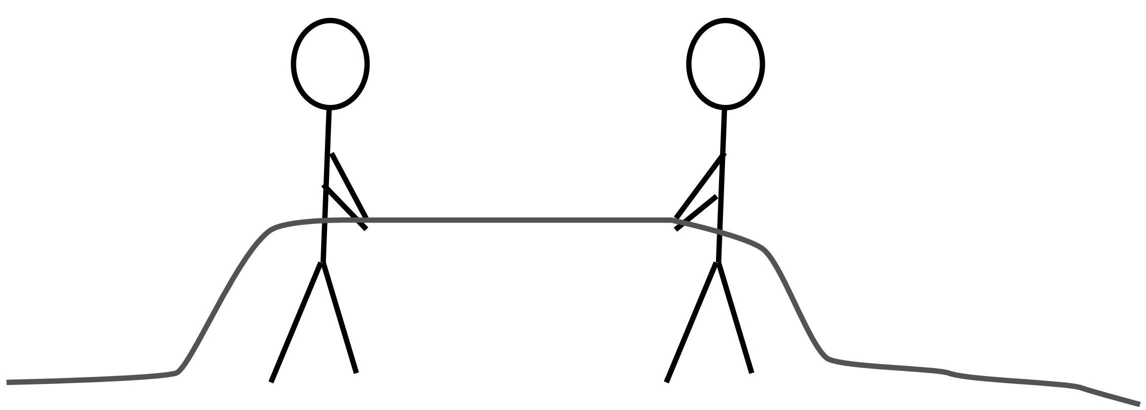
1.6 CONTINUITÉ ET ASYMPTOTE

Cours 6

Au dernier cours, nous avons vu

✓ L'indétermination $\frac{0}{0}$

$$\frac{\text{près de zéro}}{\text{près de zéro}} = ???$$



Techniques pour lever l'indétermination

- ✓ Factorisation.
- ✓ Division polynomiale.
- ✓ Mettre sur le même dénominateur.
- ✓ Multiplier par le conjugué.

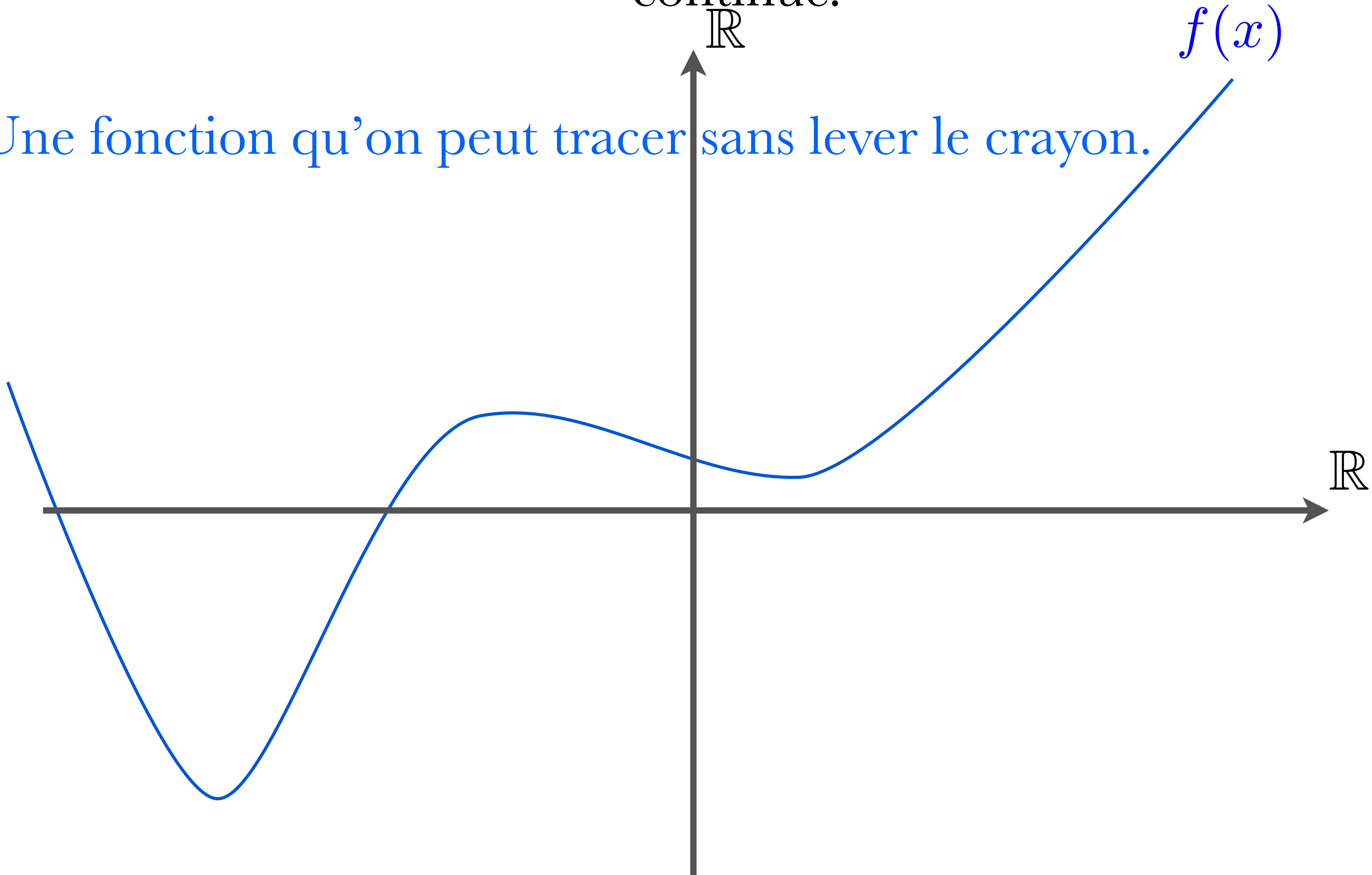
Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Définition de la continuité
- ✓ Vérification de la continuité
- ✓ Indétermination $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\infty - \infty$
- ✓ Asymptote

Le mot continu fait partie du vocabulaire standard.

Habituellement on a une idée intuitive de ce qu'est une fonction continue.

Une fonction qu'on peut tracer sans lever le crayon.



