

1.2 FONCTIONS

Cours 2

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Les ensembles de nombres

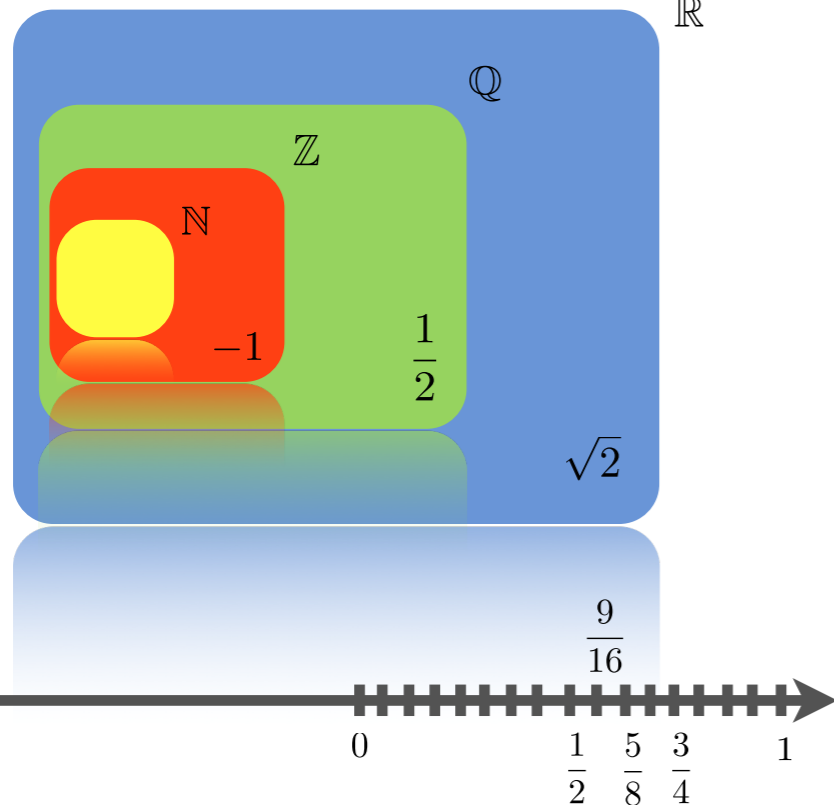
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

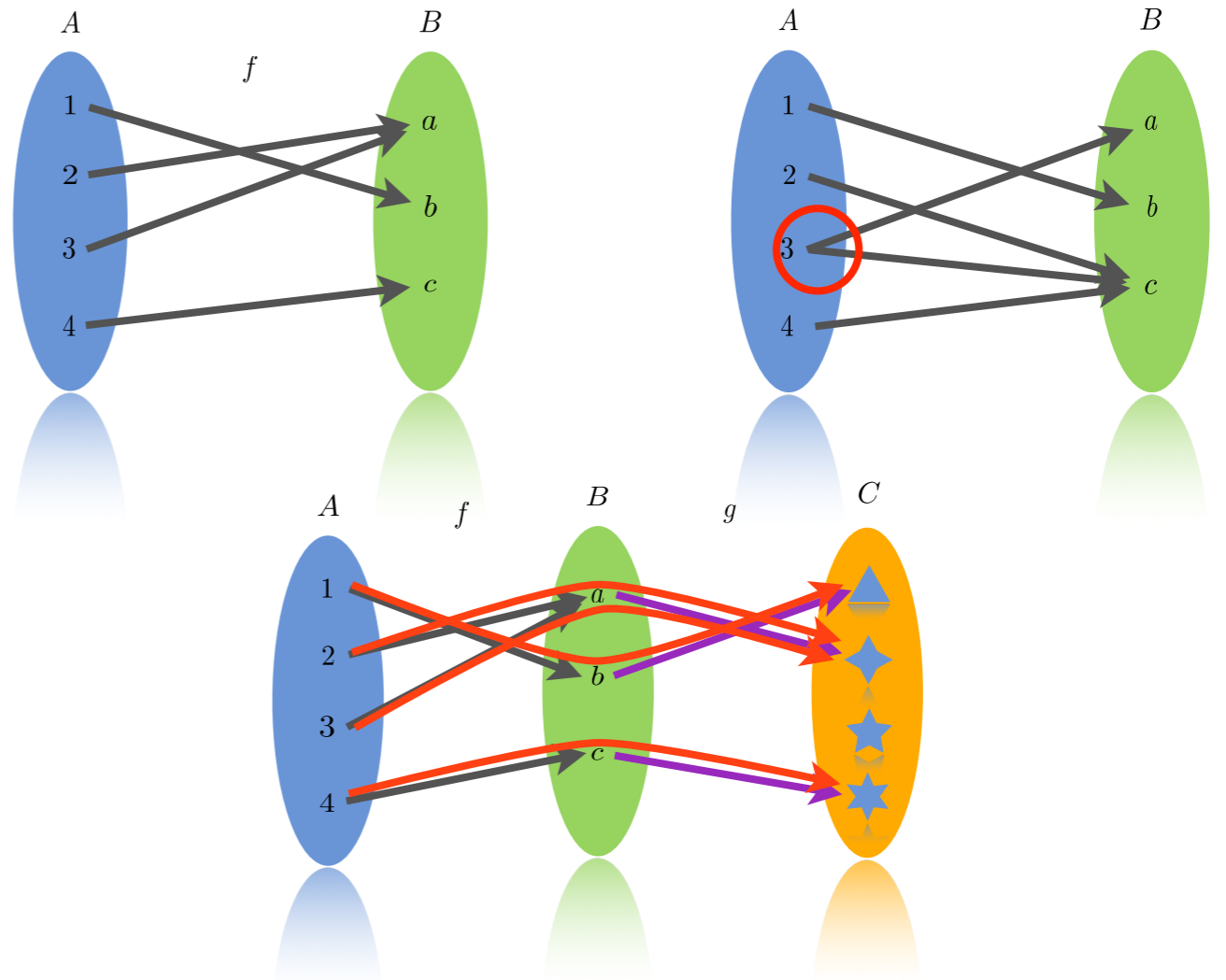
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0 \right\}$$

