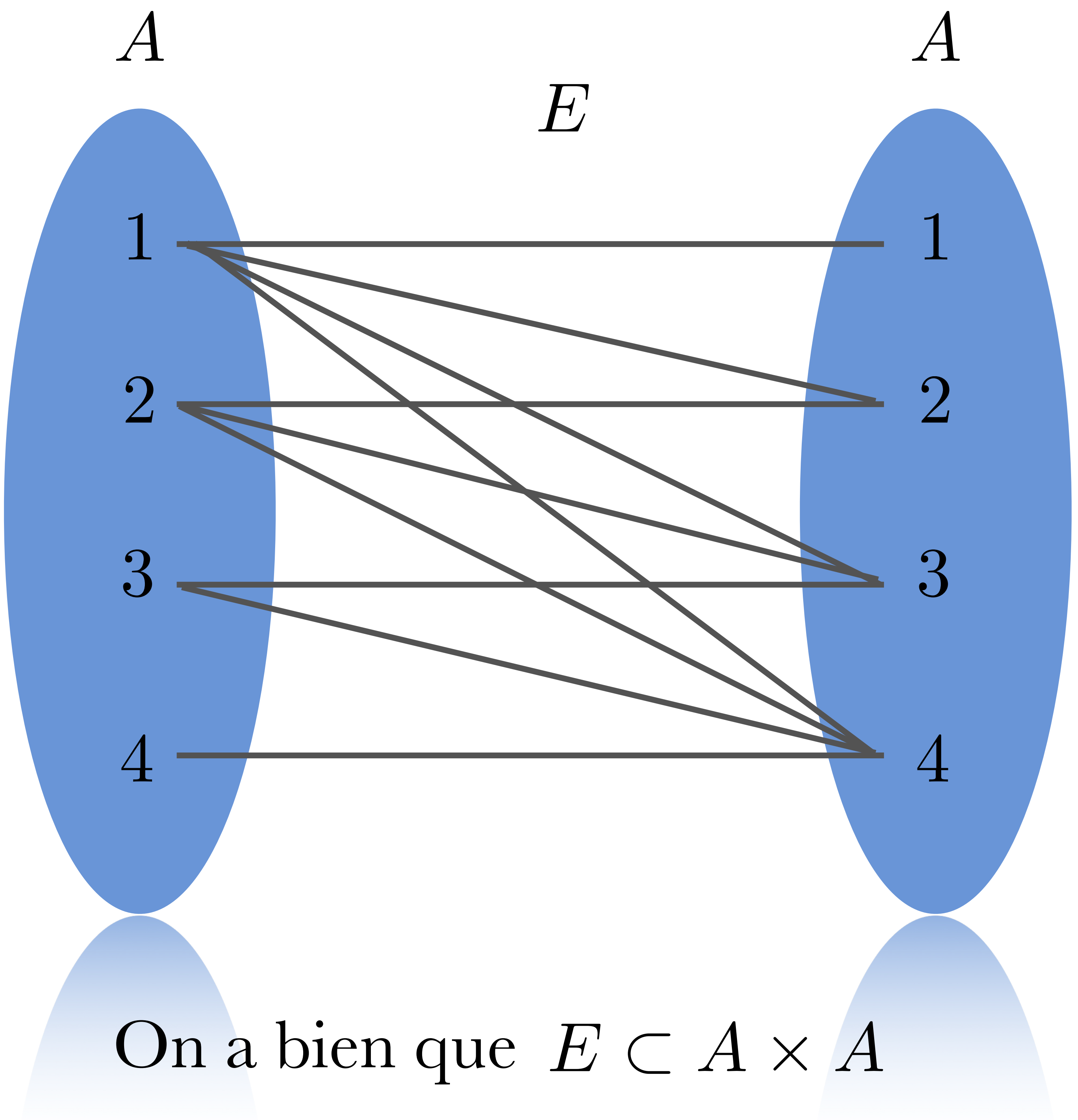
Vous connaissez déjà certaines relations.

Par exemple l’égalité.



On a bien que $E \subset A \times A$

Ou même l'inégalité $(\leq)$



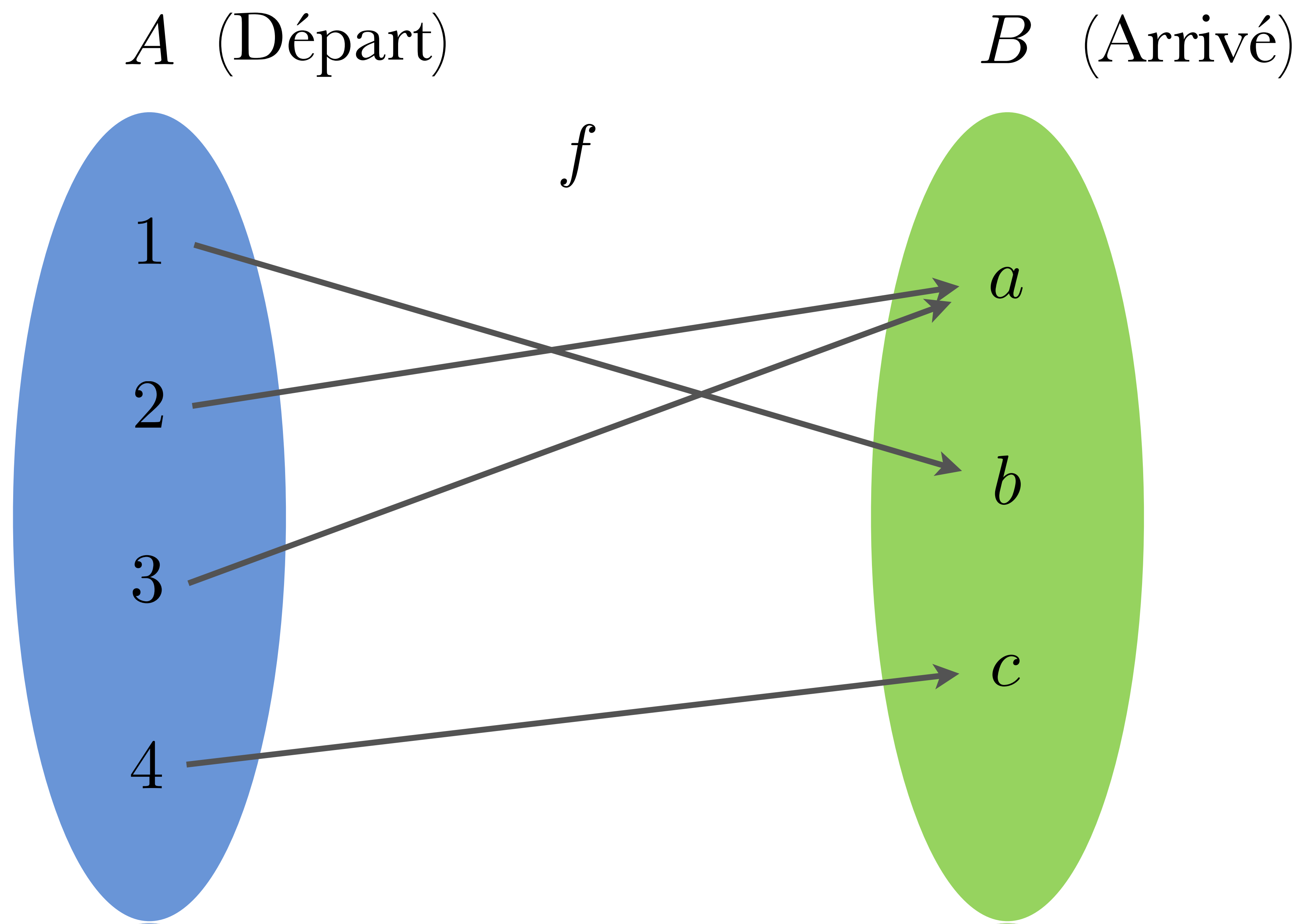
On a bien que $E \subset A \times A$

La raison qu'on vient de parler de relation est qu'une fonction est un cas particulier de relation.

