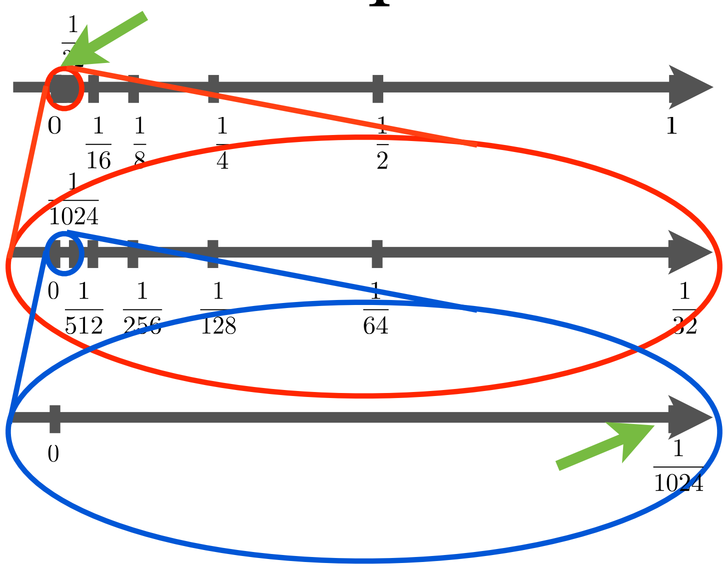
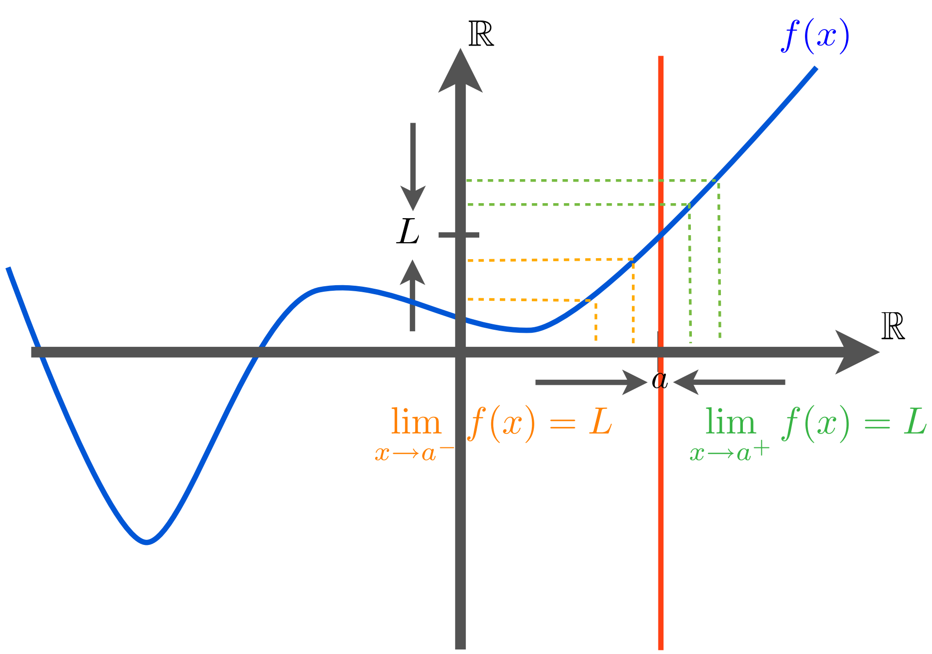
1.4 ALGÈBRE DE L'INFINI

cours 4

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Le concept de limite





✓ Outils de calcul de limite

$$\lim_{x \to a} k = k$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

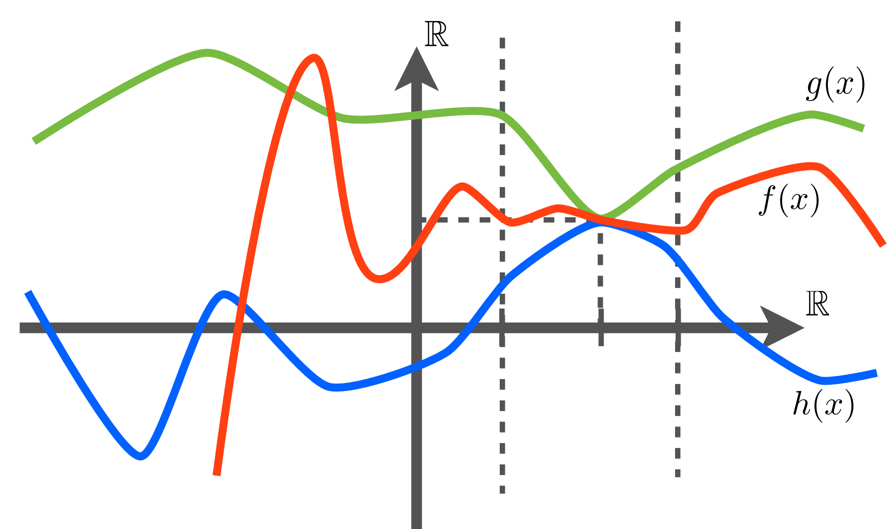
$$\lim_{x \to a} (kf(x)) = k \lim_{x \to a} (f(x))$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} (f(x))^r = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^r$$



Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Comment calculer des limites qui font intervenir l'infini

$$\infty$$

Il faut faire très attention lorsqu’on joue avec l’infini.