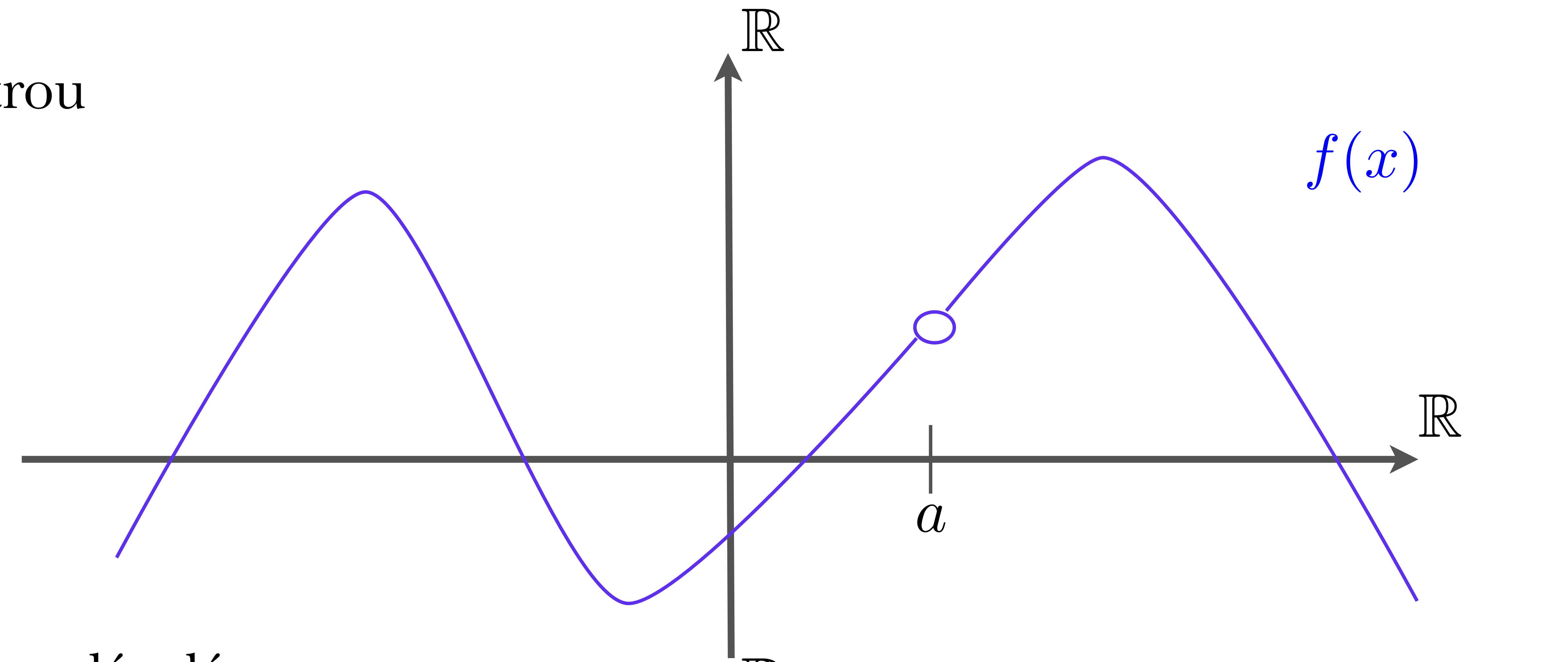
Habituellement, les définitions qui incluent des mots genre «crayon», sont assez difficiles à utiliser mathématiquement.

On veut donc une définition qui soit mathématiquement rigoureuse.

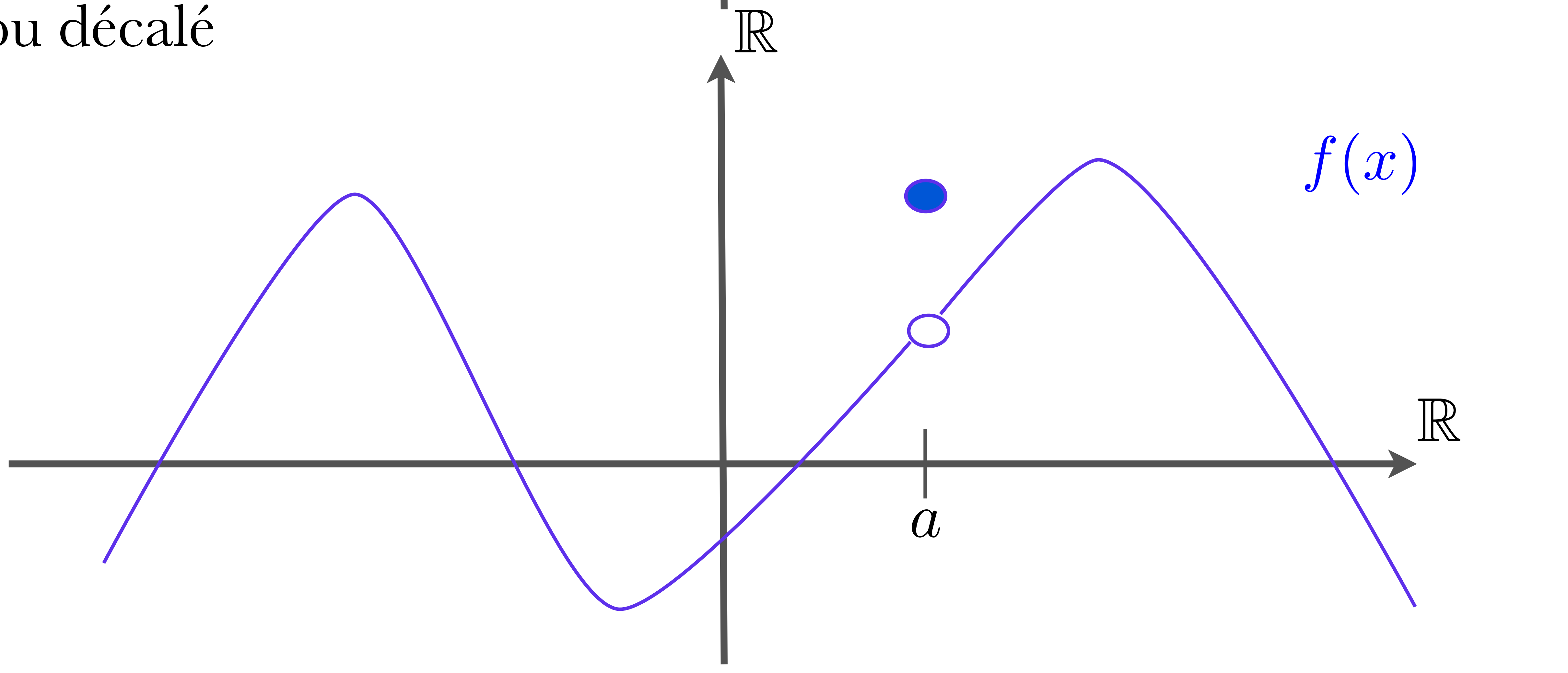
Pour définir la continuité d'une fonction en un point $x = a$ commençons par regarder ce qui nous fait lever le crayon.

Ensuite, on le traduira en terme mathématique moins ambigu.