\mathbb{R} = Les nombres à virgule.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



✓ Les fonctions



$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|$$

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Les zéros d'une fonction
- ✓ Le domaine d'une fonction

Définition

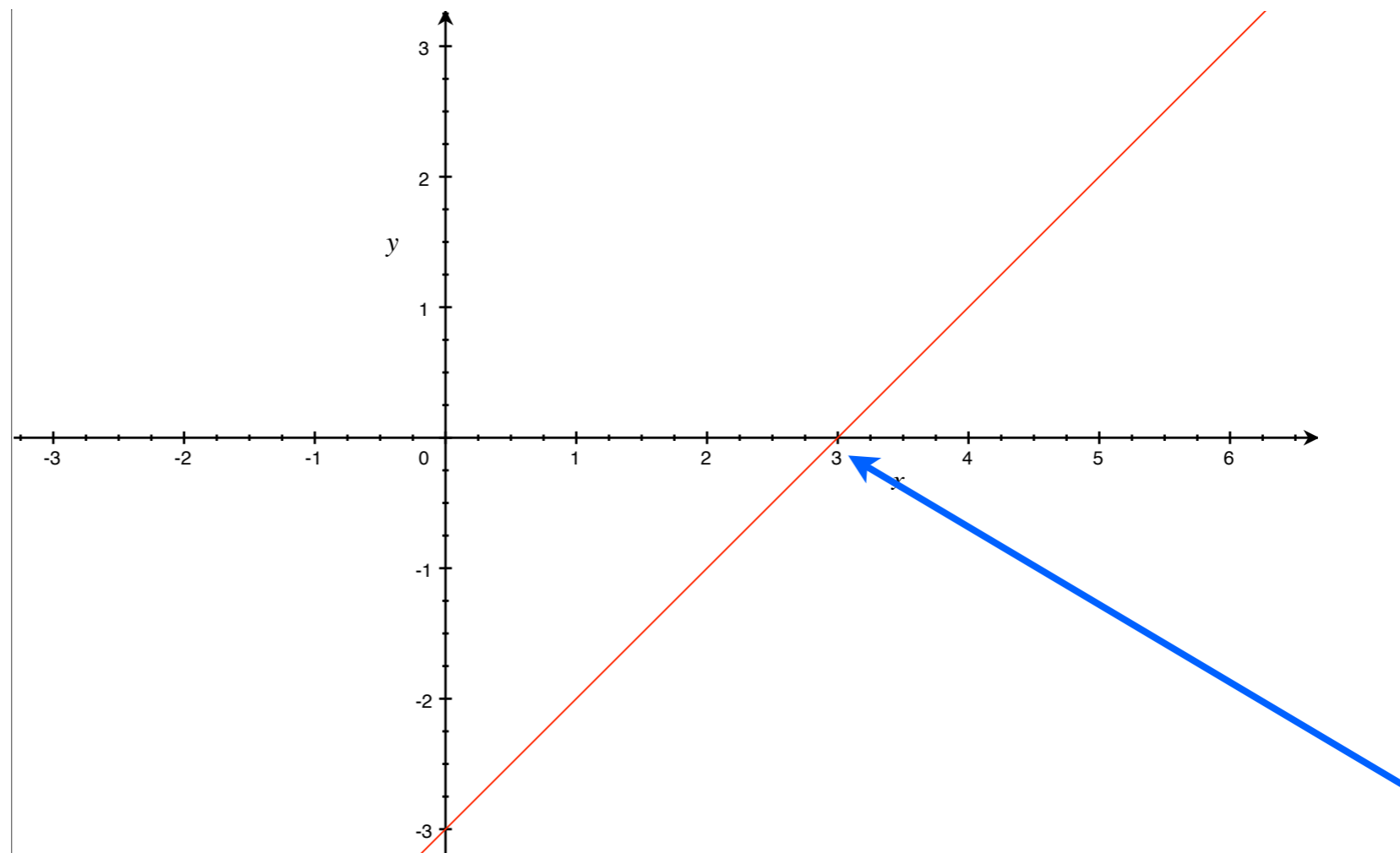
Les zéros (ou racine) d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les valeurs de x tel que $f(x) = 0$.

Exemple

3 est un zéro de la fonction $f(x) = x - 3$

car

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$



Remarque:

Les zéros d'une fonction correspondent graphiquement aux endroits où la fonction croise l'axe des abscisses (axe des x).

Zéro de fonctions linéaires

Le zéro d'une fonction linéaire $f(x) = ax + b$ se trouve en posant

$f(x) = 0$ c'est-à-dire $ax + b = 0$ et en isolant x .

$$\begin{aligned} ax + b = 0 &\implies ax + b - b = 0 - b &\implies ax = -b \\ &\implies \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} &\implies x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Exemple

Le zéro de $f(x) = 2x - 3$ est $x = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 3 = 3\left(\frac{2}{2}\right) - 3 = 3 - 3 = 0$$

Zéros de fonctions quadratiques

Les zéros d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ se trouvent en posant $f(x) = 0$ c'est-à-dire $ax^2 + bx + c = 0$ et en isolant x .