Le comportement de l’infini est parfois contre-intuitif.

Ceci se fait sentir lorsqu’on compare les infinis.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad\qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \subset B \qquad \Longrightarrow \qquad \#(A) < \#(B)$$

Le nombre d'éléments dans A

Est-ce que ce raisonnement est vrai si les ensembles sont infinis?

$$\text{Pair} \subset \mathbb{N} \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad \#(\text{Pair}) < \#(\mathbb{N})$$

Les deux sont infinis, mais est-ce qu'il y en a un plus grand que l'autre?

Comment comparer les tailles d'ensembles qu'on ne peut pas compter?

Est-ce qu'il y a plus de filles ou plus de garçons?

Disons qu'on oublie l'évènement.

Bijection

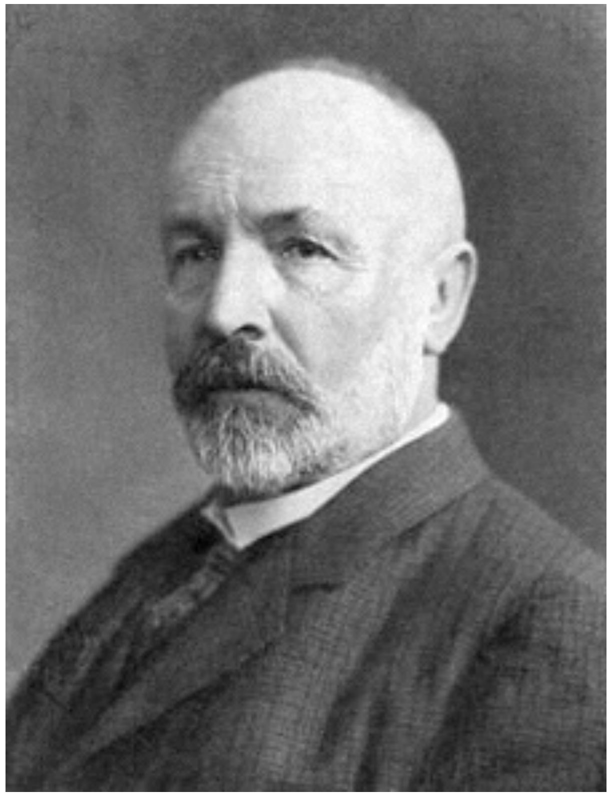
$\mathbb{N}$ $\quad$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Pair $\quad$ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

Donc $\quad$ $\#(\text{Pair}) = \#(\mathbb{N})$

Peut-on clore la discussion en affirmant que l'infini c'est l'infini et donc tous les ensembles infinis ont la même taille?

On l'a longtemps cru.



Georg Cantor (1845-1918)

a démontré que ce n'était pas le cas.

$$\#(\mathbb{N}) < \#(\mathbb{R}) \qquad \#(\mathbb{N}) < \#([0,1])$$

$$\begin{array}{lcll}
0 & \longrightarrow & 0,\mathbf{1}98465976498363 9\ldots & \neq x \\
1 & \longrightarrow & 0,5\mathbf{7}29506836596827\ldots & \neq x \\
2 & \longrightarrow & 0,58\mathbf{2}2710089572664\ldots & \neq x \\
3 & \longrightarrow & 0,444\mathbf{3}827491047736\ldots & \neq x \\
4 & \longrightarrow & 0,2219\mathbf{5}54838466028\ldots & \neq x \\
5 & \longrightarrow & 0,55784\mathbf{3}9200433782\ldots & \neq x \\
\vdots & \longrightarrow & \vdots &
\end{array}$$

Peut-on tous les avoir? $x = 0,283464\ldots$ est oublié!

$\#(\mathbb{N}) = \aleph_0$ Infini dénombrable

$\#(\mathbb{R}) = \aleph_1$ Infini non dénombrable

La limite sert à comprendre le comportement d’une fonction près d’un point.

Si le point fait partie du domaine, la limite en ce point correspond à l’évaluation de la fonction en ce point.

Explorons maintenant les cas ou le point ne fait pas partie du domaine.

