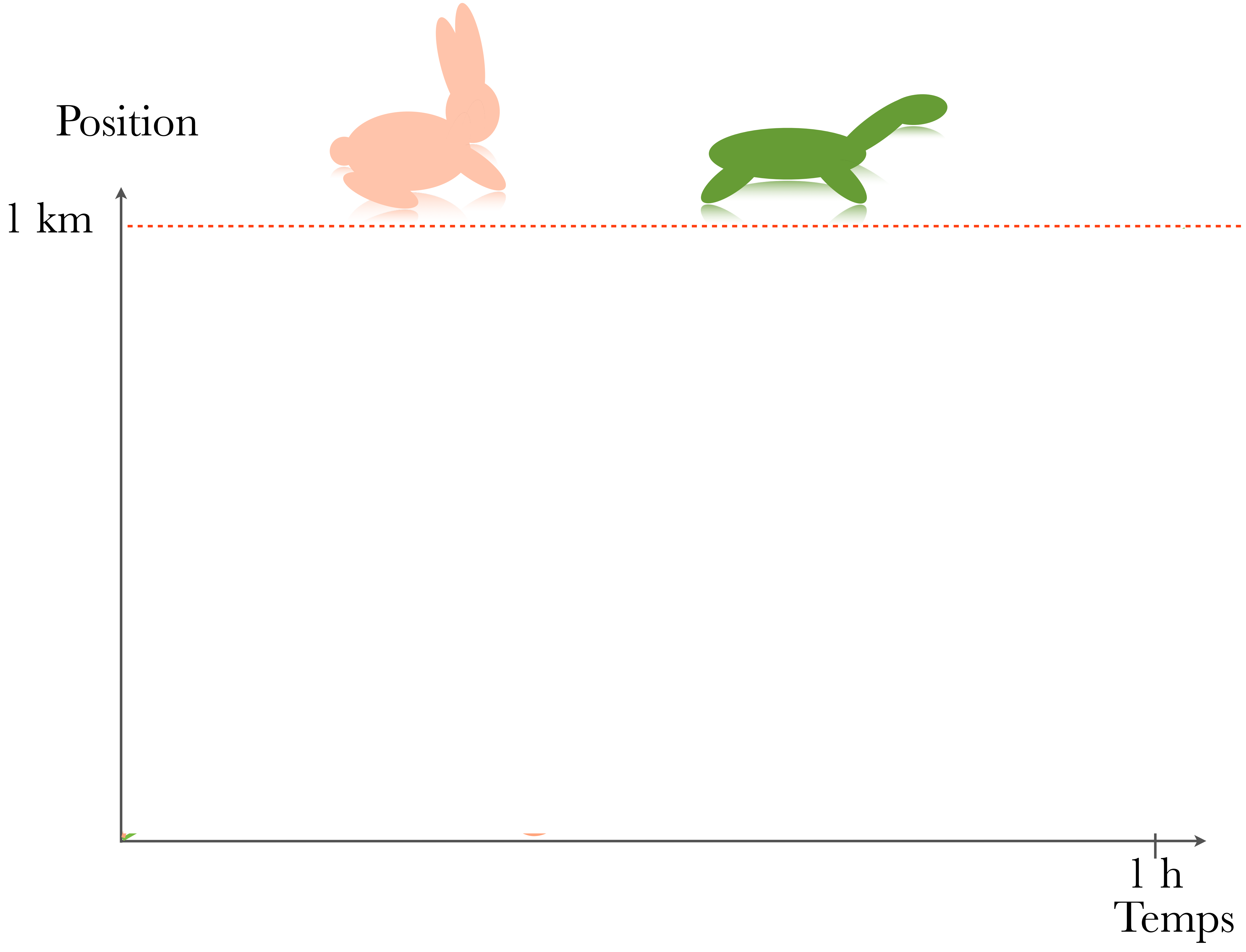
2.1 TAUX DE VARIATION

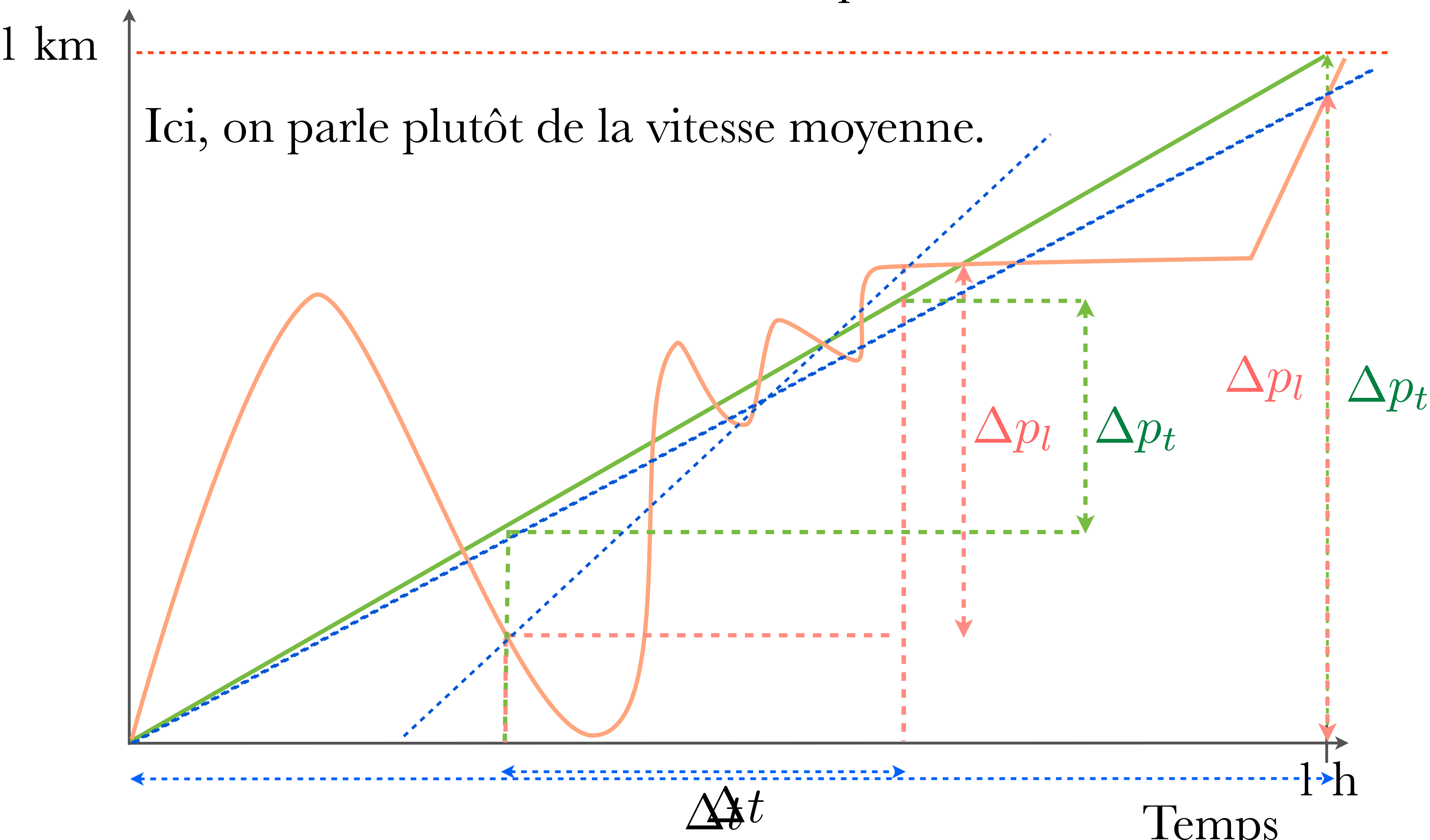
Cours 9

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Taux de variation moyen
- ✓ La dérivée en un point