Définition

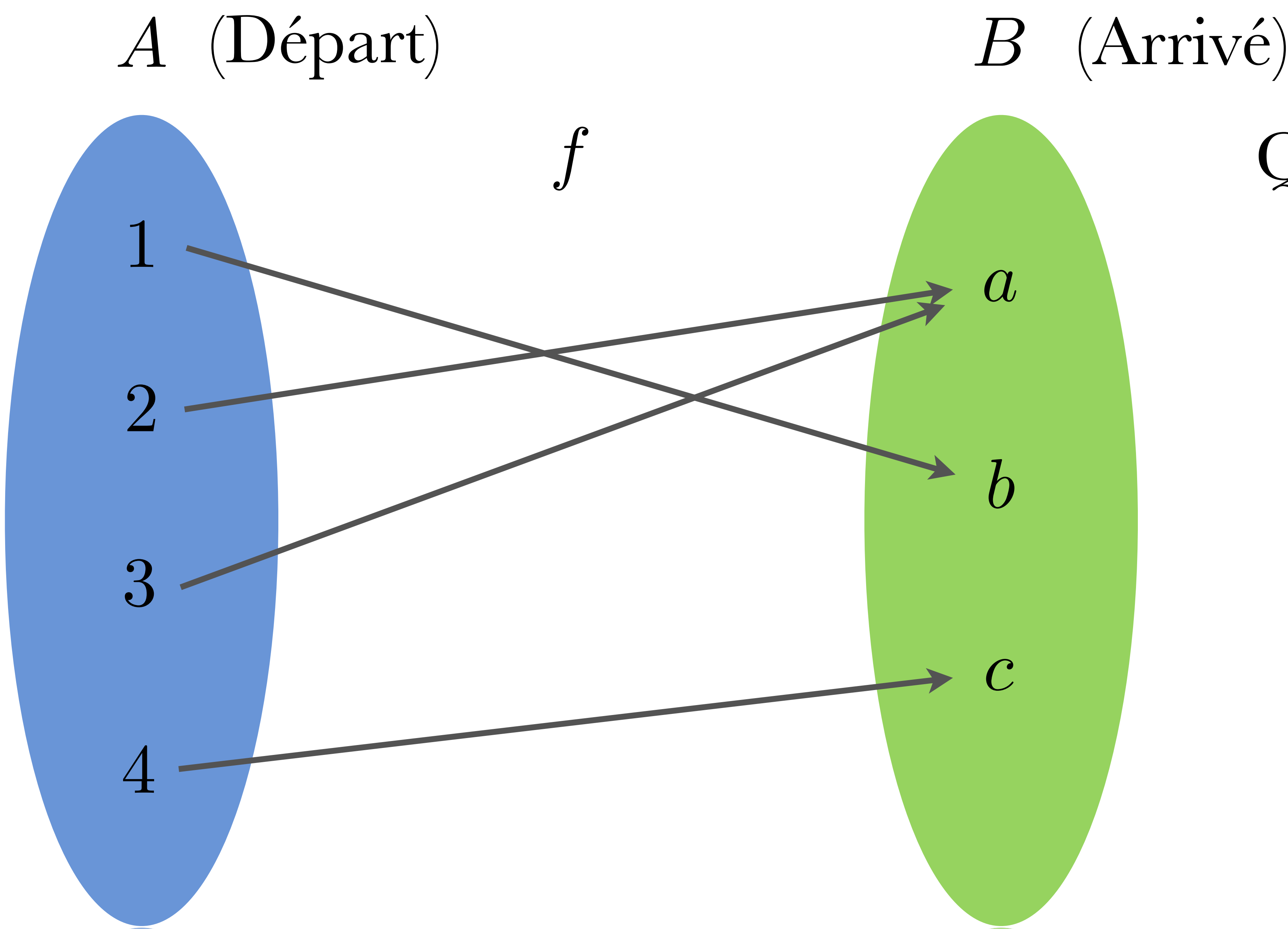
Une **fonction** est une relation telle que chaque élément d'un des deux ensembles (qu'on nomme l'ensemble de départ) est en relation avec au plus un élément de l'autre ensemble (qu'on nomme l'ensemble d'arrivé).

Contrairement à la modélisation de la relation, on utilise des flèches pour les fonctions question de faire ressortir l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivé.



En d'autres termes, une fonction est une relation dont au plus une seule flèche sort des éléments de l'ensemble de départ

Contrairement à la modélisation de la relation, on utilise des flèches pour les fonctions pour faire ressortir l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivé.



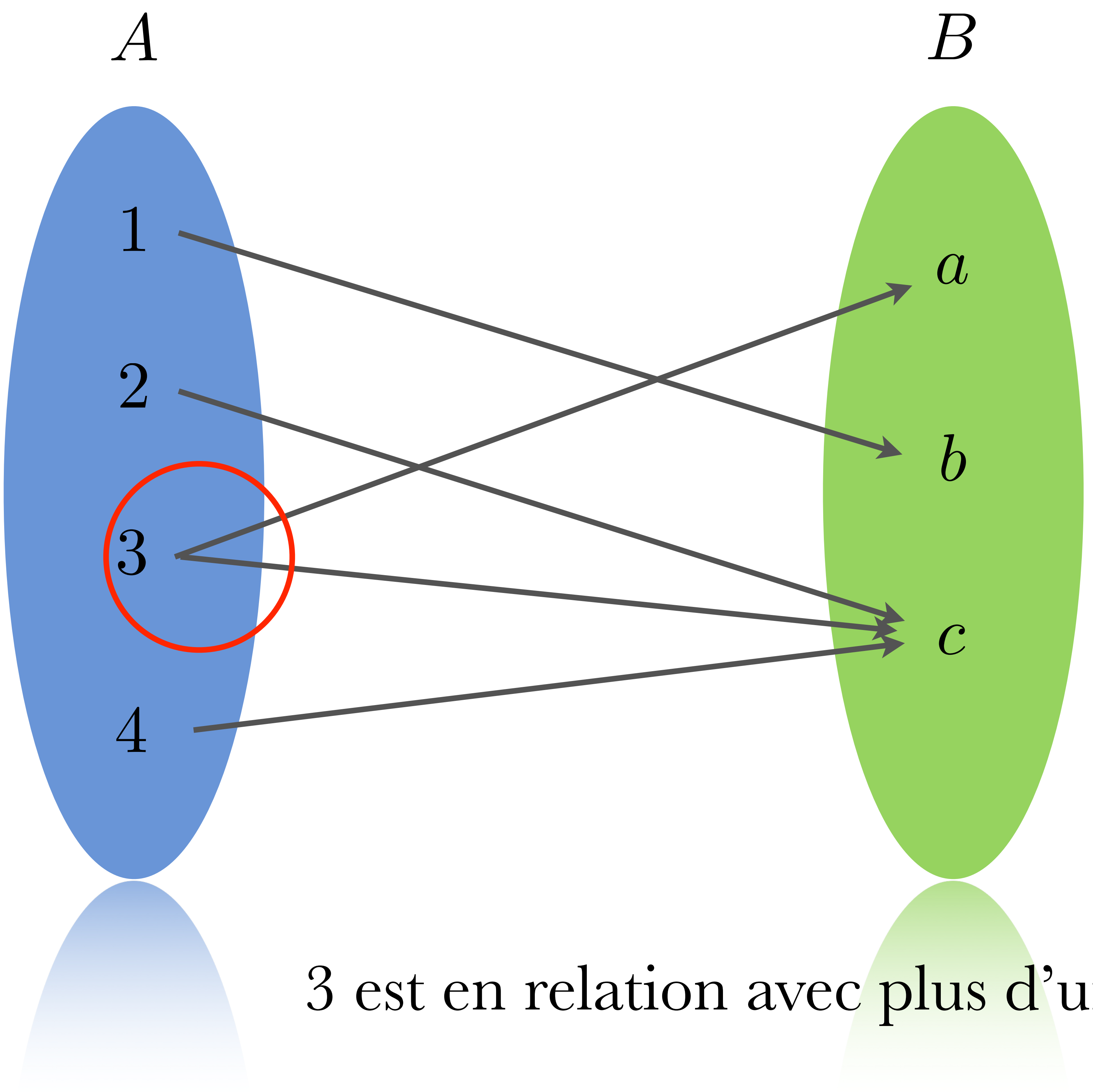
Quelques notations:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ 2 &\longmapsto a \end{aligned}$$