Exemple

Donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \nexists$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \qquad \neq \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

x	$2,1$	$2,01$	$2,001$	$\longrightarrow$	2^+
$f(x)$	$\dfrac{1}{0,1}$ $= 10$	$\dfrac{1}{0,01}$ $= 100$	$\dfrac{1}{0,001}$ $= 1000$	$\longrightarrow$	∞

x	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$\longrightarrow$	2^-
$f(x)$	$-\dfrac{1}{0,1}$ $= -10$	$-\dfrac{1}{0,01}$ $= -100$	$-\dfrac{1}{0,001}$ $= -1000$	$\longrightarrow$	$-\infty$

Du dernier exemple, on peut tirer que si

$$k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad 0 < k$$

Forme	Limite
$\dfrac{k}{0^+}$	∞
$\dfrac{k}{0^-}$	$-\infty$
$\dfrac{k}{0}$	$\nexists$

Ça NE veut PAS dire que si on a une fonction $f(x)$ telle que $f(a) = 0$,

$$\lim_{x \to a} \frac{k}{f(x)} = \nexists$$

Exemple

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Regardons ce qui ce passe si on divise par l'infini.

Exemple

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x} = 0$$

x	10	100	1000	$\longrightarrow$	∞
$f(x)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{1000}$	$\longrightarrow$	0^+

Remarque:

$\displaystyle\lim_{x \to \infty^+} f(x)$ n'a pas de sens.

$$\lim_{x \to \infty^-} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Exemple

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x} = 0$$

x	-10	-100	-1000	$\longrightarrow$	$-\infty$
$f(x)$	$-\dfrac{5}{10}$	$-\dfrac{5}{100}$	$-\dfrac{5}{1000}$	$\longrightarrow$	0^-