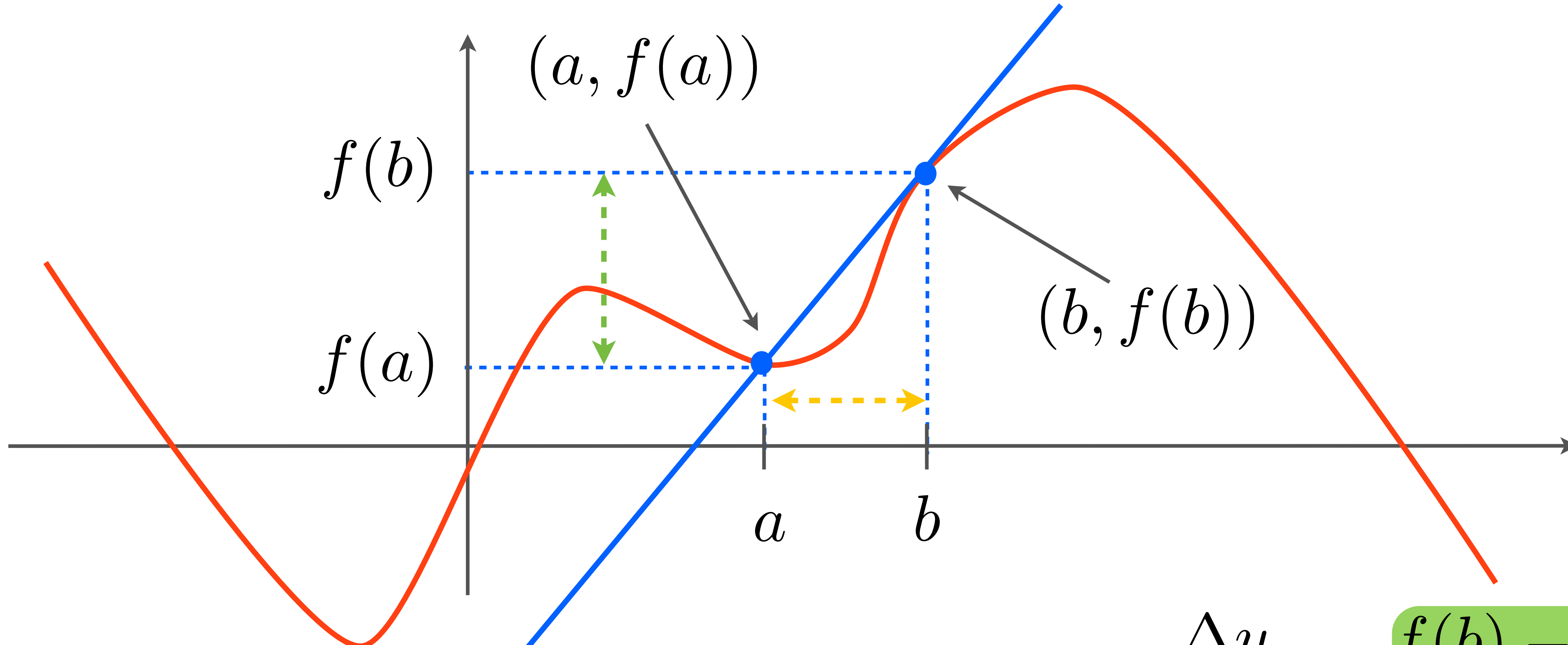

Position
1 km
1 h
Temps

La vitesse c'est quoi?



$$\frac{\text{déplacement}}{\text{temps}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1\text{km}}{1\text{h}} = \text{pente de la droite sécante}$$

De manière générale, on parle de taux de variation moyen.