$$f(2) = a$$

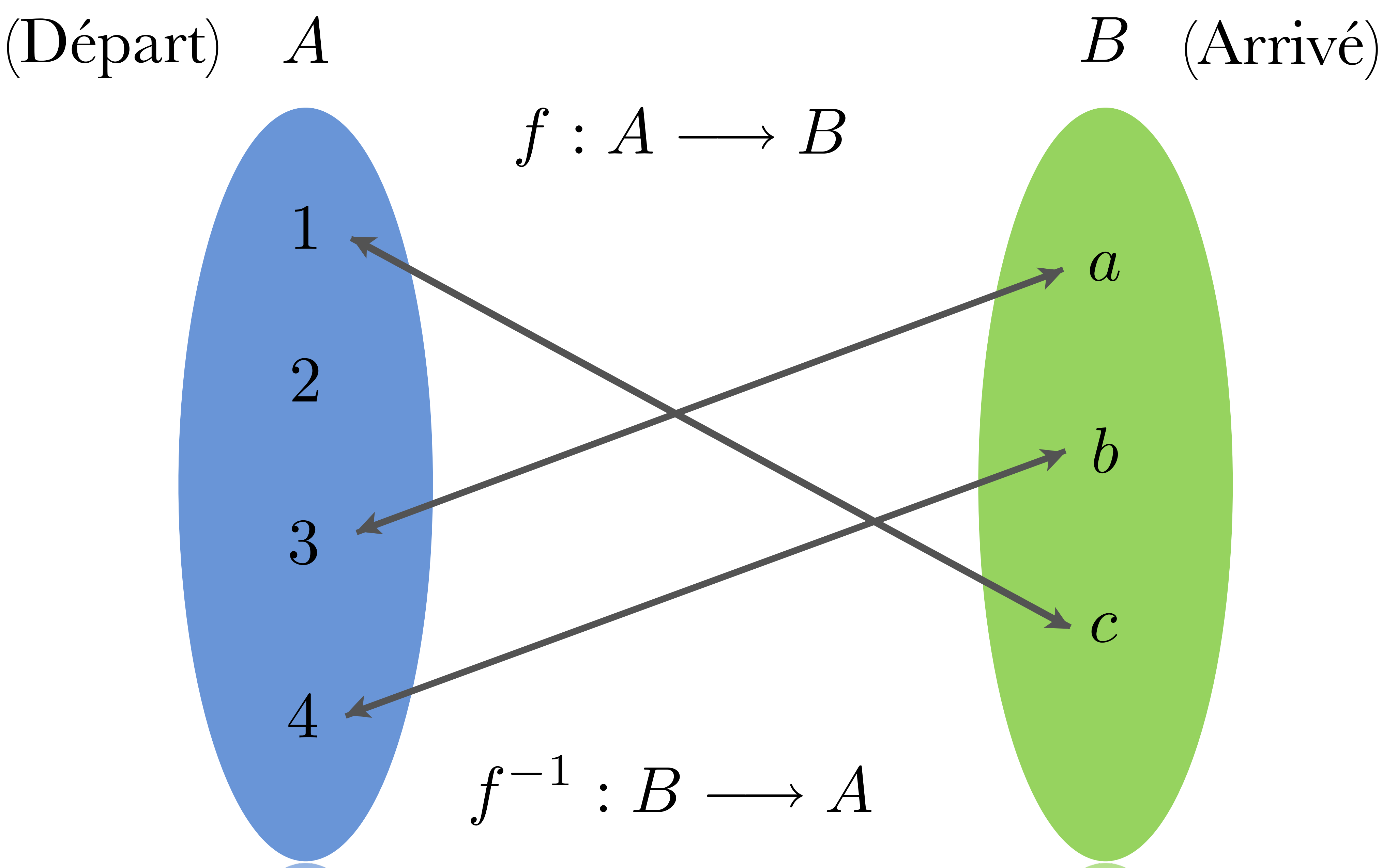
En d'autres termes, une fonction est une relation dont au plus une seule flèche sort des éléments de l'ensemble de départ

La relation suivante n'est pas une fonction car



3 est en relation avec plus d'un élément de B

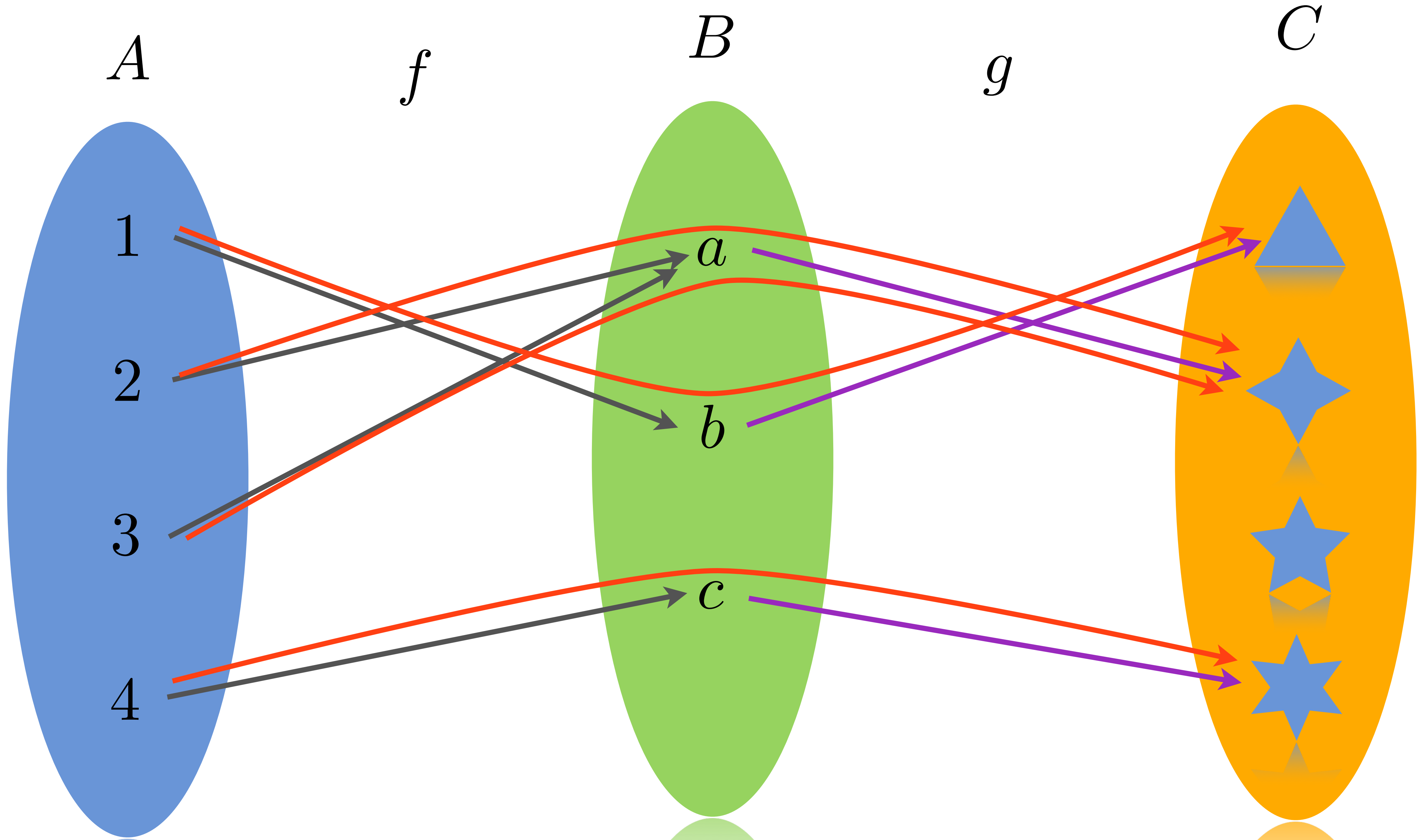
Parfois une fonction a la particularité que si l'on interchange