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad ax^2 = -bx - c$$

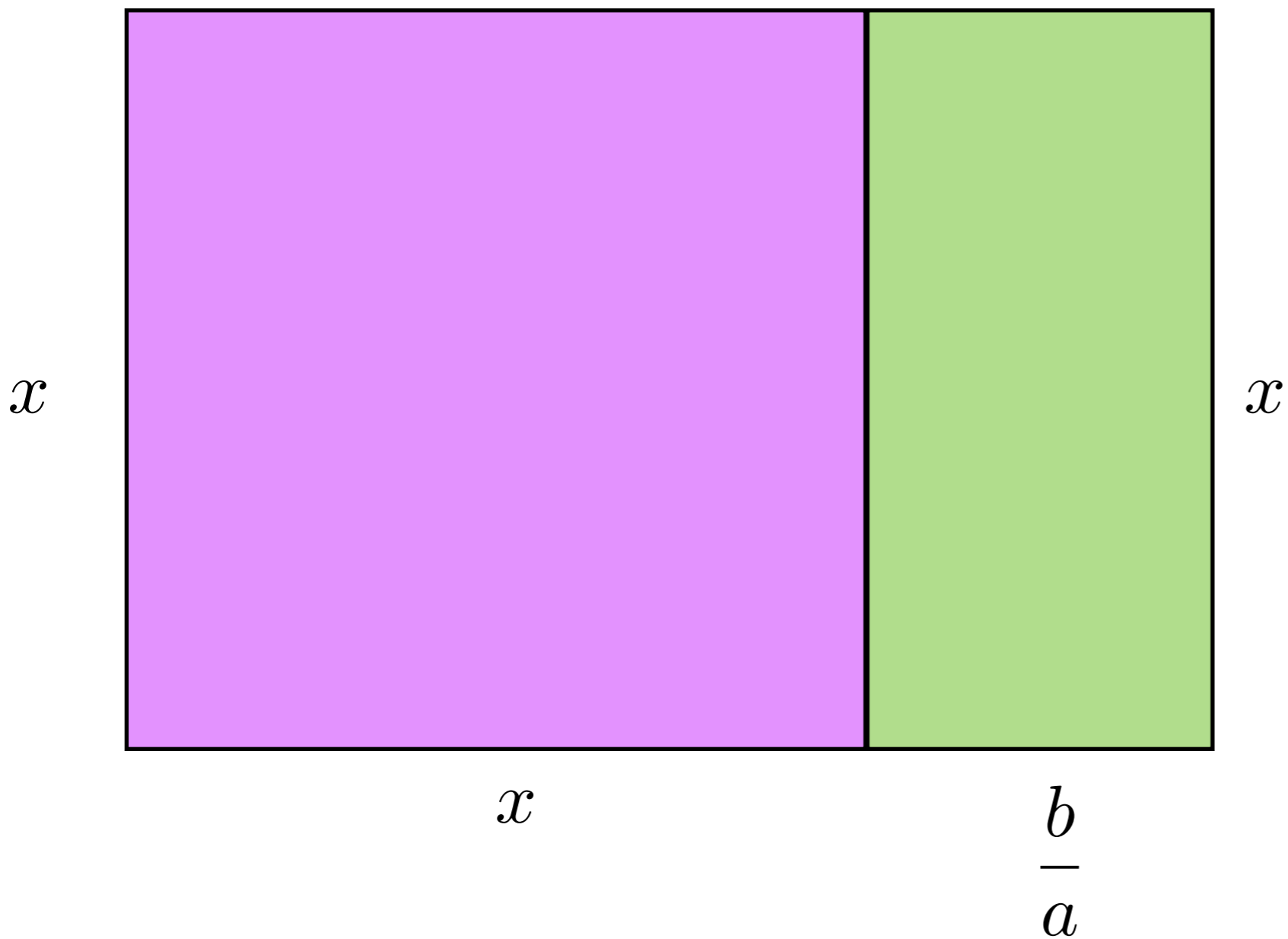
$$\Longrightarrow x^2 = \frac{-bx - c}{a}$$

Ce terme nous empêche d'isoler x

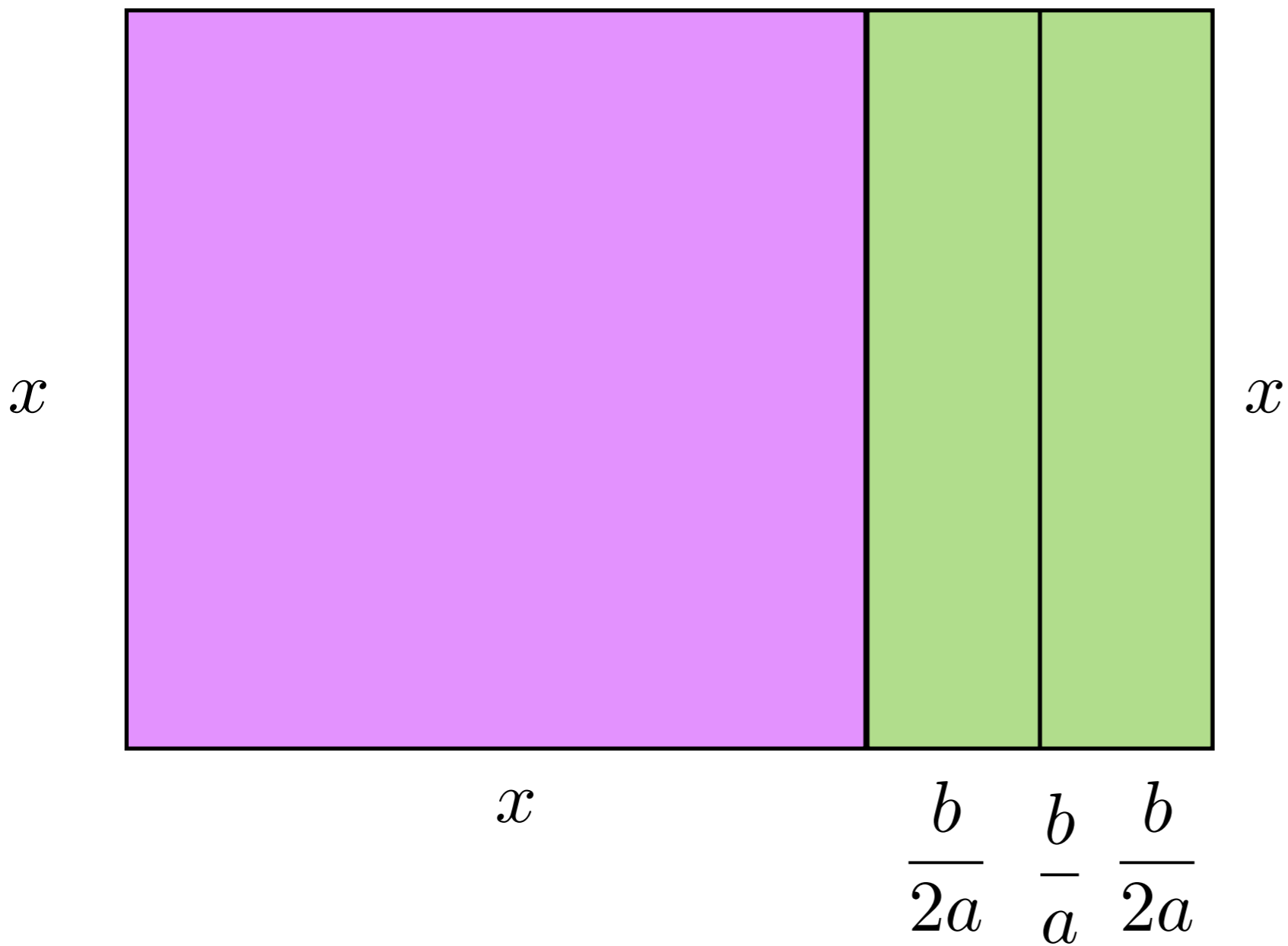
$$\Longrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-bx - c}{a}}$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