Si $\quad k \in \mathbb{R} \quad$ et $\quad 0 < k$

Forme	Limite
$\dfrac{k}{\infty}$	0^+
$\dfrac{k}{-\infty}$	0^-

Faites les exercices suivants

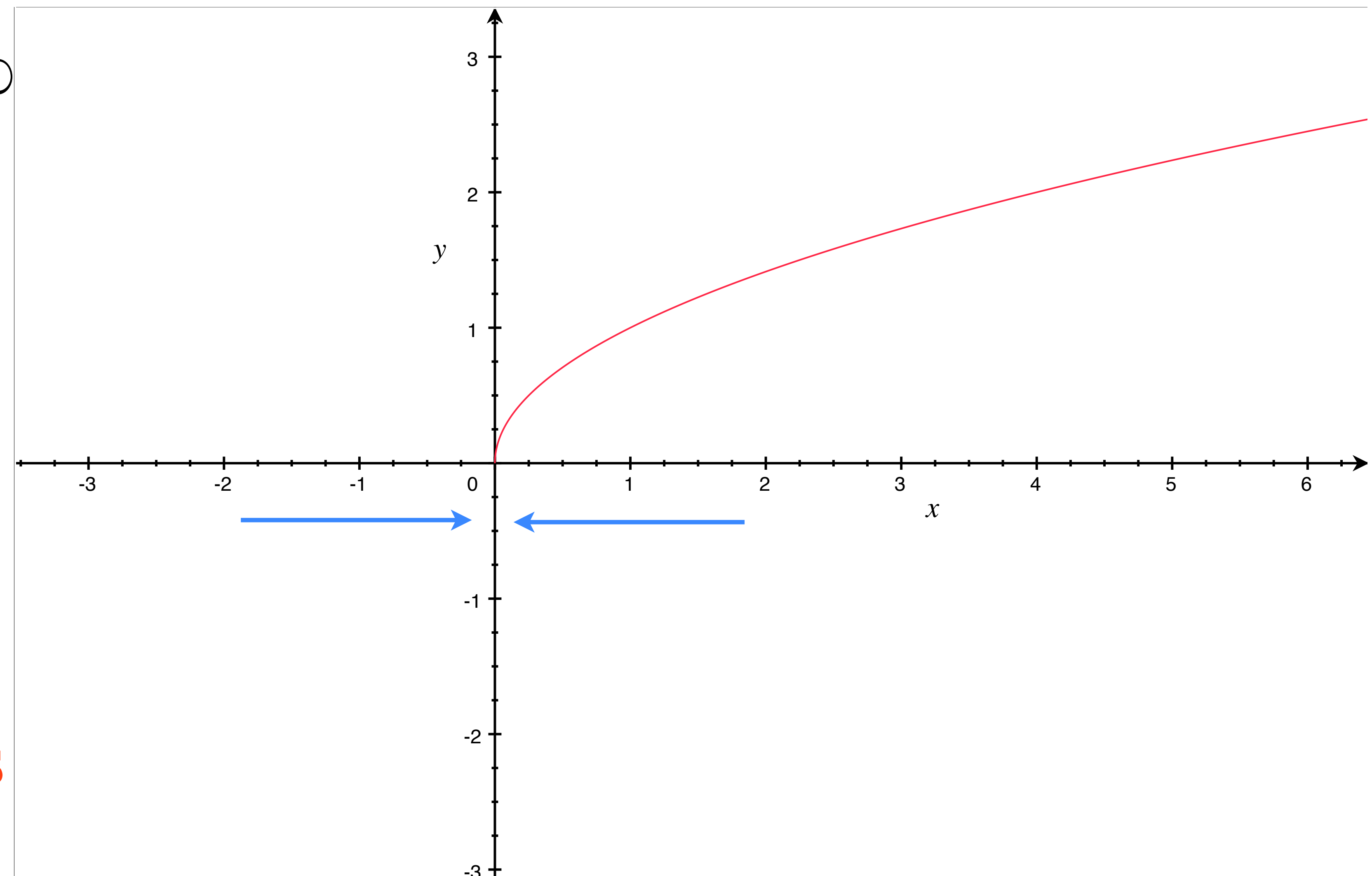
Section 1.4 # 20 et 21

Exemple

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \nexists$$ Ouin... $$\lim_{x\to 0^{\pm}}\sqrt{x} = \nexists$$

Lorsqu'on évalue une limite, on doit être conscient du domaine de la fonction

Ici $\operatorname{dom}\sqrt{x} = [0,\infty)$



$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}} = \nexists$$

pas vraiment de sens

Le but de la limite est de comprendre le comportement d'une fonction près d'un point.

Ici le comportement de la fonction près de 0 est clair!

Faites les exercices suivants

Section 1.4 # 22 et 23

$k \in \mathbb{R}$

et $0 < k$

Ici il y a deux cas

$1 < k$

$0 < k < 1$

Forme	Limite
$\pm k + \infty$	∞
$\pm k - \infty$	$-\infty$
$k \cdot \infty$	∞
$k(-\infty)$	$-\infty$
∞^k	∞
k^∞	∞
k^∞	0
$(\infty)(\infty)$	∞
∞^∞	∞

Exemple

$$\lim_{x\to\infty} x - 10^{100} = \infty$$

Exemple

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1000000000000000} = -\infty$$