on obtient aussi une fonction.

On nomme une telle fonction, la fonction inverse.

Si on a une fonction de A dans B et une fonction de B dans C
On peut construire une fonction de A dans C comme suit.

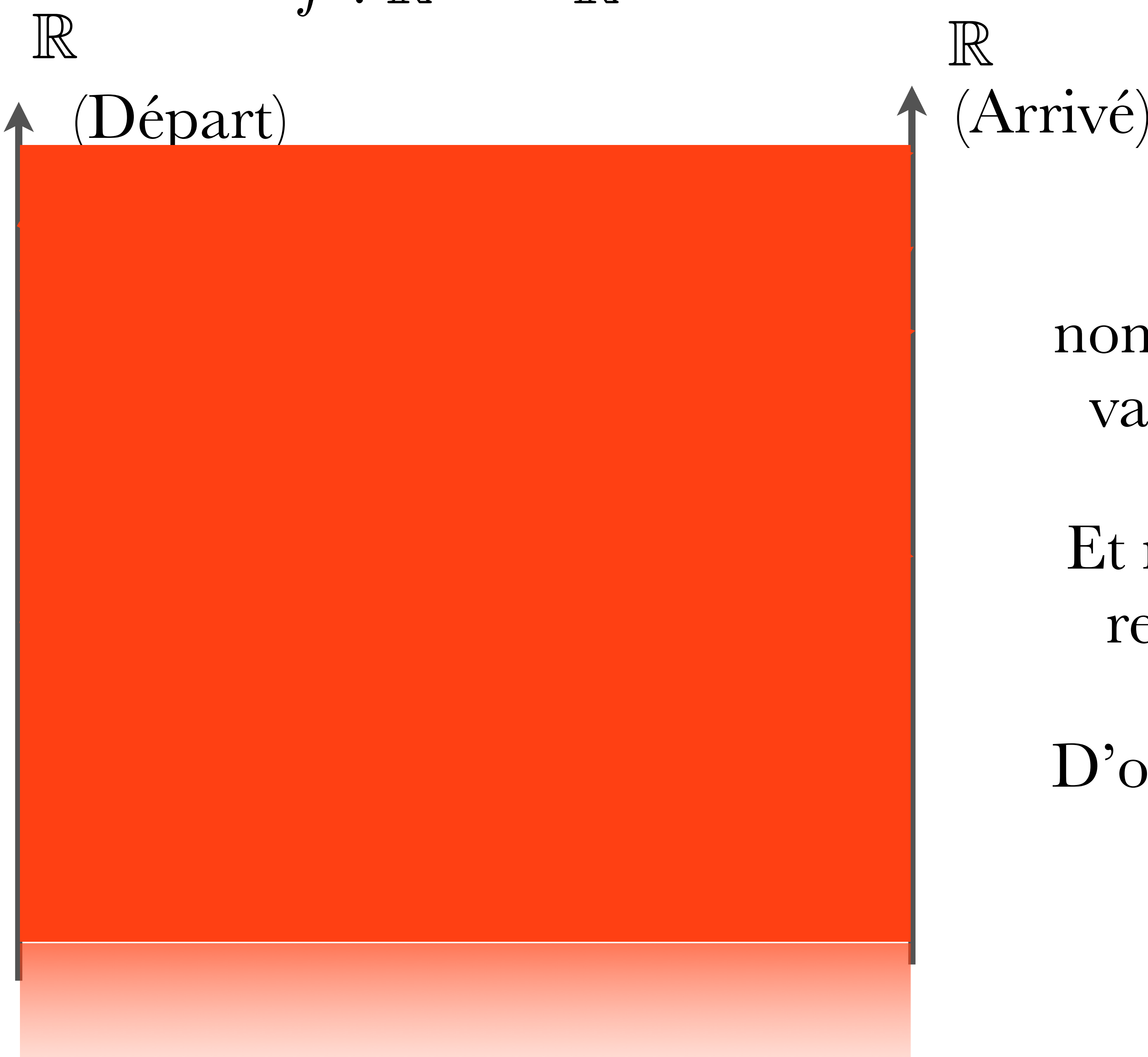


qu'on nomme la composition de fonction et qu'on note $g \circ f$

$$(g \circ f)(2) \quad = g(f(2)) \; = g(a) =$$ 

Maintenant qu'on a vu le concept de fonction, regardons un cas particulier de fonction qui va particulièrement nous intéresser cette session.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