On aimerait bien trouver une manière de d'englober le terme bx dans un carré



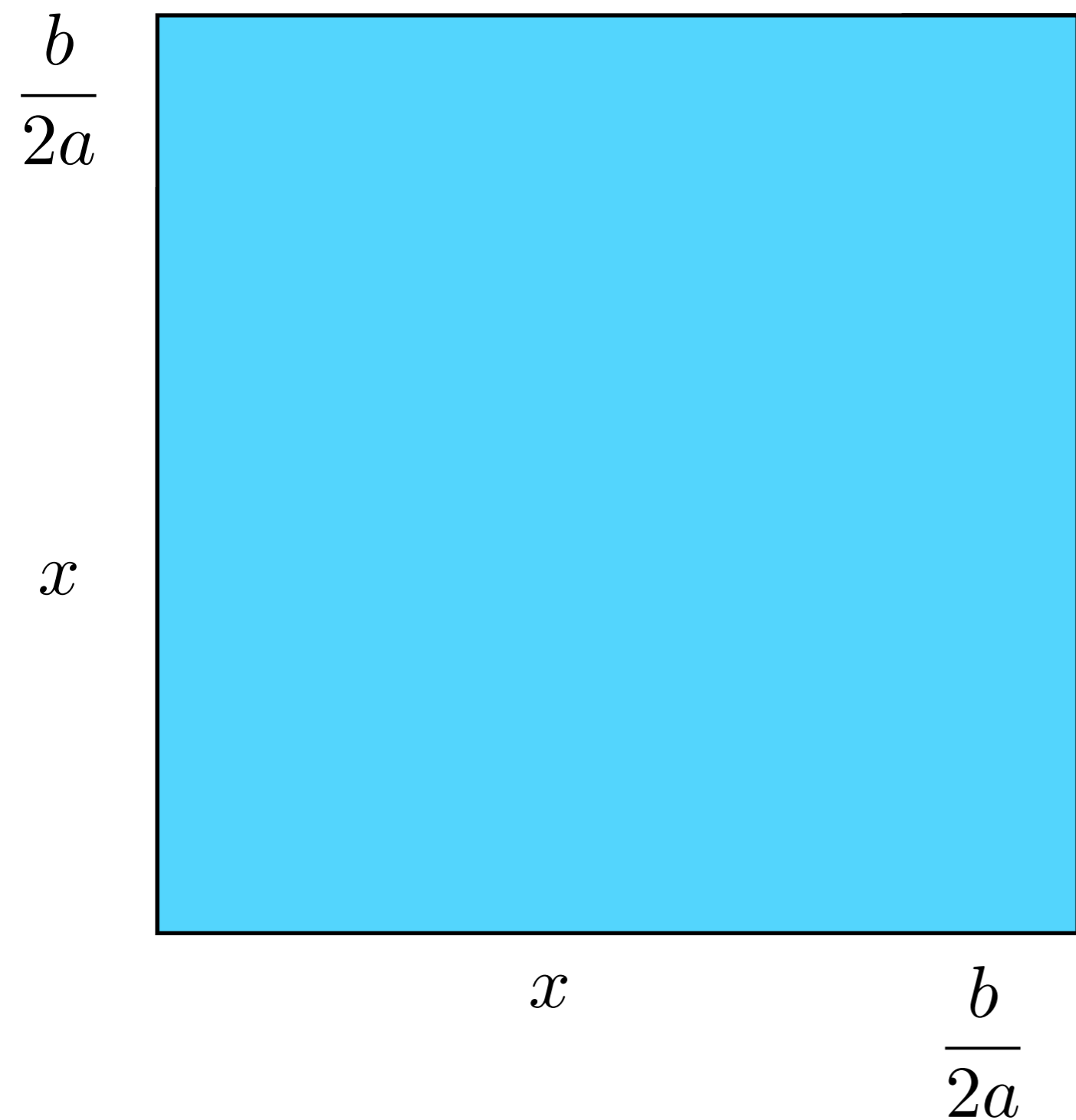
$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$



$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$



x

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\implies a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\implies \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\implies x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\implies x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple

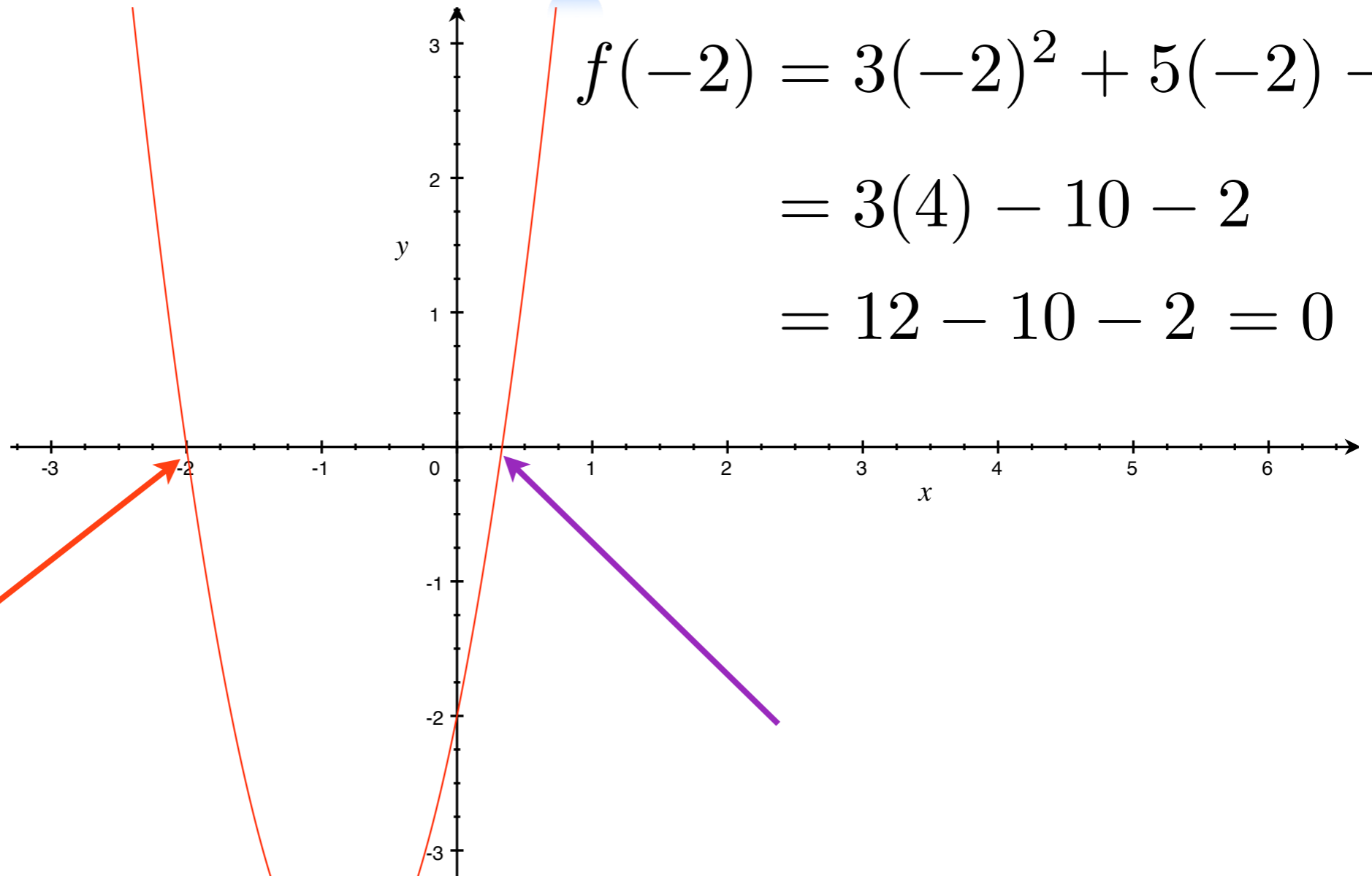
Trouver les zéros de la fonction suivante

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$= -2, \frac{2}{6}$$



(Règle du produit nul)

Si le produit de deux ou plusieurs nombres donne zéro, alors un de ces nombres est zéro.

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 0 \iff a_i = 0 \quad \text{pour un certain } i$$

On peut reformuler cette affirmation pour les fonctions comme suit:

Théorème

Si une fonction peut s'écrire comme un produit de fonction alors les zéros de cette fonction sont les zéros de ces facteurs

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

\implies

$$f(a) = 0 \iff f_i(a) = 0$$

pour un certain i

Le dernier théorème nous indique une façon de nous simplifier la tâche lors de la recherche de zéro d'une fonction.

En particulier, si l'on cherche les zéros d'un polynôme, il suffit de le factoriser en facteur linéaire et facteur quadratique puisqu'on sait comment trouver les zéros de ces derniers.

Exemple

Trouver les zéros de la fonction polynomiale suivante.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \\ &= x^3 - 4x + 3x^2 - 12 \\ &= x(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4) \\ &= (x + 3)(x^2 - 4) \\ &= (x + 3)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Donc les zéros sont $-3, 2$ et -2

Ouin... il faut avoir une certaine habileté en factorisation!

Et la plupart des polynômes ne sont pas aussi gentils!

De manière générale, factoriser un polynôme de degré plus grand que 2 n'est pas une mince affaire.

Dans certains cas particuliers on peut utiliser quelques techniques de factorisation comme;

- Différence de carré
- Mise en évidence
- Mise en évidence double
- Somme ou différence de cube

Je ne vous ferai pas de cachette, les problèmes que vous aurez seront arrangés pour bien fonctionner avec les techniques connues.