Exemple

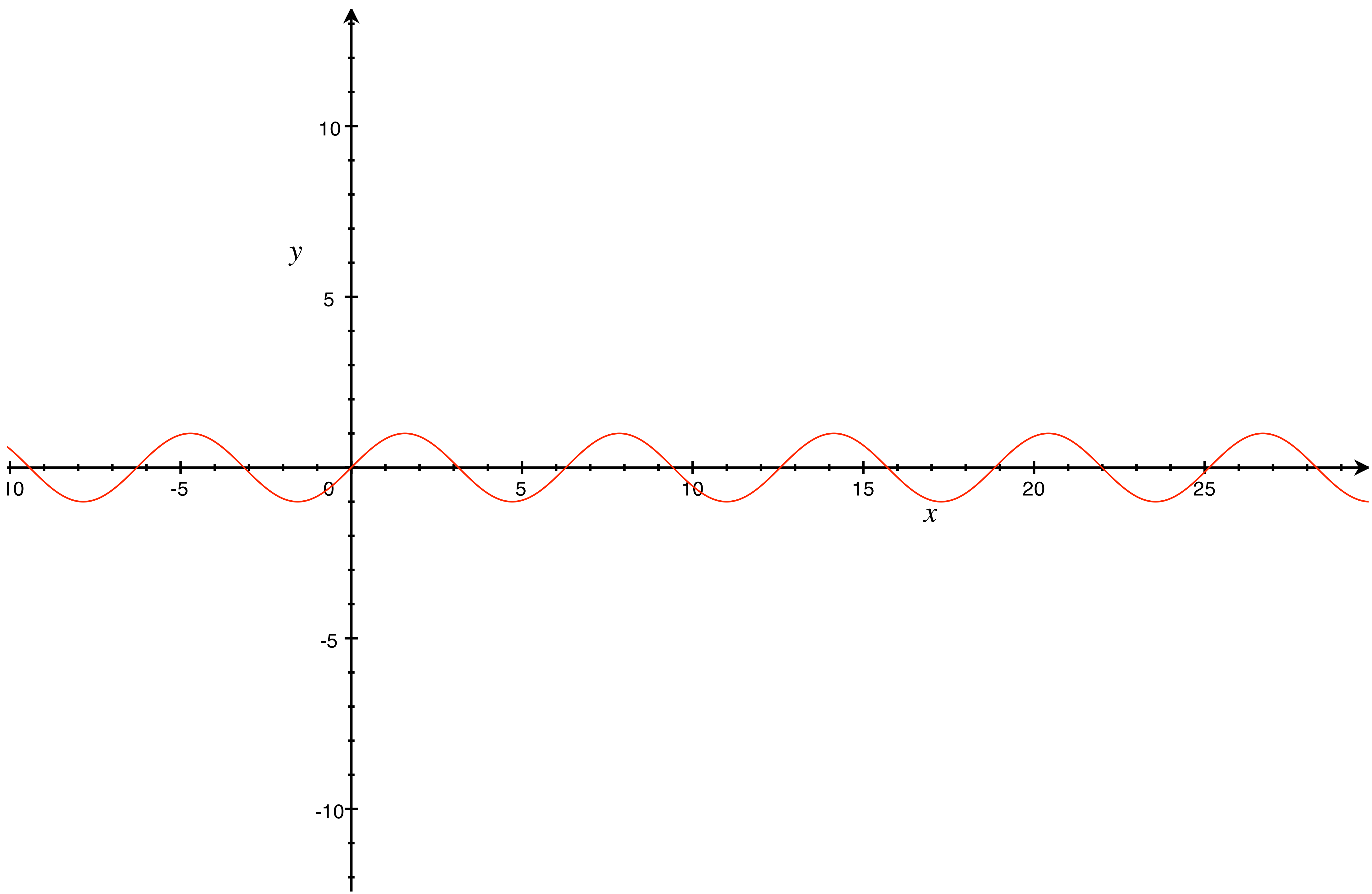
$$\lim_{x\to\infty} 3^x = \infty$$

Exemple

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$$

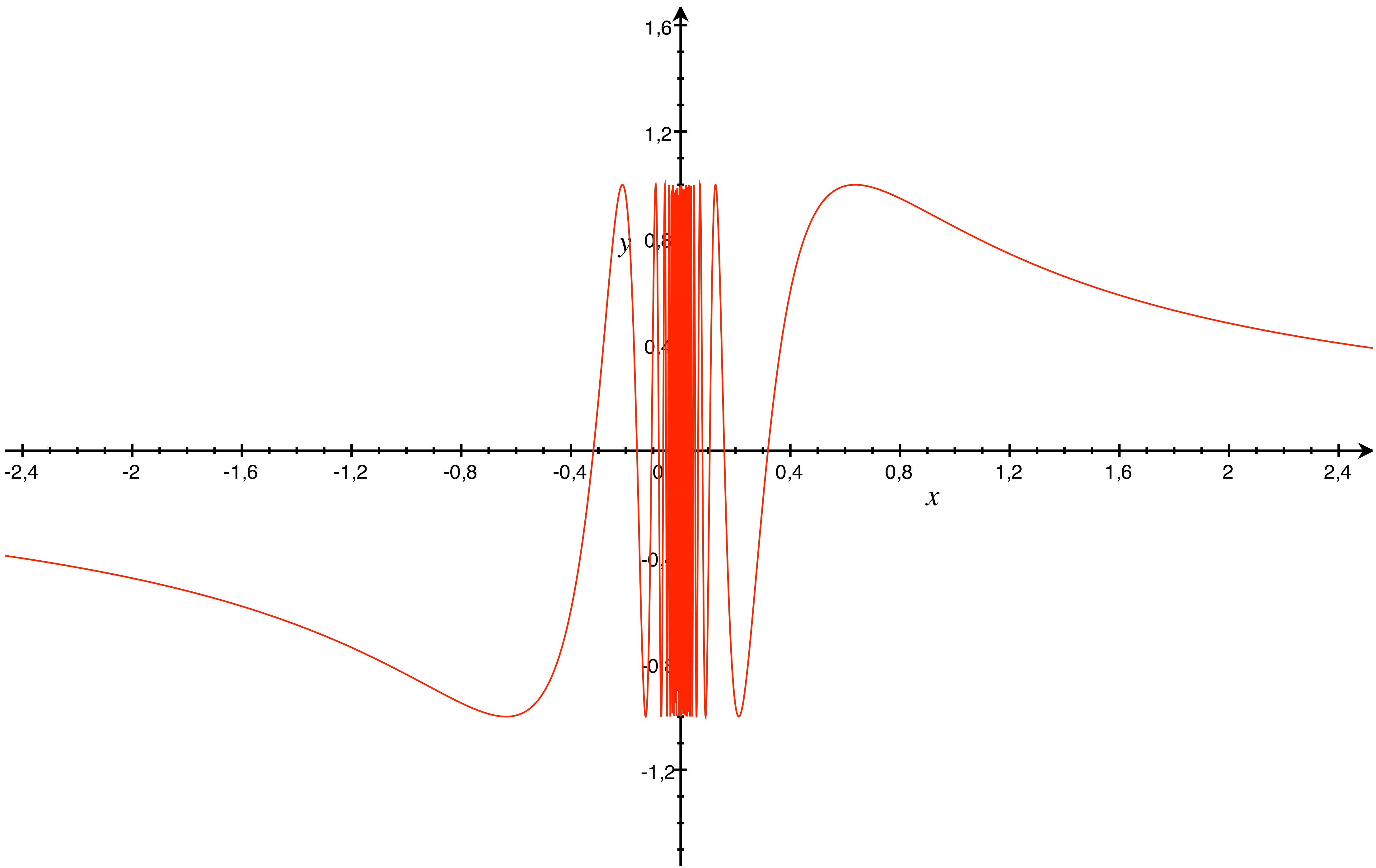
Exemple

$$\lim_{x\to\infty} \sin x = \nexists$$



Exemple

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$$