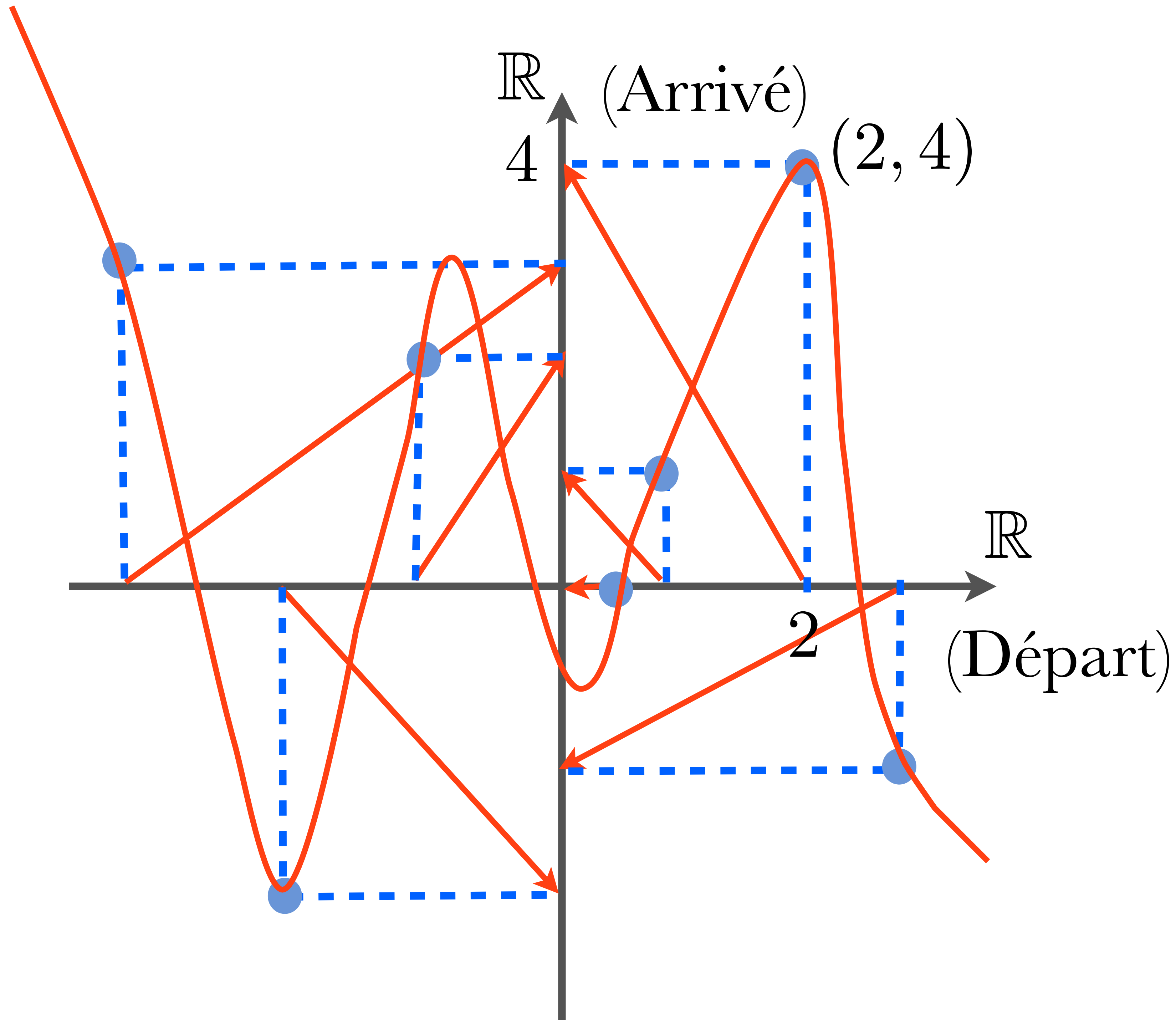
Petit problème:

Étant donné que les nombres réels sont dense, il va y en avoir des flèches!

Et notre modélisation va ressembler plutôt à ...

D'où le stratagème suivant.

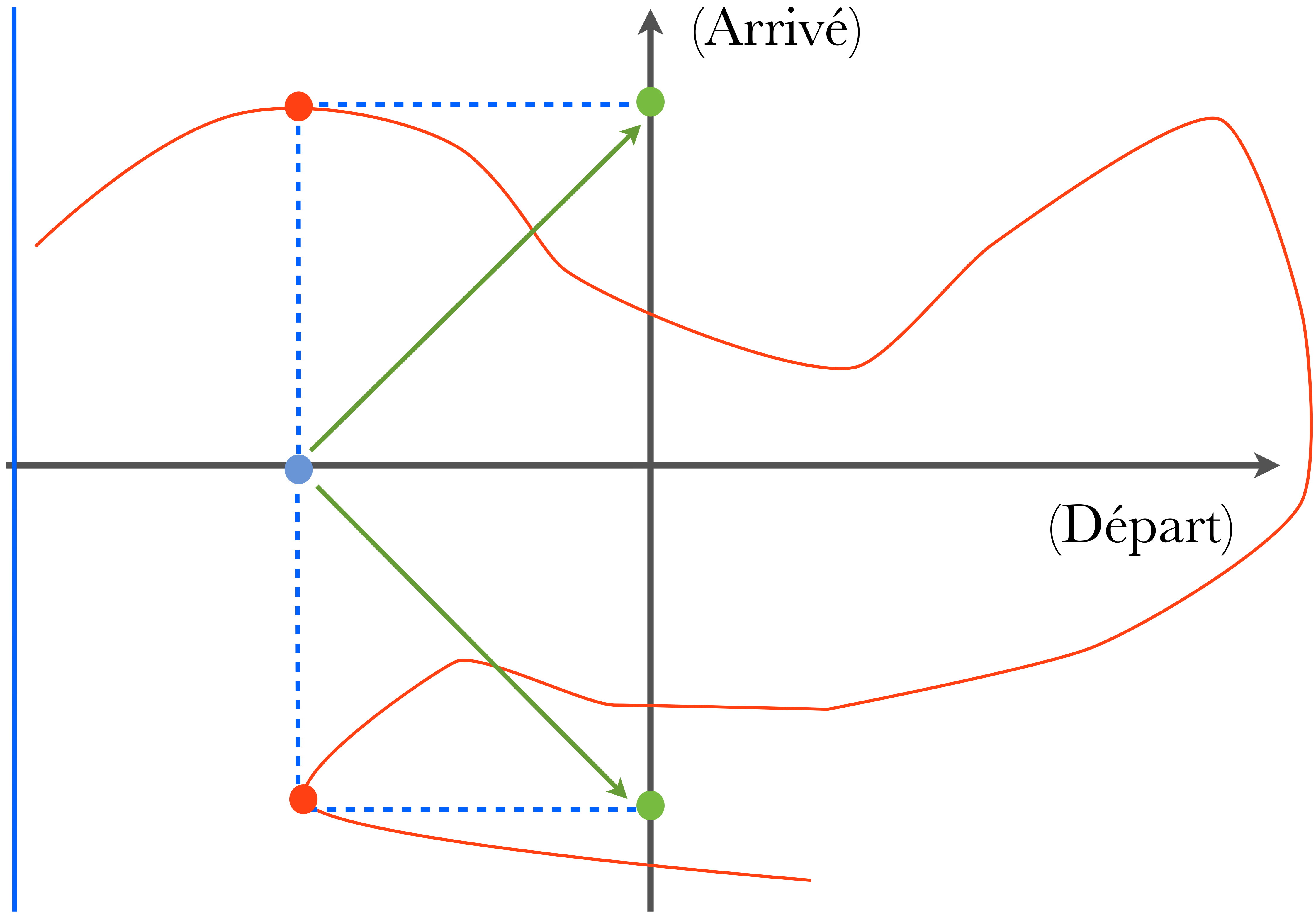
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



On a que

$(2,4) \in f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on note cela plutôt $f(2) = 4$

Ici la relation suivante n'est pas une fonction, car ce nombre



est en relation avec deux nombres.

Faites les exercices suivants

1.1 et 1.2

Bien qu'une fonction soit un ensemble de couples (a, b) telle que chaque a est en relation avec un unique b

on ne va pas les étudier sous cette forme aussi générale.

On va plutôt étudier les fonctions qui sont données à l'aide d'une règle.

Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

qu'on va noter plutôt comme suit $\quad f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

Fonction vs équation.