Théorème

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale

a est un zéro de $f(x)$ $\iff (x - a)$ est un facteur de $f(x)$

C'est-à-dire $f(x) = (x - a)g(x)$

Preuve:

(\Leftarrow) Si $f(x) = (x - a)g(x)$

$$f(a) = (a - a)g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$$

donc a est un zéro de $f(x)$

(\Rightarrow) Si on divise $f(x)$ par $(x - a)$

$$f(x) = (x - a)g(x) + r$$

Le reste de la division

Si $r = 0$ on obtiendra le résultat voulu

$$\begin{aligned} 0 = f(a) &= (a - a)g(a) + r \\ &= 0 + r = r \end{aligned}$$

Exemple

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

$$x = -2, \frac{1}{3}$$

Donc si on divise $f(x)$ par $(x - (-2)) = (x + 2)$

il ne devrait pas y avoir de reste.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 2 \\ - \quad 3x^2 + 6x \\ \hline -x - 2 \\ - \quad -x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \hline 3x - 1 \end{array}$$

$$\text{Donc } f(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$$

$$= 3(x + 2) \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

Faites les exercices suivants

Trouver le(s) zéro(s) des fonctions suivantes

a) $f(x) = (x - 2)(x + 3)(3x - 5)$

b) $f(x) = 5x^2 + 2x - 4$

c) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 7x$

d) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

e) $f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 11x - 2$

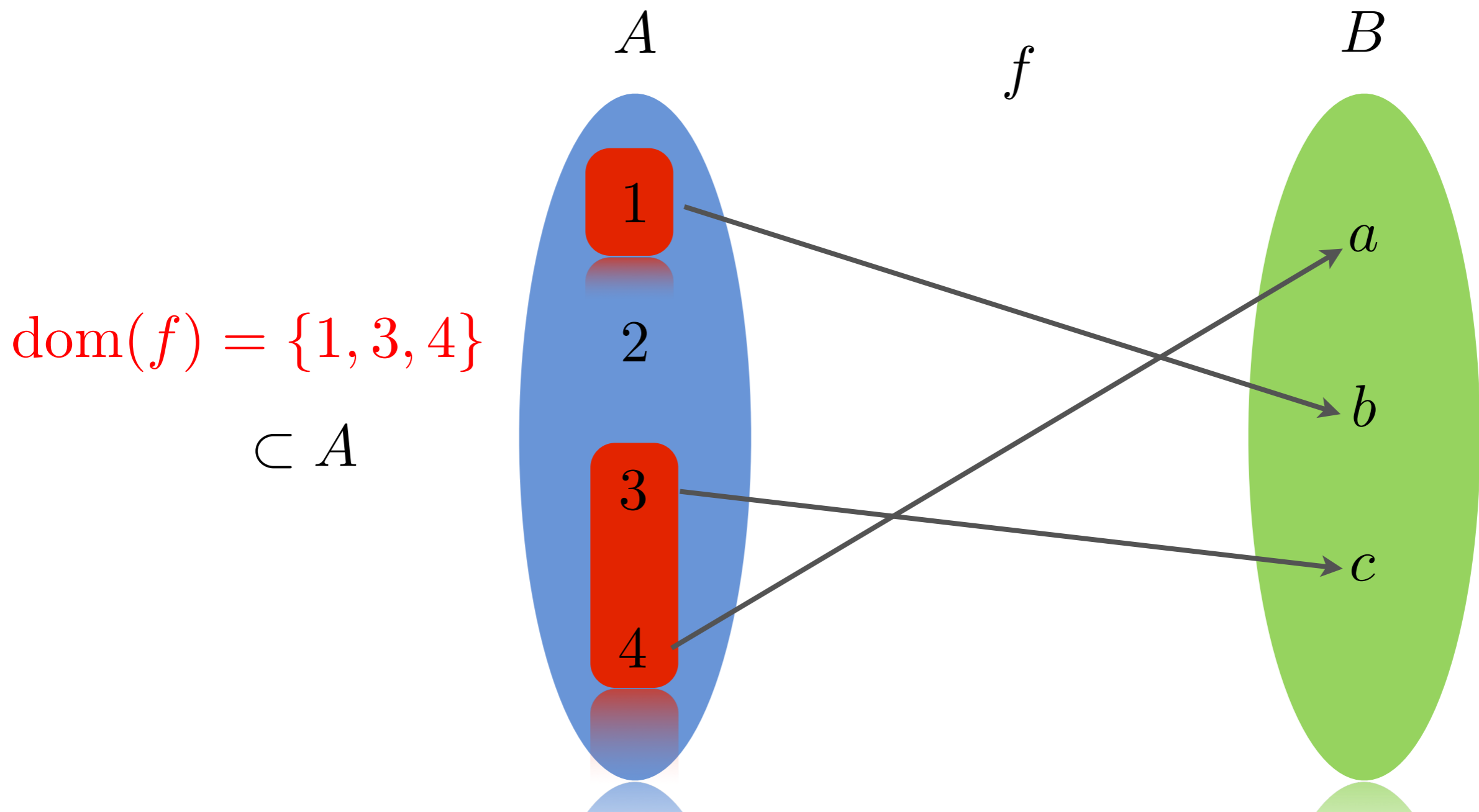
trouver un zéro
facile



Domaine de fonction

Définition

Le domaine d'une fonction $f : A \longrightarrow B$ est le sous-ensemble de A des éléments qui sont en relation avec un élément de B . On le note $\text{dom}(f)$.



Lorsque la fonction est donnée à l'aide d'une expression algébrique, tous les x sont en relation avec l'expression évaluée en la valeur de x .

Donc, il semblerait que le domaine de toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
soit tous \mathbb{R} !?!

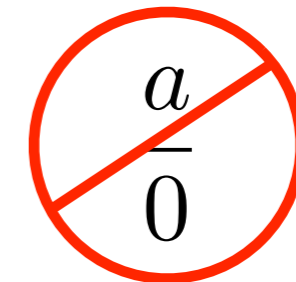
En fait non!