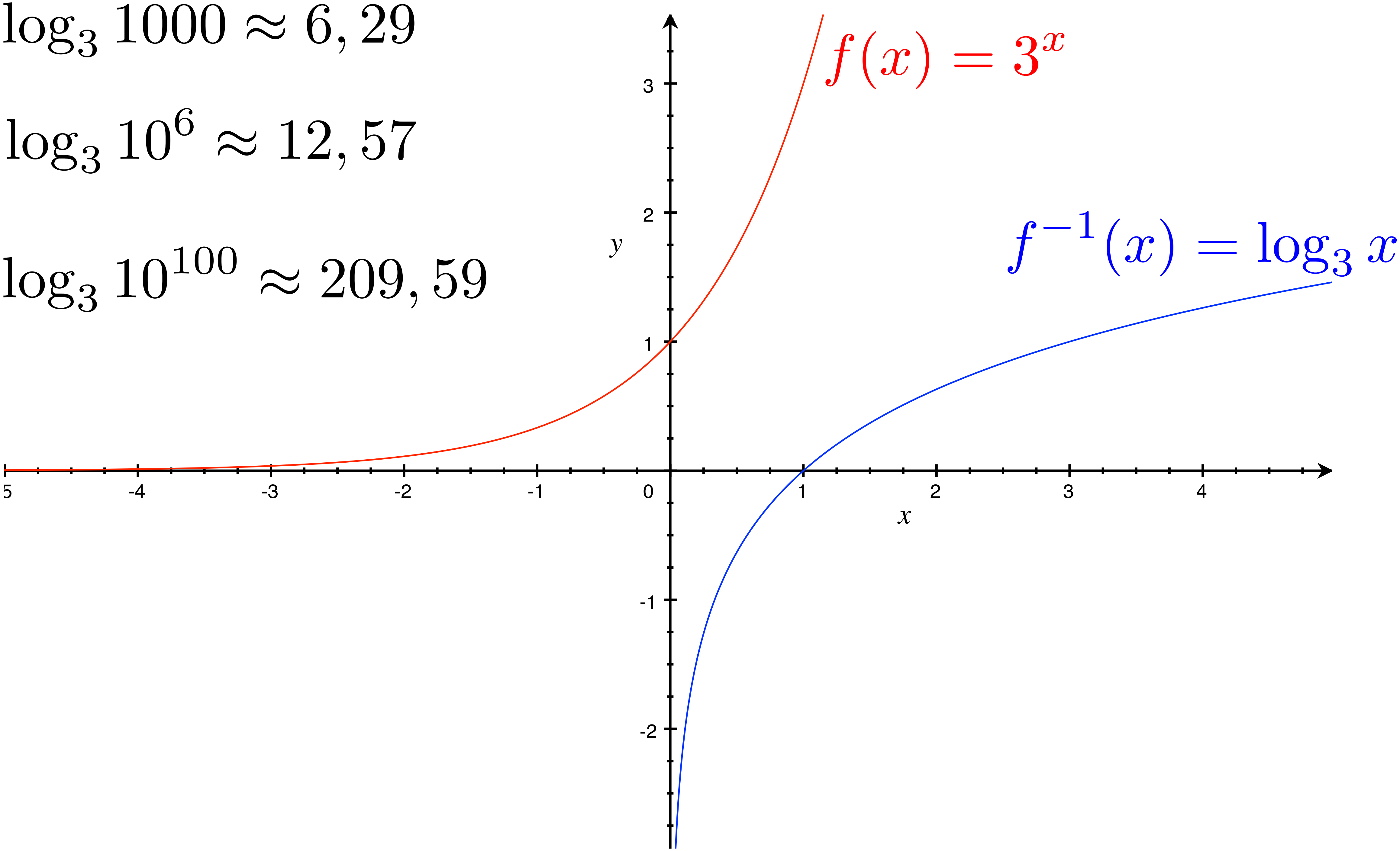
Exemple

$$\lim_{x \to \infty} \log_3 x = \infty$$

$$\log_3 1000 \approx 6,29$$

$$\log_3 10^6 \approx 12,57$$

$$\log_3 10^{100} \approx 209,59$$



Faites les exercices suivants

Section 1.4 # 25

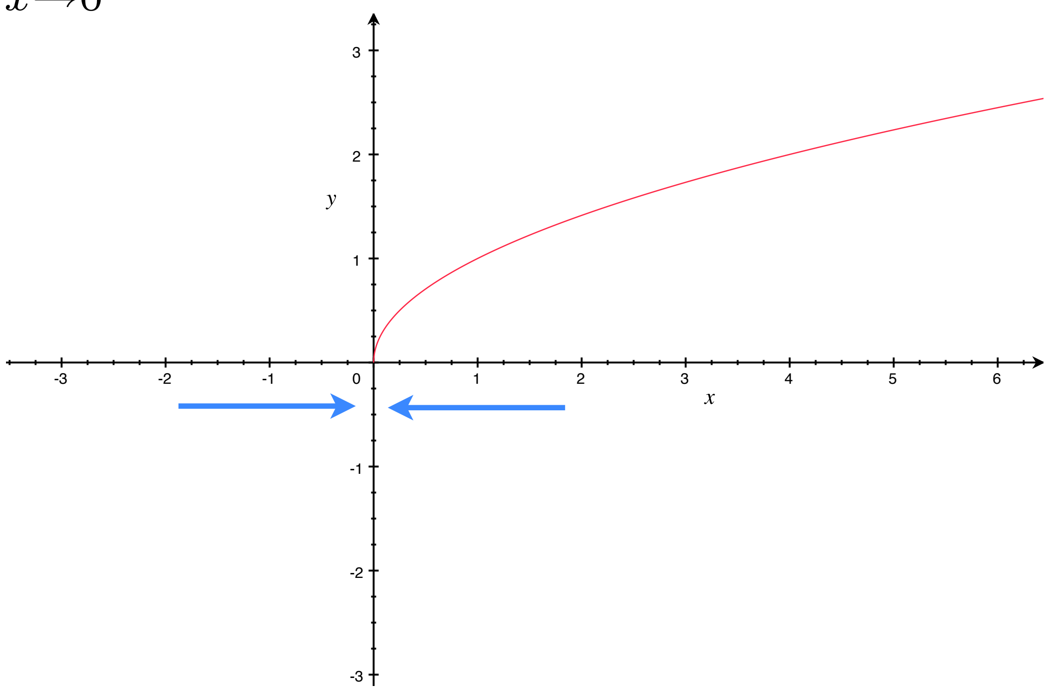
Aujourd'hui, nous avons vu

Forme	Limite
$\dfrac{k}{\infty}$	0^+