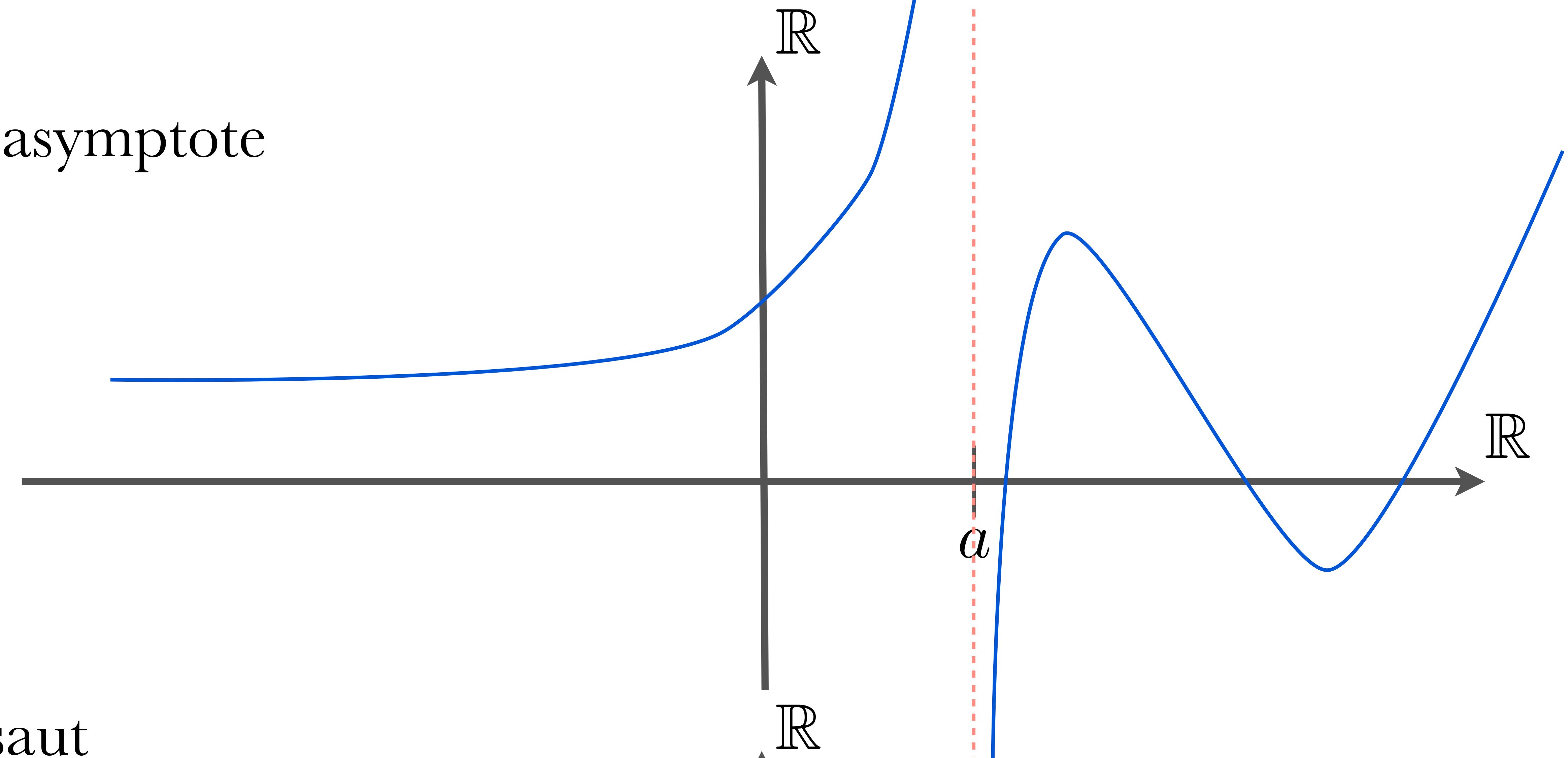
Un trou



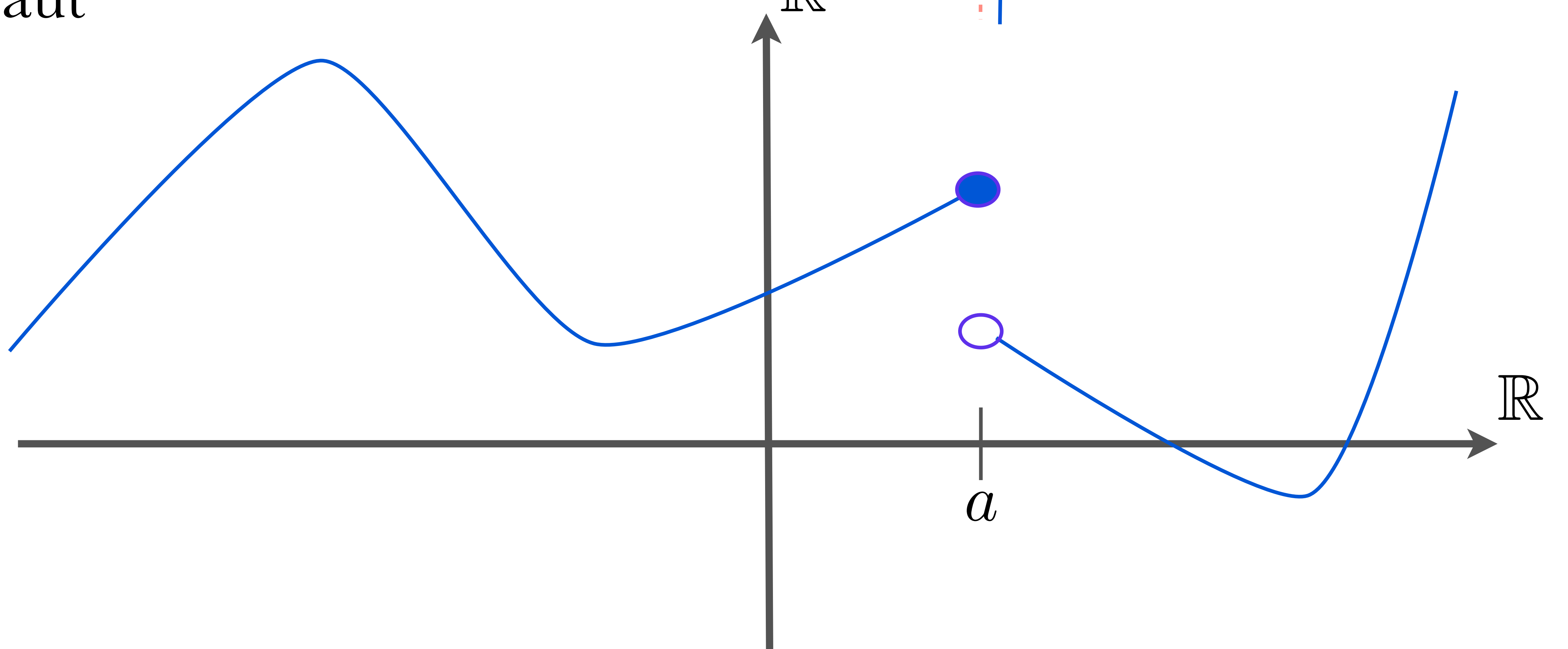
Un trou décalé



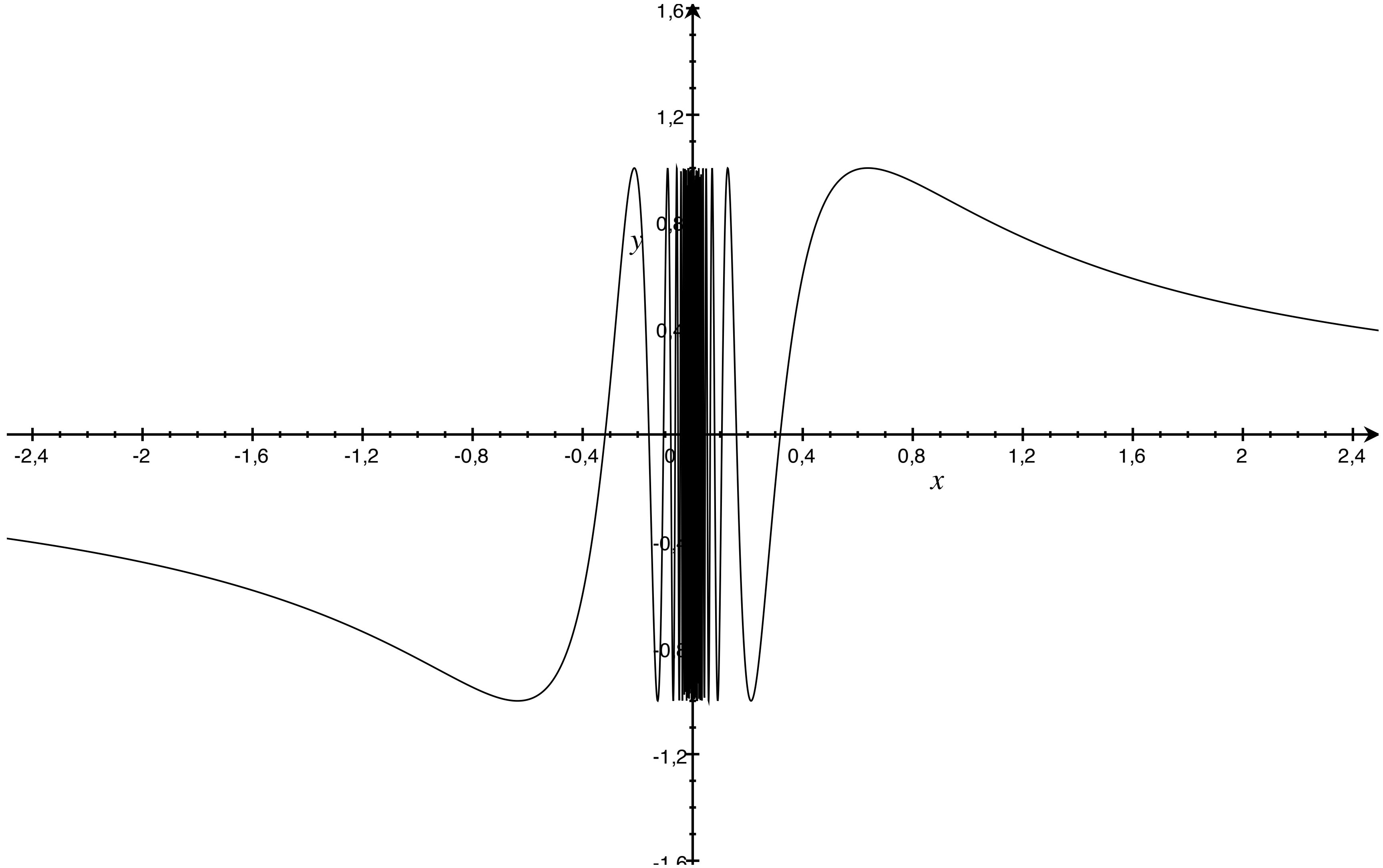
Une asymptote



Un saut



Une oscillation folle

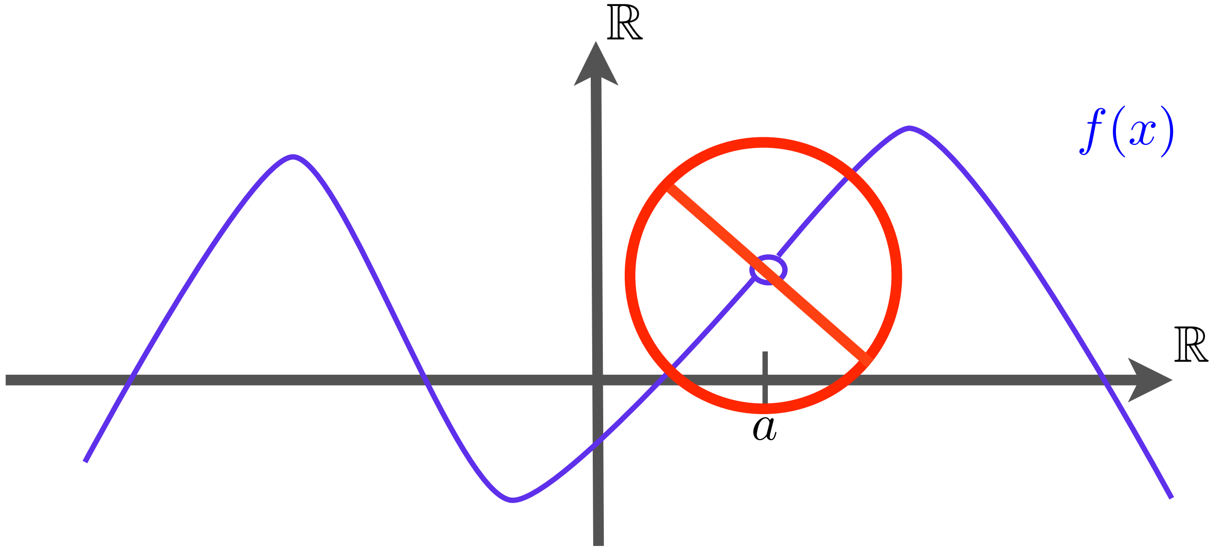


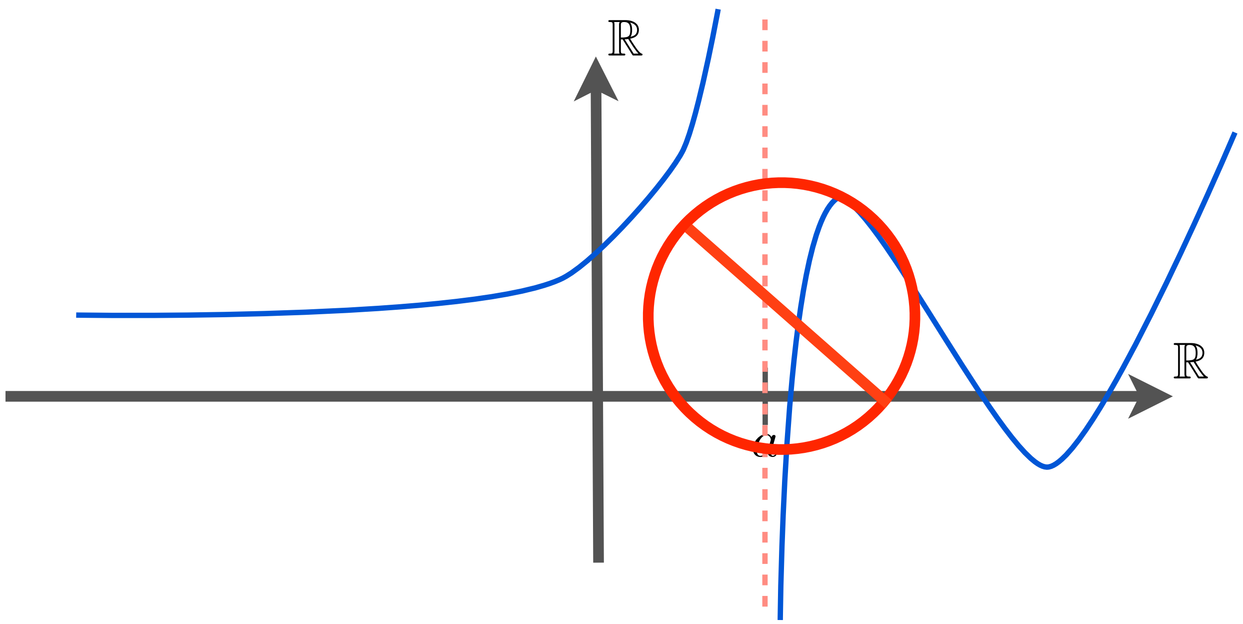
Faites les exercices suivants

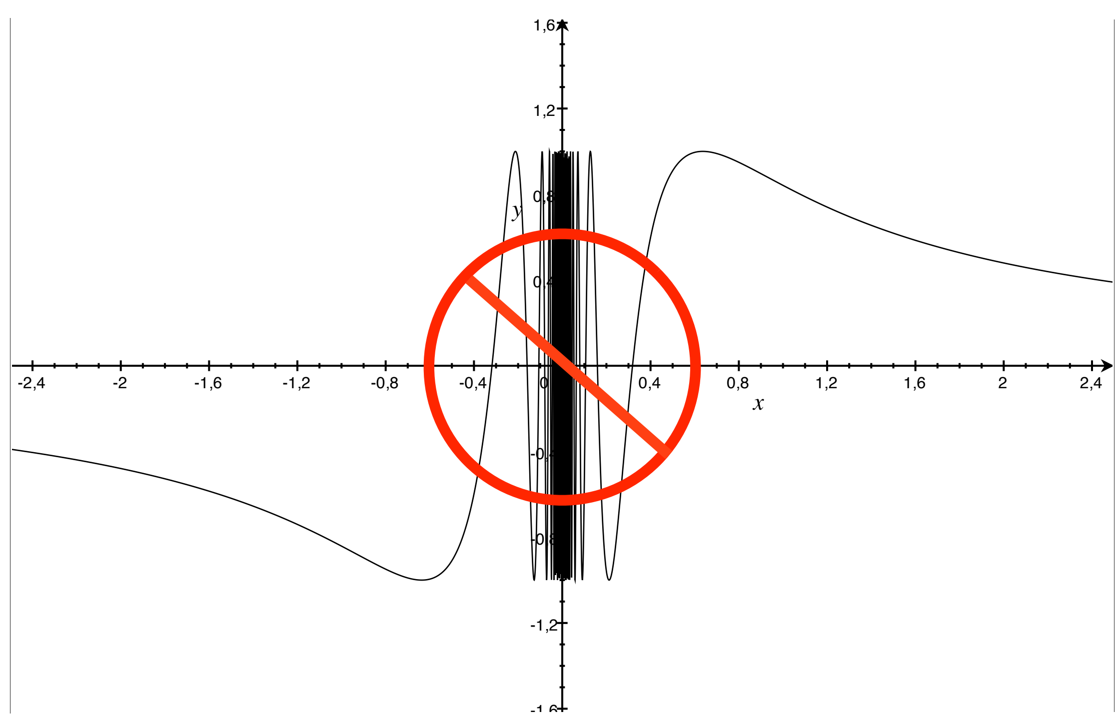
Section 1.6 # 32

Donc si on veut éliminer ces cas il suffit de dire qu'une fonction qui est continue en $x = a$ doit

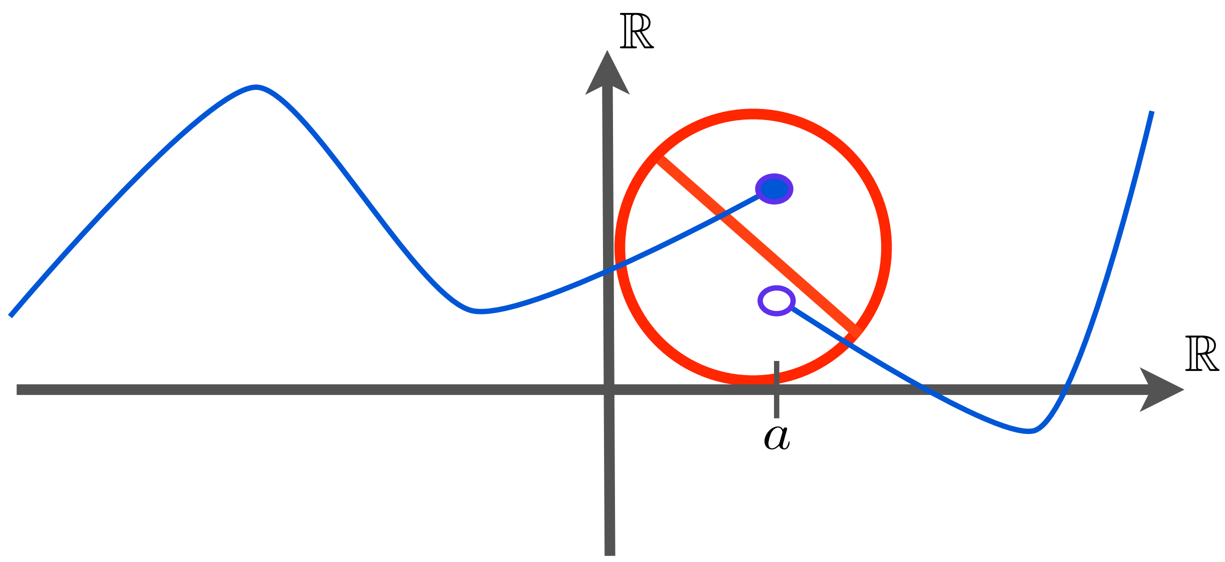
$$1) \quad a \in \mathrm{dom}(f) \qquad f(a) = \exists$$



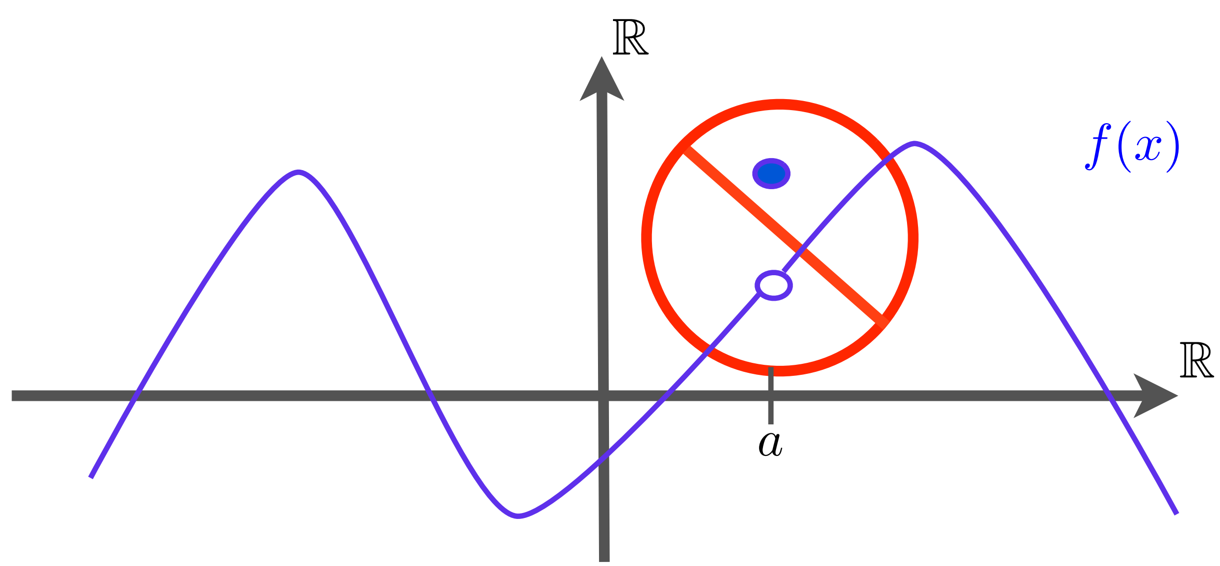




2) $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$



3) $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



Définition Une fonction $f(x)$ est continue en $x = a$ si

1) $\boxed{a \in \mathrm{dom}(f)}$

2) $\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)}$

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque: Ces trois conditions peuvent être remplacées par la dernière, car si on a que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$\exists$ $\exists$

cette égalité sous entend que

Définition

On dit qu'une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle $[b, c]$ si la fonction est continue pour toutes valeurs de x prise dans cet intervalle.

Définition

On dit qu'une fonction est continue si elle est continue pour toutes valeurs de x.

Faites les exercices suivants

Section 1.6 # 33 et 34

Remarque:

La première chose à vérifier dans l'exploration de la continuité d'une fonction est de déterminer quels sont les points qui NE sont PAS dans le domaine.

C'est-à-dire les valeurs, a, de x tel que

$$f(a) = \nexists$$

Remarque:

Au cours 3, on avait conclu, à la suite des théorèmes sur les limites que pour toutes valeurs de *a* du domaine d'une fonction algébrique

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ce qui revient à dire que toute fonction algébrique est continue sur son domaine.