Car certaine expression non pas de sens pour certaine valeur de x .

Quels sont ces interdits en mathématiques?

En gros, il y a trois choses qu'on ne peut pas faire en mathématiques.

Diviser par zéro.


$$\frac{a}{0}$$

Prendre une racine pair
d'un nombre négatif.


$$\text{pair } \sqrt{\text{négatif}}$$

$$(+)^2 = (+)(+) = +$$

$$(+)^3 = (+)(+)(+) = +$$

$$(-)^2 = (-)(-) = +$$

$$(-)^3 = (-)(-)(-) = (+)(-) = -$$

$$\sqrt{-} = \nexists$$

$$\sqrt[3]{-} = \exists$$

Prendre un logarithme
d'un nombre négatif ou nul.


$$\log_a(\text{négatif ou } 0)$$

Exemple

Le domaine de la fonction $f(x) = \frac{x}{(x-1)(2x-3)}$ est tous \mathbb{R} sauf les valeurs de x qui font en sorte que

$$(x-1)(2x-3) = 0$$

Par la règle du produit nul, on a deux possibilités.

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{2}$$

donc $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ 1, \frac{3}{2} \right\}$

Exemple

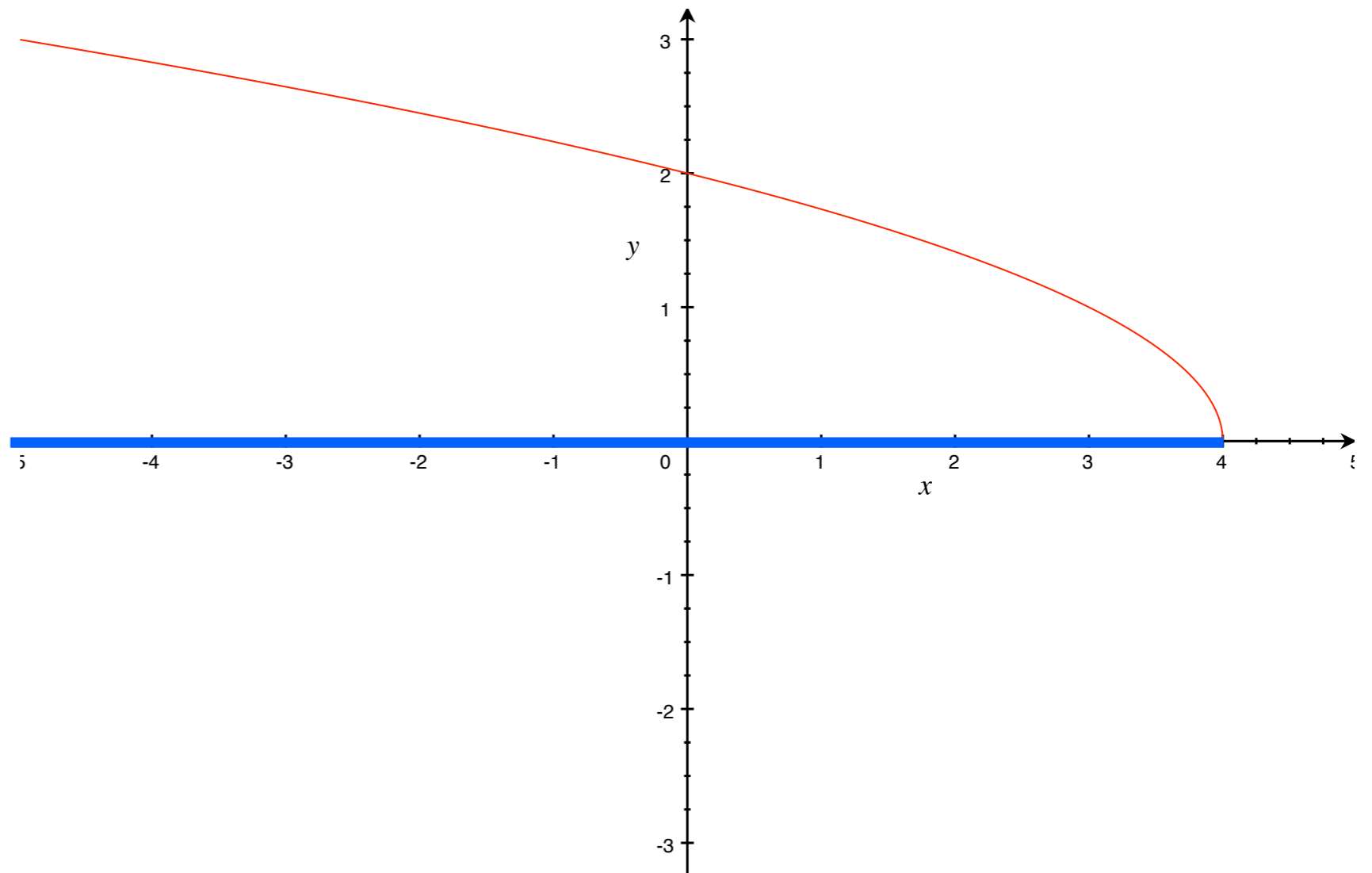
Le domaine de la fonction

$$f(x) = \sqrt{4 - x}$$