$\dfrac{k}{-\infty}$	0^-
$\dfrac{k}{0^+}$	∞
$\dfrac{k}{0^-}$	$-\infty$
$\dfrac{k}{0}$	$\nexists$

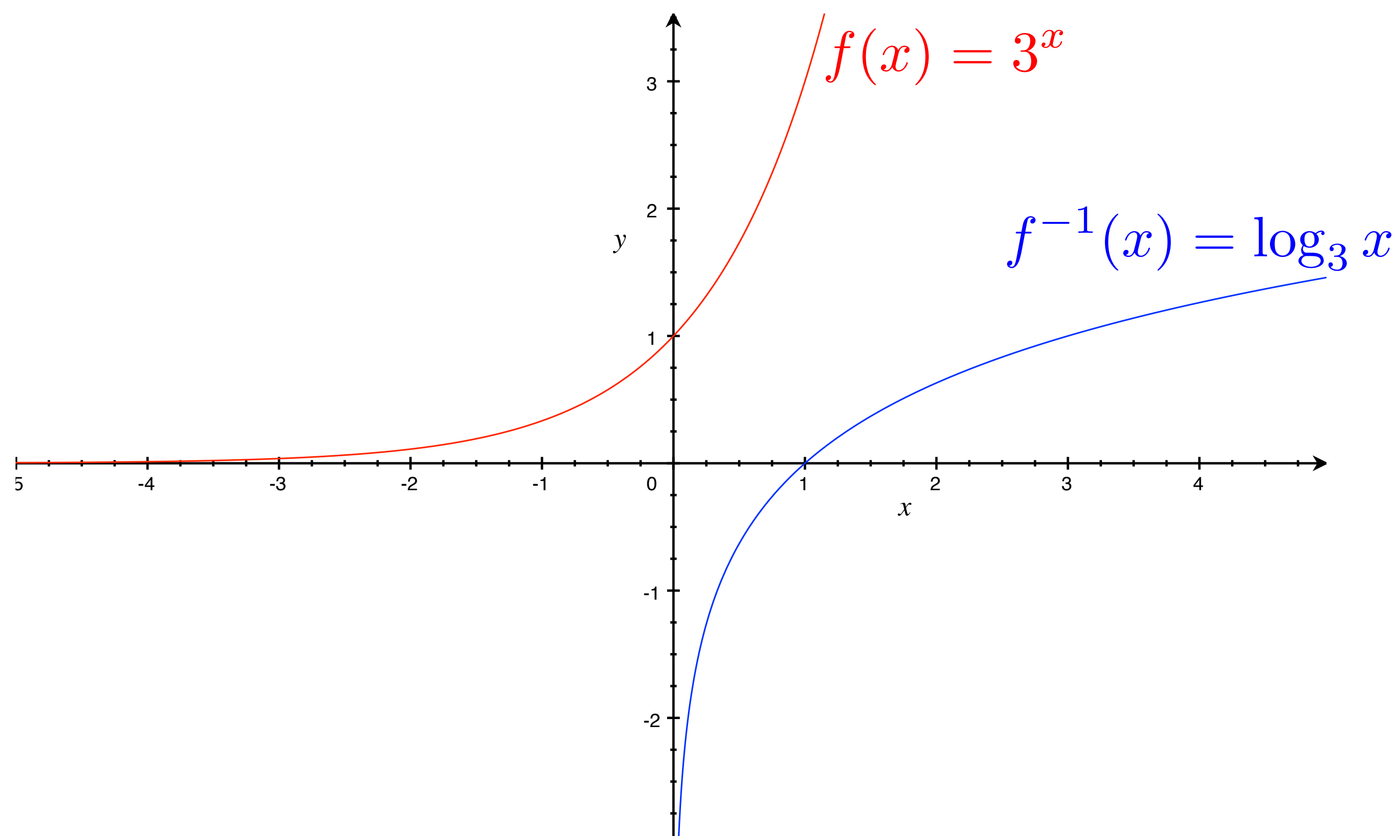
	Forme	Limite
	$\pm k + \infty$	∞
	$\pm k - \infty$	$-\infty$
	$k \cdot \infty$	∞
	$k(-\infty)$	$-\infty$
	∞^k	∞
$1 < k$	k^∞	∞
$0 < k < 1$	k^∞	0
	$(\infty)(\infty)$	∞
	∞^∞	∞