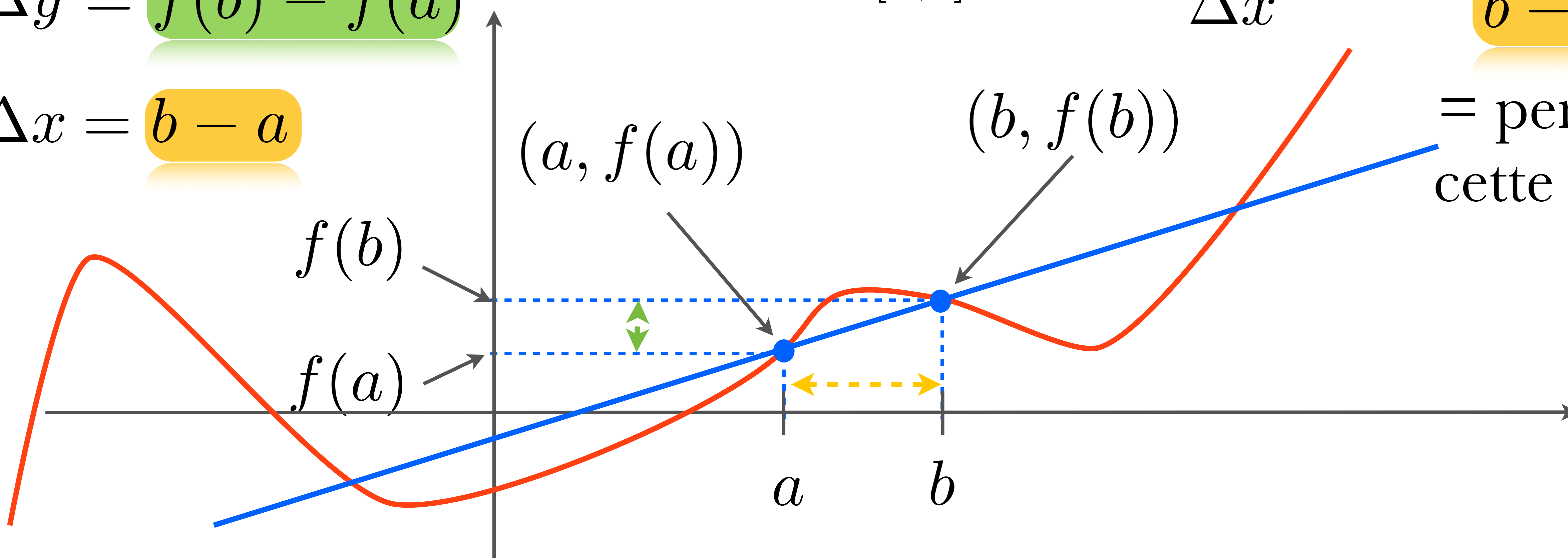


$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Delta y = f(b) - f(a)$$

$$\Delta x = b - a$$

= pente de cette droite



Si on fixe un intervalle $\Delta x = b - a$ on est en mesure

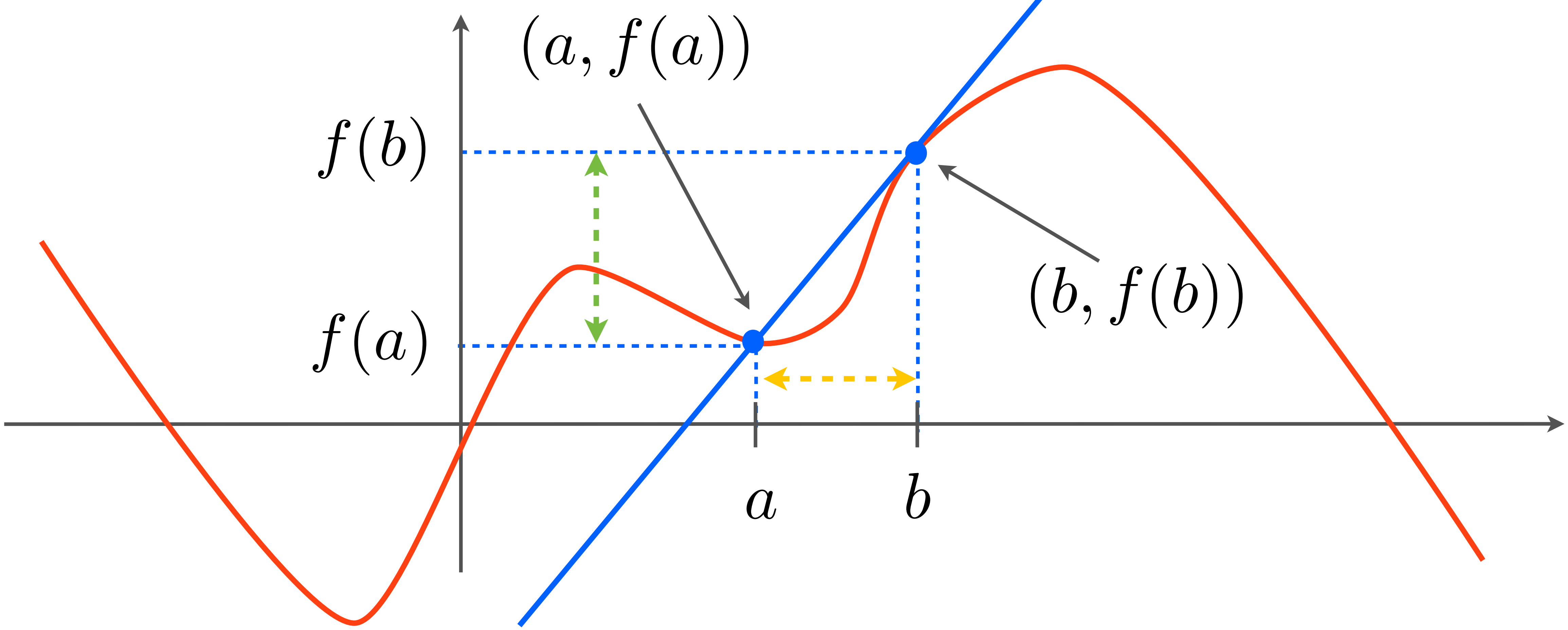
de comparer les croissances de deux fonctions.