est l'ensemble des valeurs pour lesquelles $4 - x \geq 0$

$$\text{d'où } 4 \geq x$$

$$\text{dom}(f) = -\infty, 4]$$



Exemple

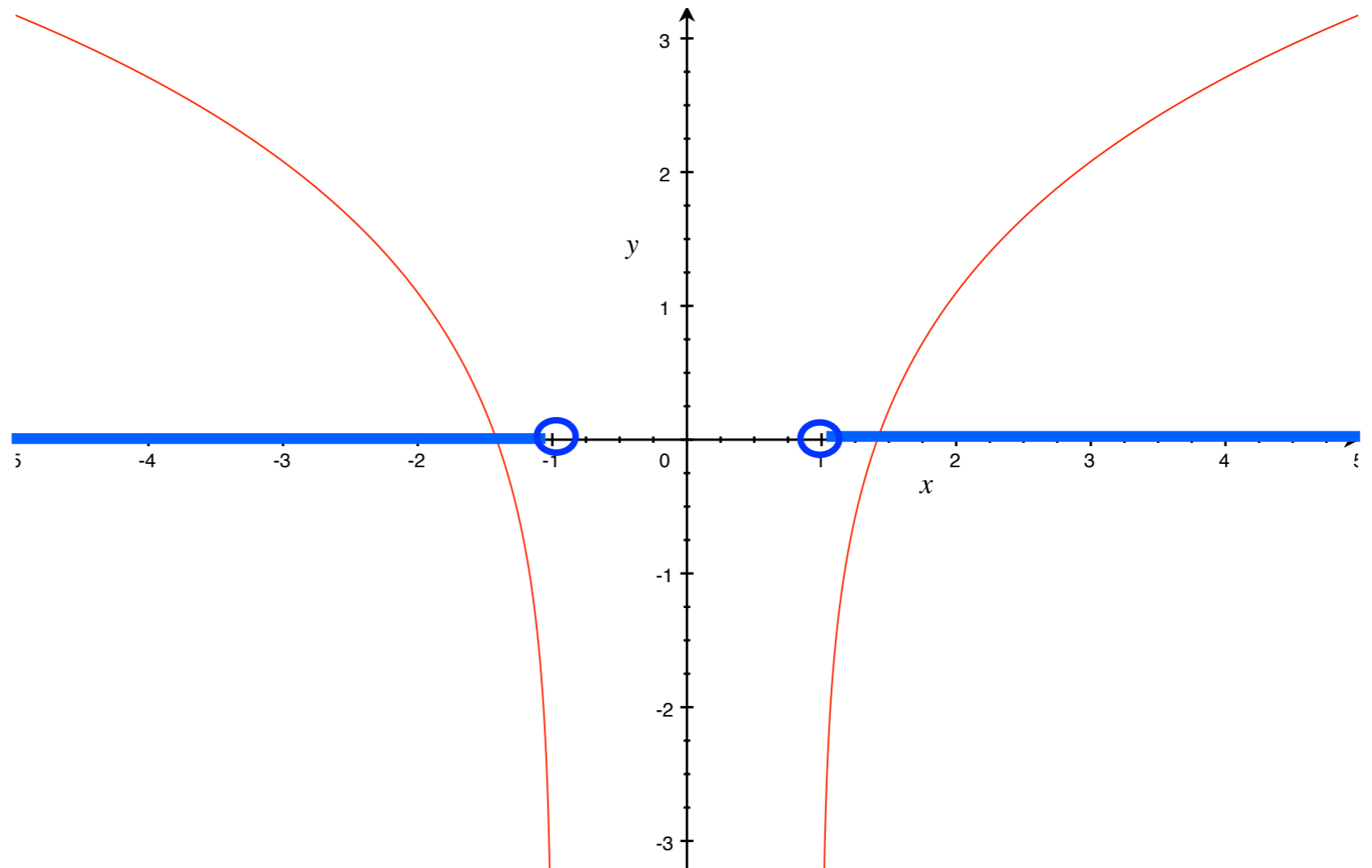
Le domaine de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

est l'ensemble des valeurs pour lesquels $x^2 - 1 > 0$

$$(x - 1)(x + 1) > 0$$

-2	-1	0	1	2
+	0	-	0	+

$$\text{dom}(f) = -\infty, -1[\cup] 1, \infty$$



Faites les exercices suivants

Trouver le domaine des fonctions suivantes.

$$\text{a) } f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}$$

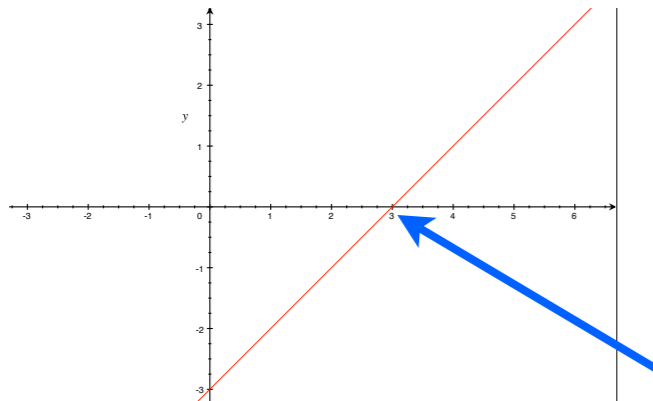
$$\text{b) } f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 3}}$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Les zéros d'une fonction



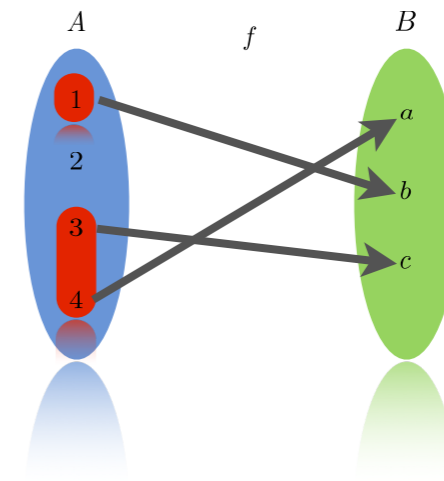
$$f(x) = ax + b \implies x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

règle du produit nul

$$f(a) = 0 \iff f(x) = (x - a)g(x)$$

✓ Le domaine d'une fonction



~~$\frac{a}{0}$~~

~~pair $\sqrt{\text{negatif}}$~~

~~$\log_a(\text{negatif ou } 0)$~~

Devoir:

Section 1.2