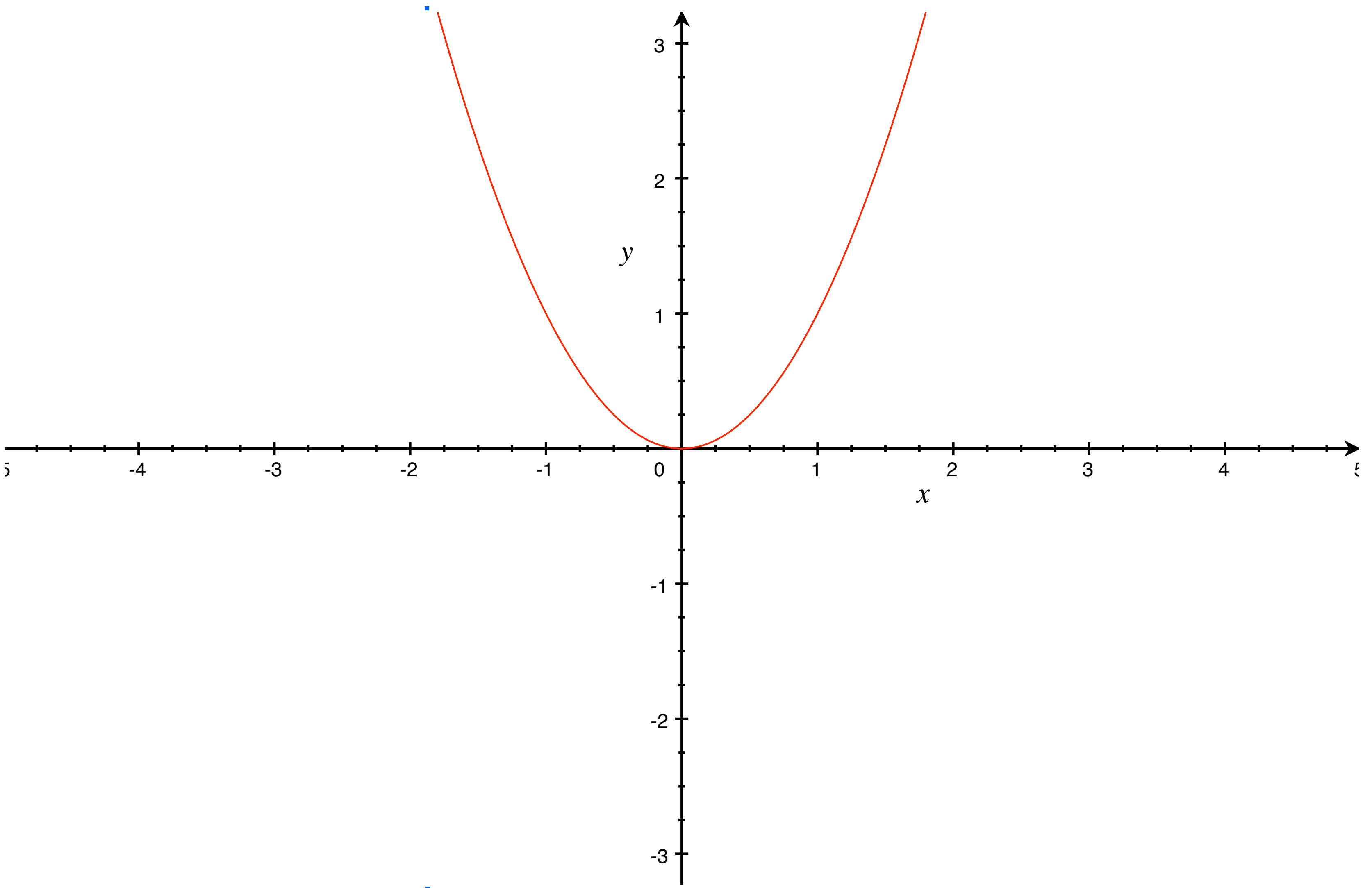
Malheureusement, les deux concepts sont souvent confondus.

Une équation est une relation, mais pas nécessairement une fonction.

Par exemple:

$$x^2 + y^2 = 9$$

mais elle n'est pas une fonction.



Par contre l'équation

$$y = x^2$$

est une fonction et c'est pourquoi on peut écrire: $f(x) = x^2$

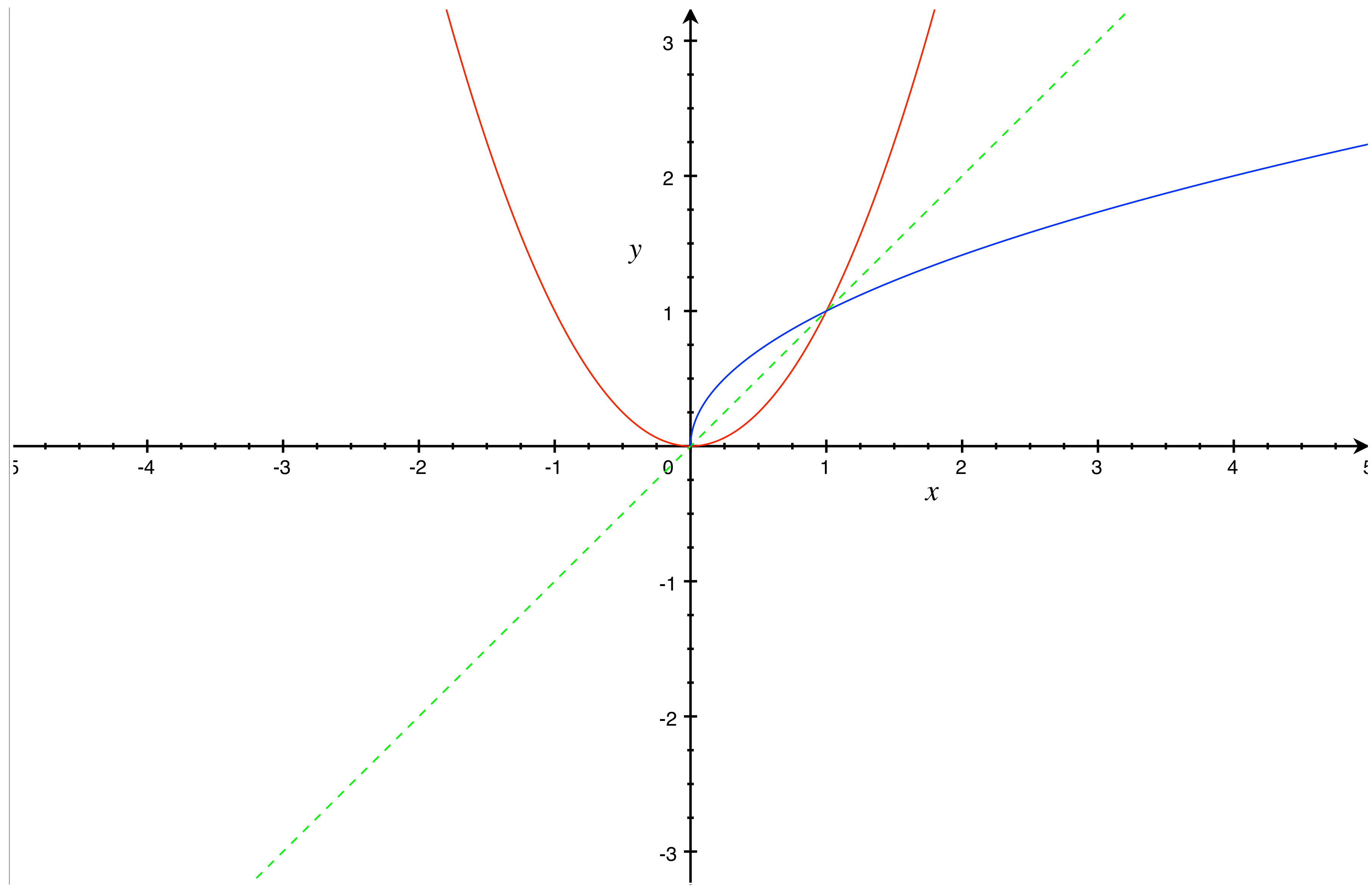
On a vu qu'une fonction inverse interchangeait le rôle de l'ensemble de départ et celui d'arrivé.