Faites les exercices suivants

Section 1.6 # 35

Exemple

La fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x & 1 < x \end{cases}$

est continue sur $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$ car x^2 et x sont continue.

Reste à voir si elle est continue en 1.

1) $f(1) \in \mathrm{dom}(f)$ car $f(1) = 1$ ✓

2) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \checkmark$$

3) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$ ✓

Donc *f(x)* est continue en 1.

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 2 \\ x^2 - 6 & 2 \leq x \end{cases}$$

1) $f(2) = (2)^2 - 6 \quad = -2$ ✓

2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x^2 - 6 \quad = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 3x - 1 \quad = 3(2) - 1 \quad = 5$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) \quad \chi$$

Donc la fonction n'est pas continue en $x = 2$.

Faites les exercices suivants

Section 1.6 # 36

Asymptotes

On vient de voir que la limite nous a permis de définir rigoureusement un concept déjà connu, soit la continuité.

Et bien, la limite nous permet aussi de définir correctement le concept d'asymptote.

Définition

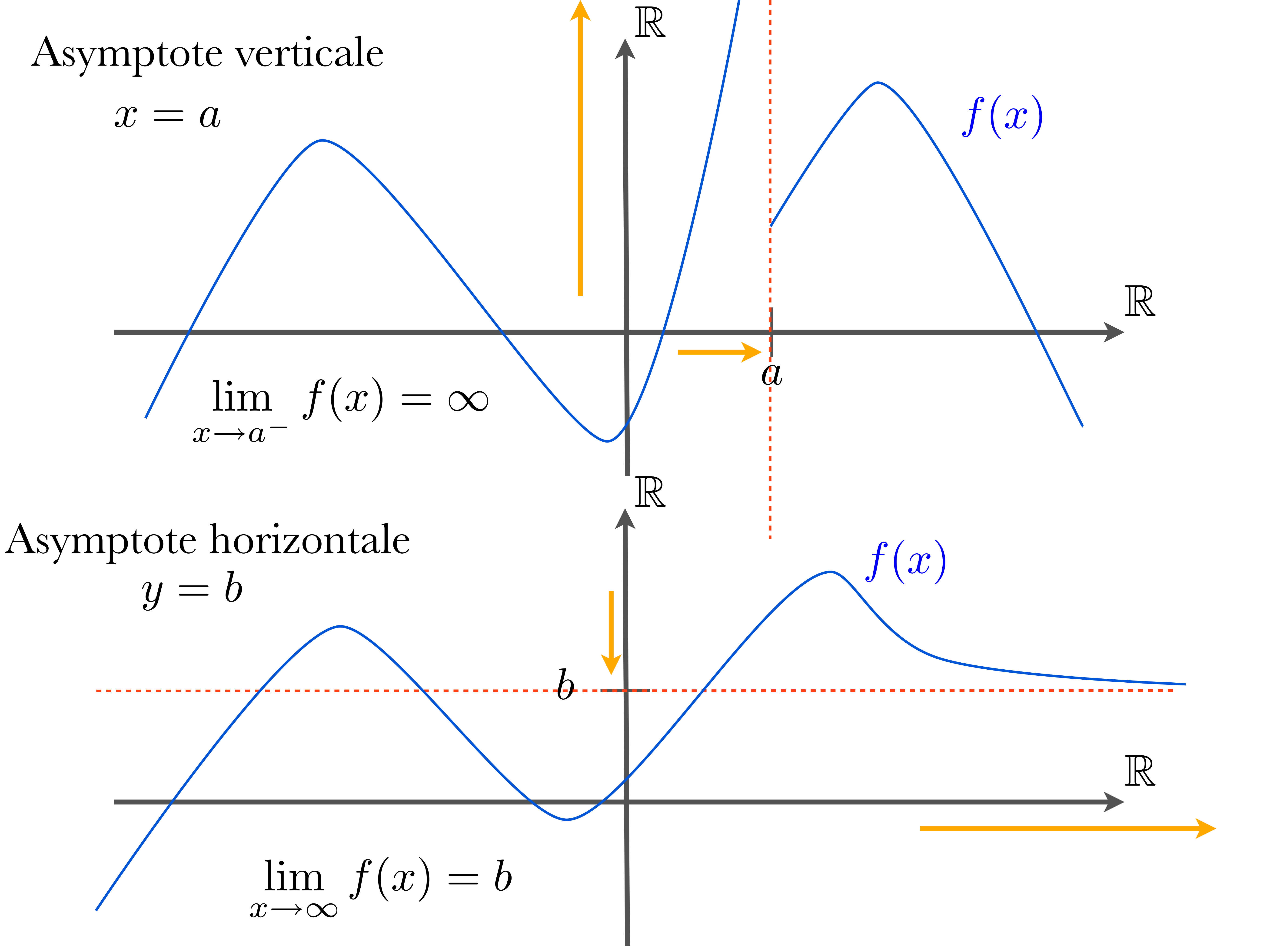
On dit que la fonction $f(x)$ possède une asymptote verticale en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Définition

On dit que la fonction $f(x)$ possède une asymptote horizontale en $y = k$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}$$


Asymptote verticale
$x = a$
$\mathbb{R}$
$f(x)$
$\mathbb{R}$
a
$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$
$\mathbb{R}$
Asymptote horizontale
$y = b$
$f(x)$
b
$\mathbb{R}$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

Ceci nous amène à chercher à évaluer des limites de la forme

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Mais prendre des limites à l'infini fait apparaitre de nouvelles formes d'indétermination, soient

$$\infty \longleftarrow \infty - \infty \longrightarrow -\infty \qquad\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \begin{matrix} \nearrow \pm\infty \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

Pour ce genre de limite il y a, pour le moment, essentiellement qu'une façon de procéder.

C'est de mettre la plus grande puissance de x en évidence.

Exemple

$$\lim_{x\to\infty} 3x^2 - 7x = \lim_{x\to\infty} x^2\left(3 - \underbrace{\frac{7}{x}}_{0}\right) = 3(\infty)^2$$

$$= \infty$$

Exemple

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 8}{5x^3 + 3x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(3 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(5 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3 + \overbrace{\frac{2}{x}}^{0} + \overbrace{\frac{8}{x^3}}^{0}\right)}{\left(5 + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{0}\right)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

Bien qu'algébriquement on voit que ça fonctionne bien, on aurait pu raisonner ces problèmes plus simplement.

Lorsqu'on a un polynôme, le monôme du plus grand degré est le terme dominant vers plus ou moins l'infini.

$$f(x) = \boxed{7x^4} + 3x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$f(10^3) = 7(10^3)^4 + 3(10^3)^3 + 5(10^3)^2 + (10^3) + 1$$

$$= 7(10^{12}) + 3(10^9) + 5(10^6) + (10^3) + 1$$

$$= \boxed{7003005001001}$$

$$g(x) = 7x^4 \qquad \approx$$

$$g(10^3) = 7^{12} = \boxed{7000000000000}$$

Exemple

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 8}{5x^3 + 3x - 1} = \frac{3}{5}$$

Termes dominants

Termes négligeables

On peut donc «voir» directement la réponse.

Mais pour le moment, je vous demande tout de même de faire la démarche au complet.