$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

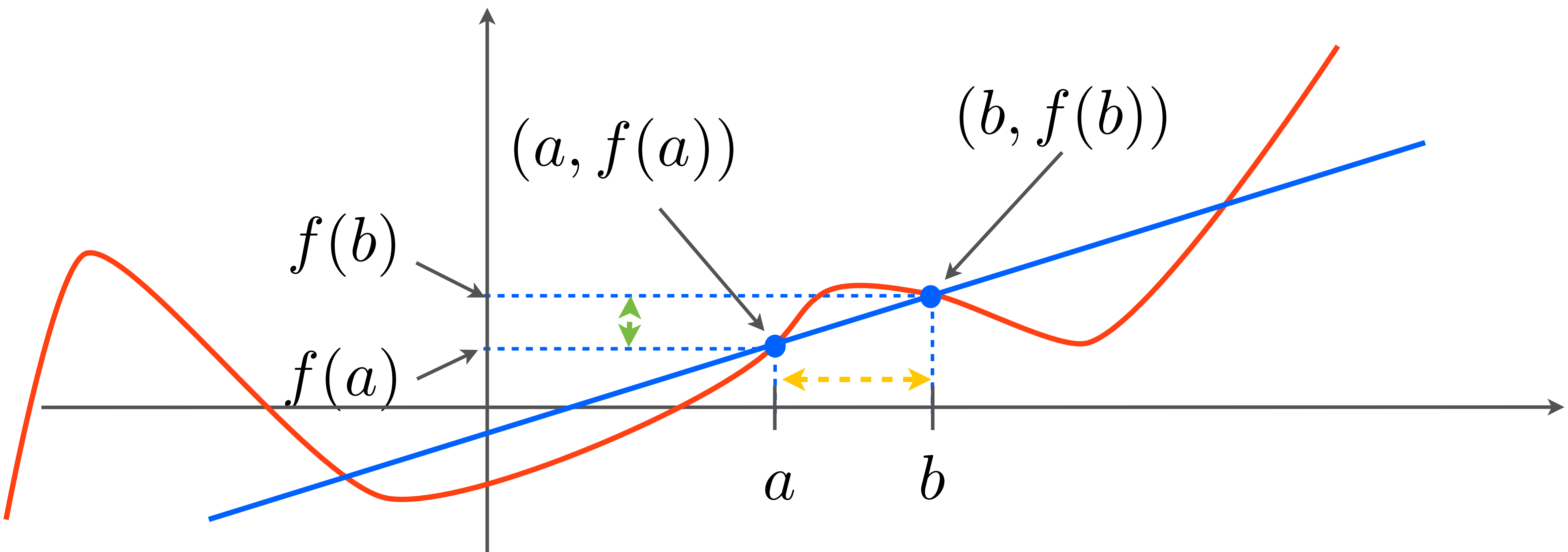
Ceci étant le même

$$TVM_{[a,b]}g(x) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

La distinction entre les 2 TVM est la différence de hauteur de chaque fonction sur l'intervalle donné.