Regardons la fonction

$$f(x) = x^2$$

sa fonction inverse est

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



Remarque: La composition de fonction n'est pas commutative.

C'est à dire: $f \circ g \neq g \circ f$

Regardons ceci avec un exemple.

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = x + 1$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) &= (x+1)^2 \\ &= (x+1)(x+1) \\ &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

$$\neq$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

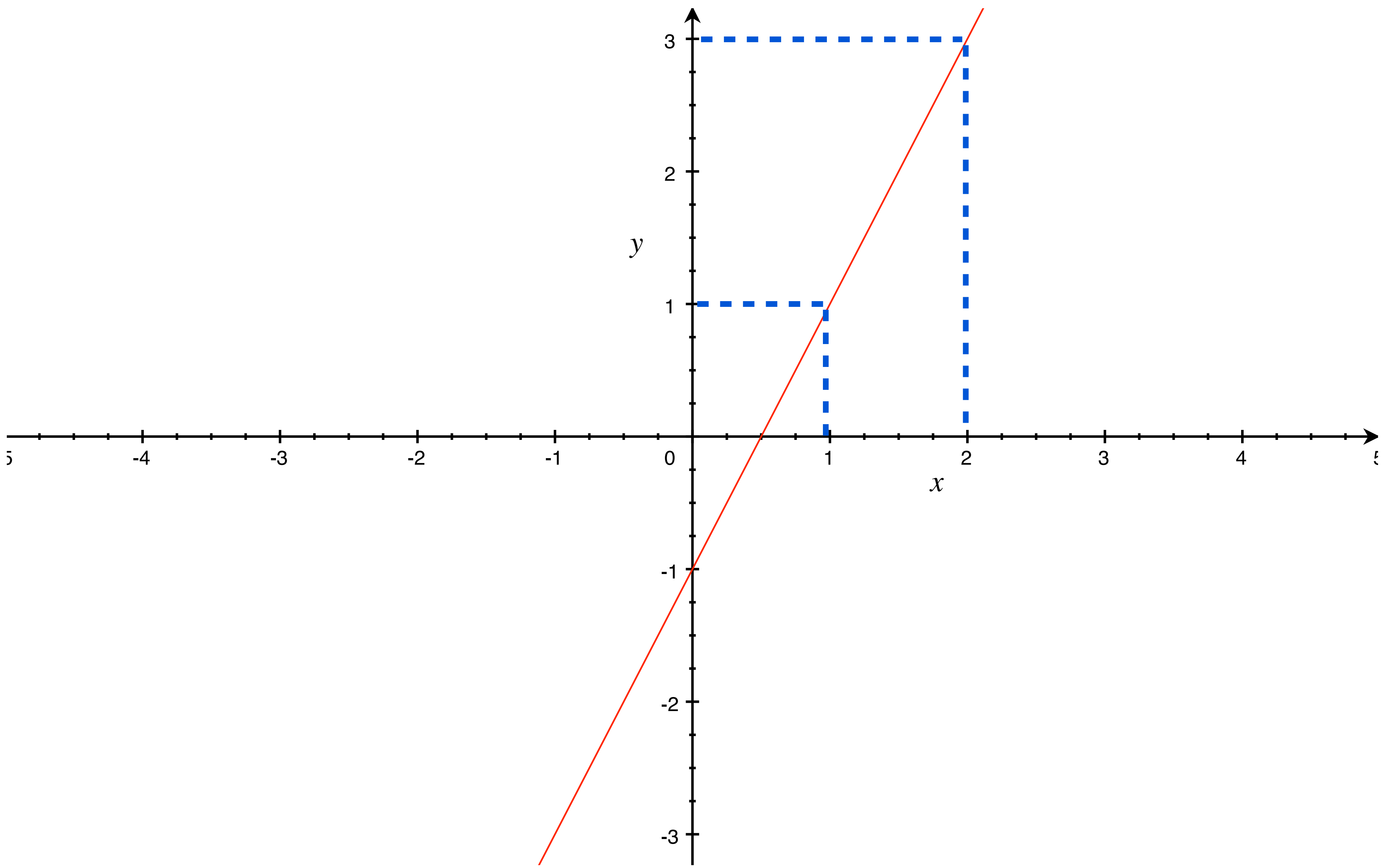
Définition Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme

$$f(x) = ax + b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Exemple $f(x) = 2x - 1$

$$f(1) = 2(1) - 1$$
$$= 1$$

$$f(2) = 2(2) - 1$$
$$= 3$$



On écrit souvent les fonctions linéaires avec les lettres m et b.

$$f(x) = mx + b$$

La pente

L'ordonnée à l'origine

Que b soit l'ordonnée à l'origine est assez direct…

$$f(0) = m(0) + b \;\; = b$$

mais vous êtes vous déjà demandé pourquoi m est la pente?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{mx_2 + \cancel{b} - mx_1 - \cancel{b}}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Définition

La **fonction valeur absolue** est la fonction défini par morceau suivante

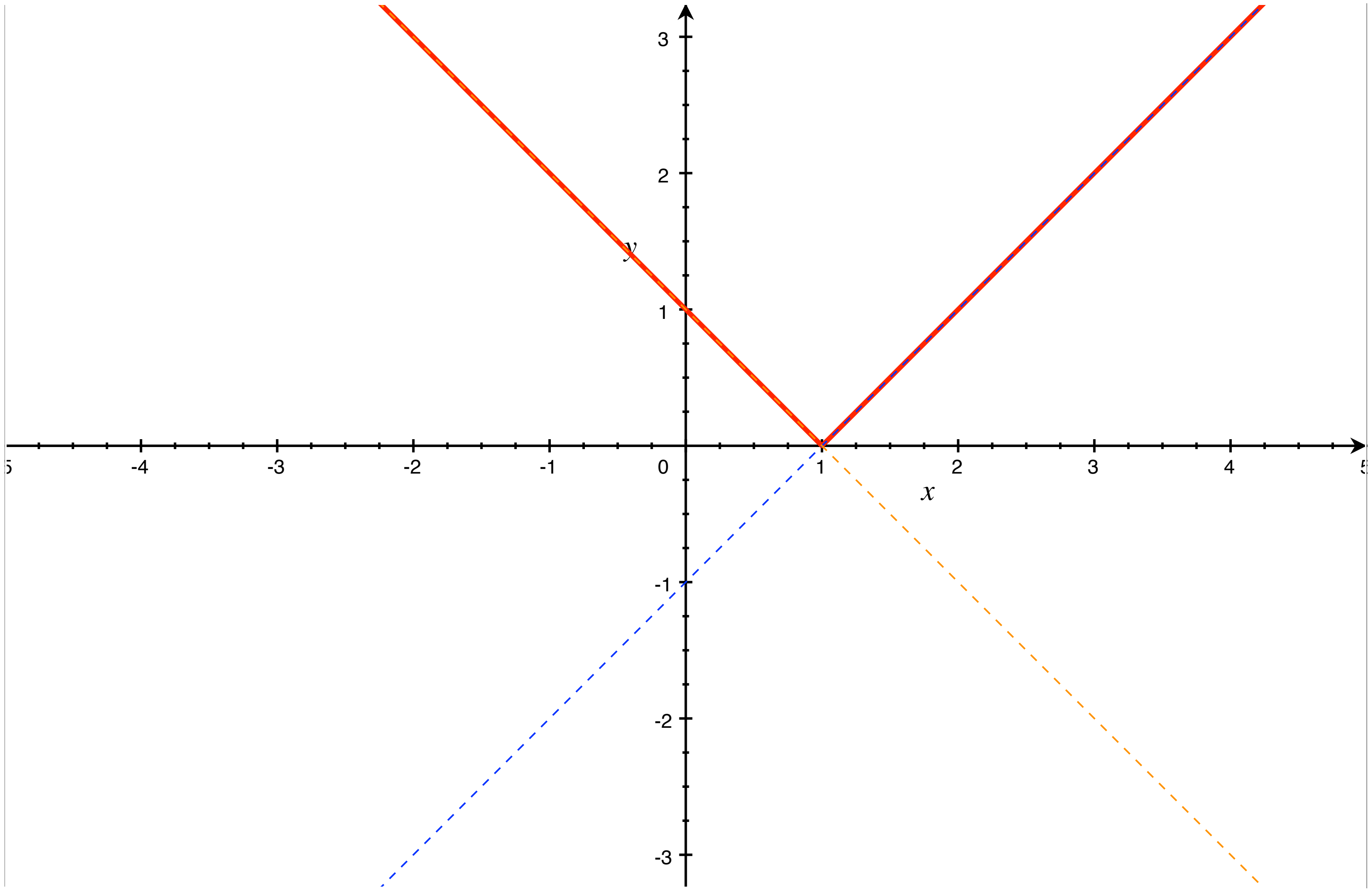
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|$$