Faites les exercices suivants

Section 1.6 # 42

Exemple Déterminer les asymptotes horizontales et verticales de la fonction

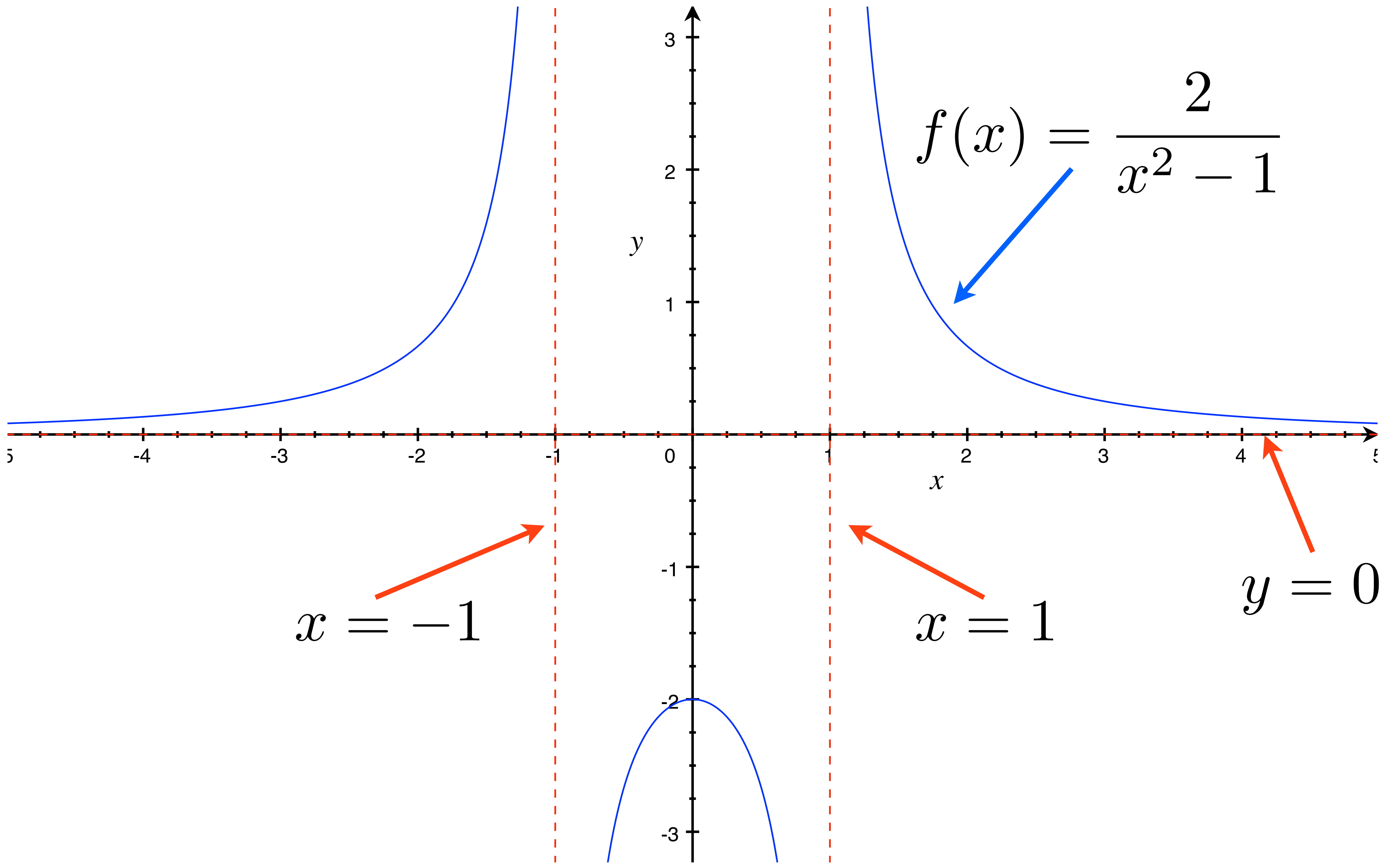
$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{2}{(-2)(0^-)} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{2}{(0^-)(2)} = -\infty$$

Donc on a des asymptotes verticales en $x = -1$ et $x = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{(\infty)^2} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{(-\infty)^2} = 0$$

Donc on a une asymptote horizontale en $y = 0$



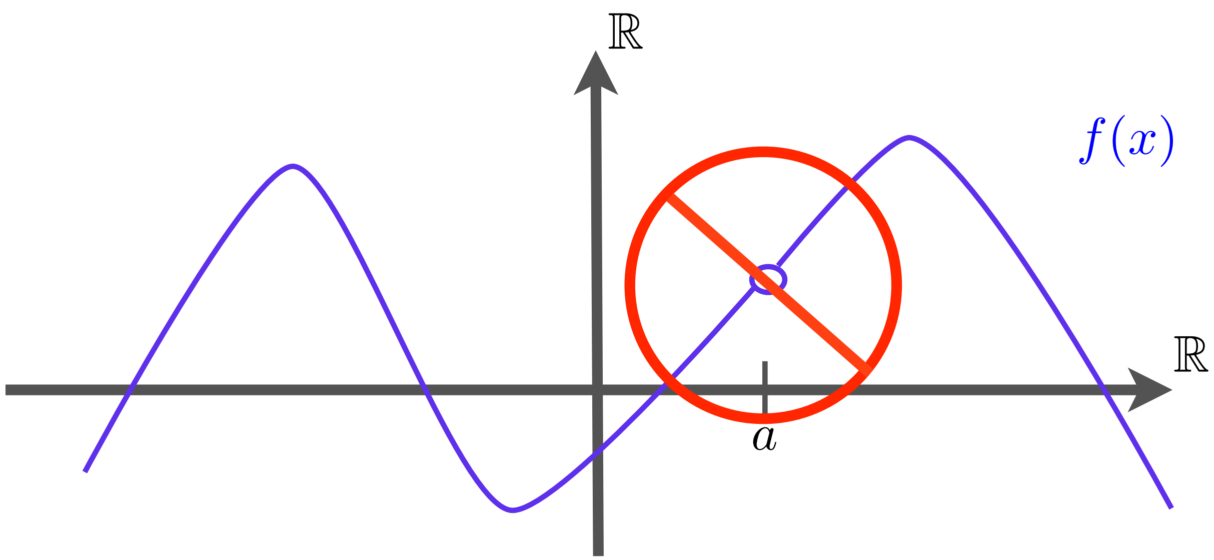
$f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$
$x = -1$
$x = 1$
$y = 0$
y
x
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