Aujourd'hui, nous avons vu

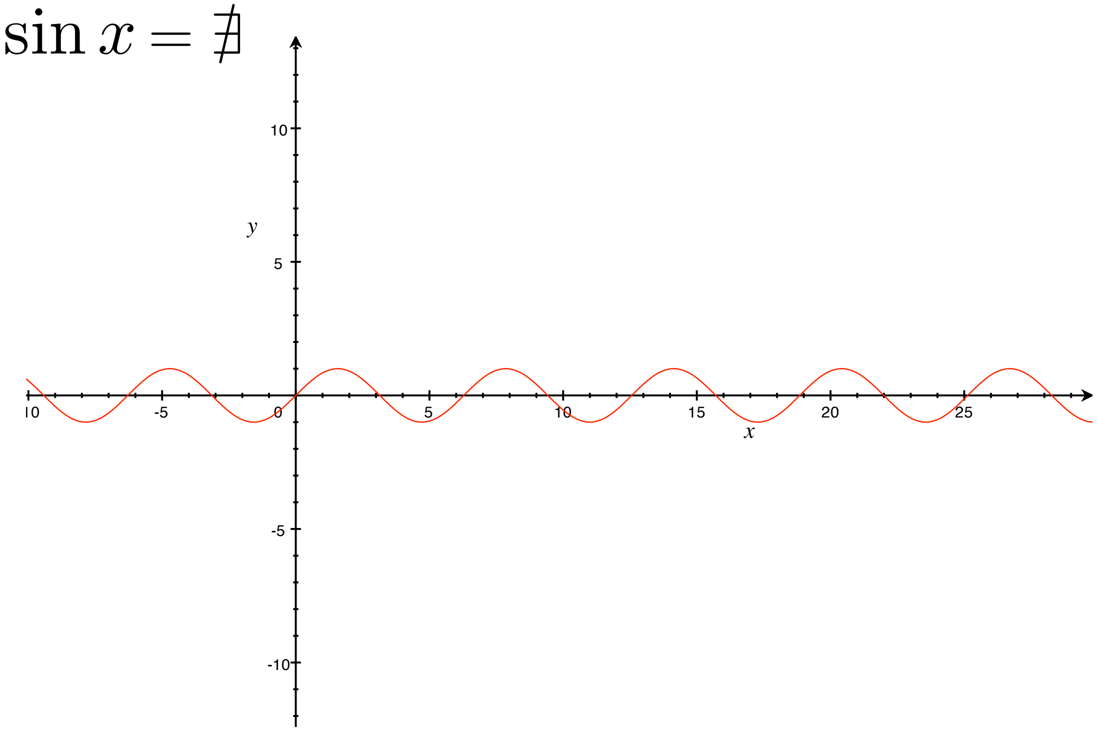
$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \sqrt{x} = \nexists$$



$$\lim_{x \to \infty} \log_3 x \ = \infty$$



$$\lim_{x \to \infty} \sin x = \nexists$$



Devoir: Section 1.4