Exemple

$$f(x) = |x - 1|$$

$$= \begin{cases} x - 1 & x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases}$$



Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Les ensembles de nombres

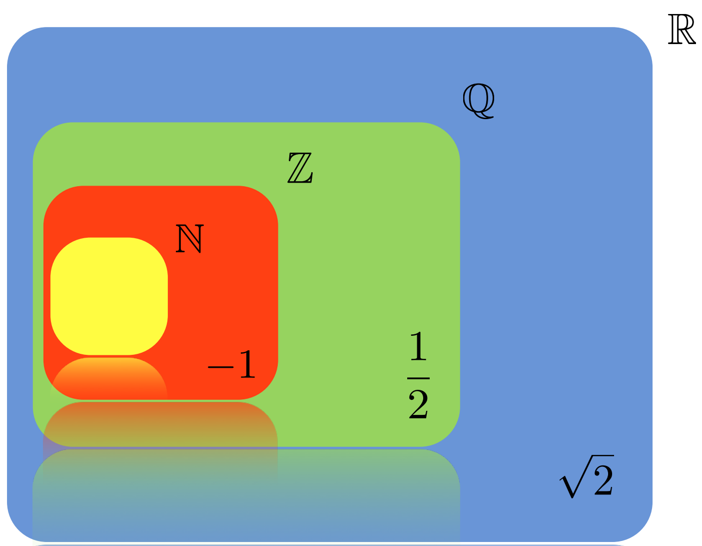
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

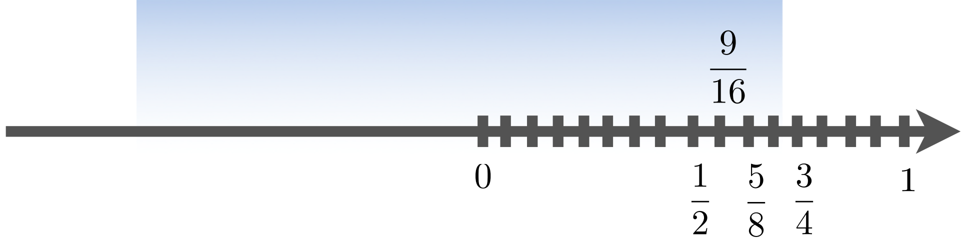
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0 \right\}$$

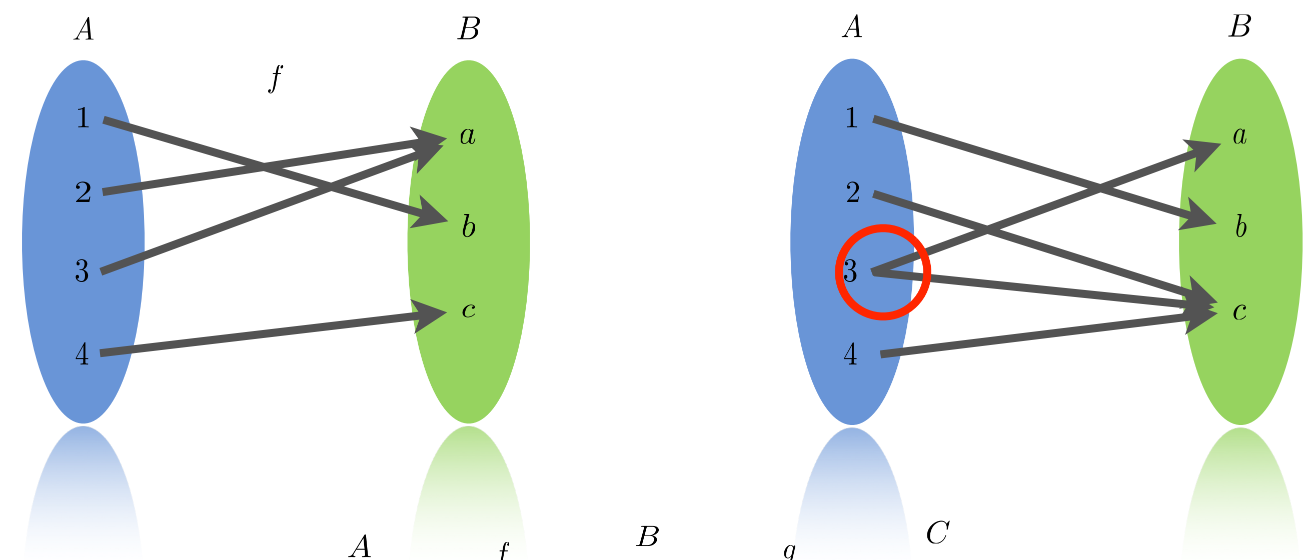
$\mathbb{R} =$ Les nombres à virgule.

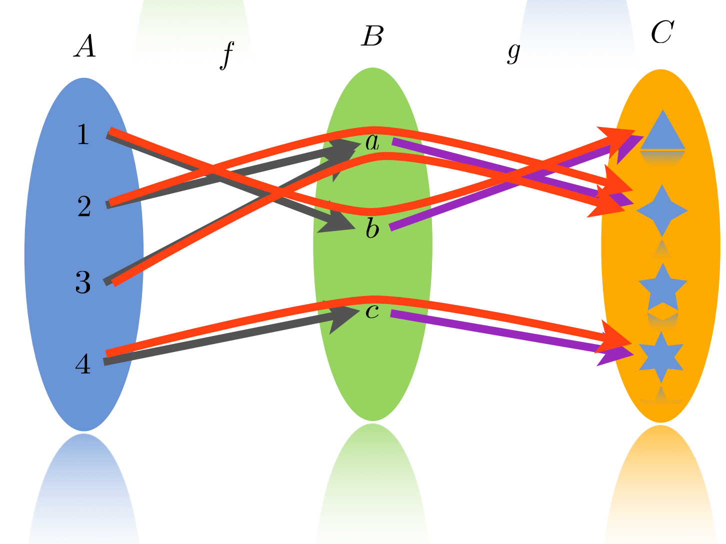
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$





✓ Les fonctions





$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|$$

Devoir: Section 1.1