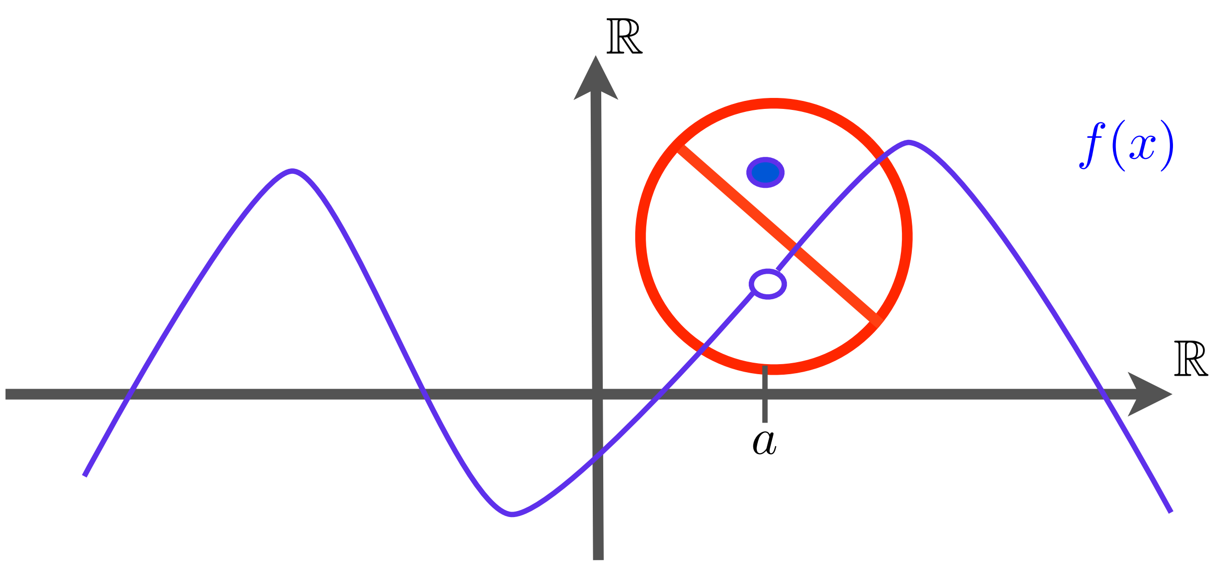
Faites les exercices suivants

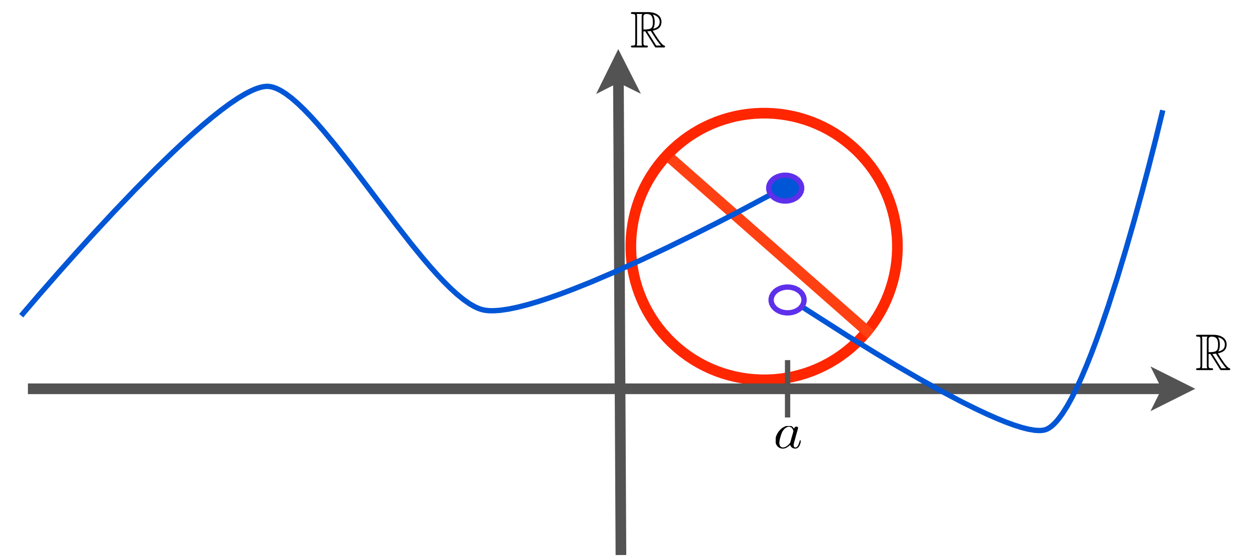
Section 1.7 # 46

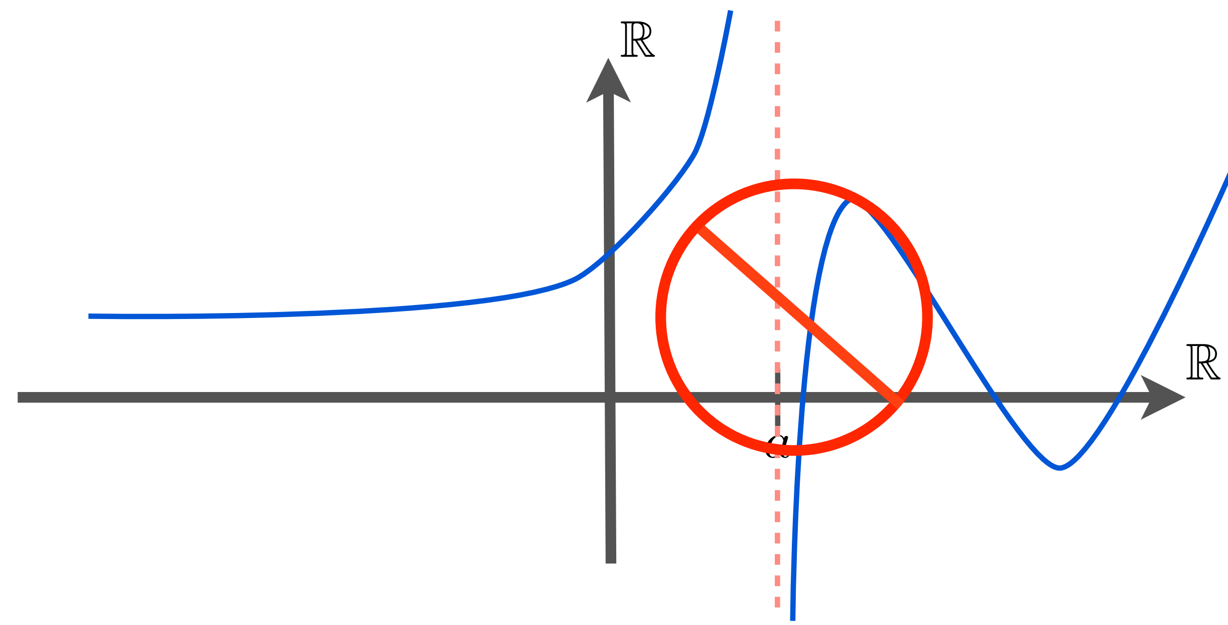
Aujourd'hui, nous avons vu

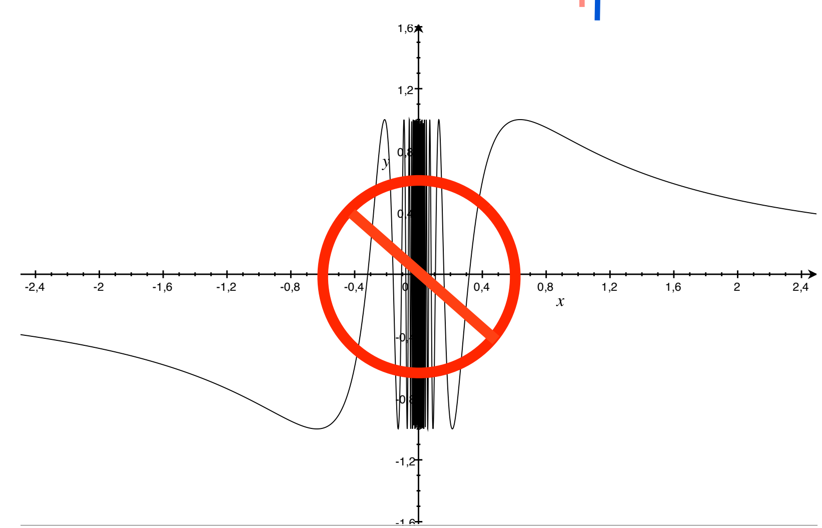
✓ Continuité











Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Vérification de la continuité

1) $a \in \text{dom}(f)$

2) $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

3) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

✓ Asymptotes

Verticale

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

ou

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Horizontale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

avec $k \in \mathbb{R}$

Devoir: Sections 1.6