Puisque la pente en haut est plus grande que la pente en bas, on peut conclure que la fonction du haut grandit plus vite.



L'avantage du TVM est qu'on n'a pas besoin de «voir» la fonction.

Exemple

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$TVM_{[1,2]}f(x) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{(2)^3 - (2) + 1 - ((1)^3 - (1) + 1)}{1}$$

$$= 8 - 2 + \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{1}$$

$$= 6$$

Faites les exercices suivants

Calculer les taux de variation moyens suivants:

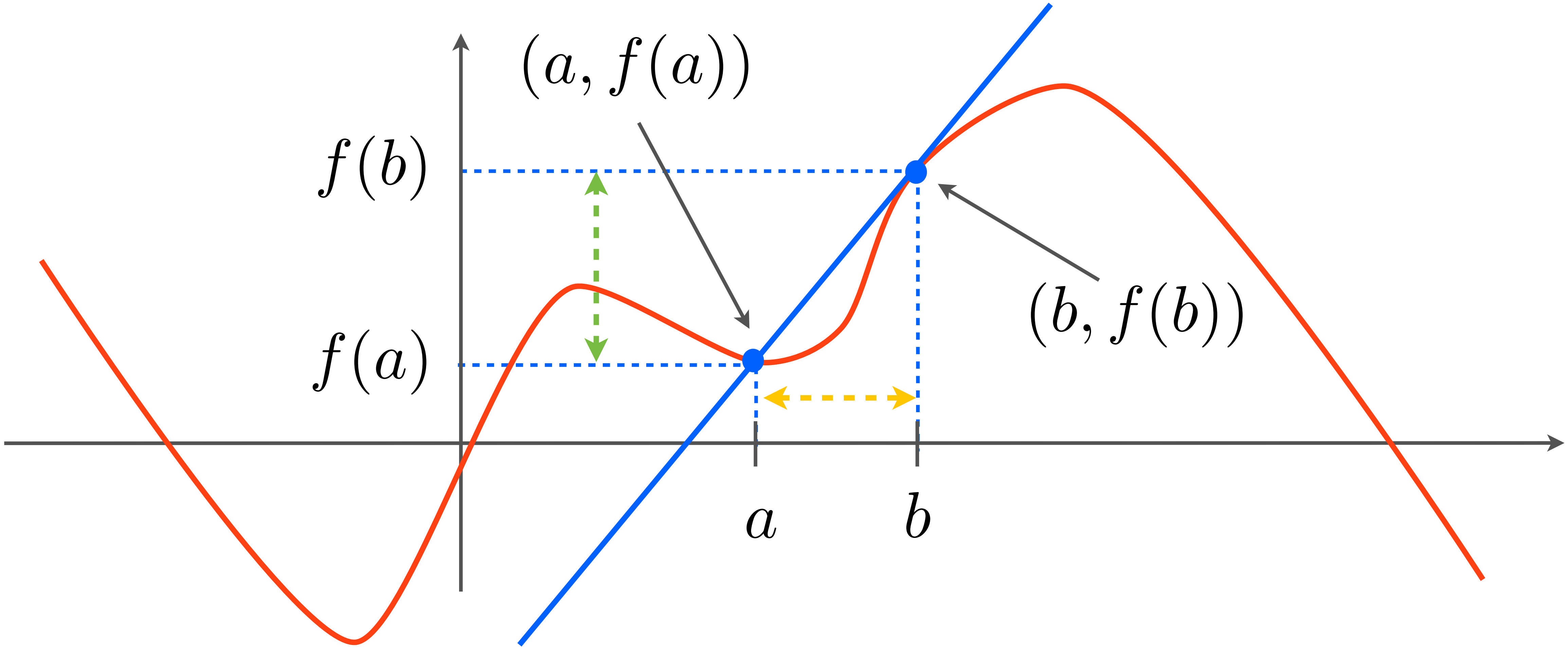
1) $TVM_{[2,5]}f(x)$

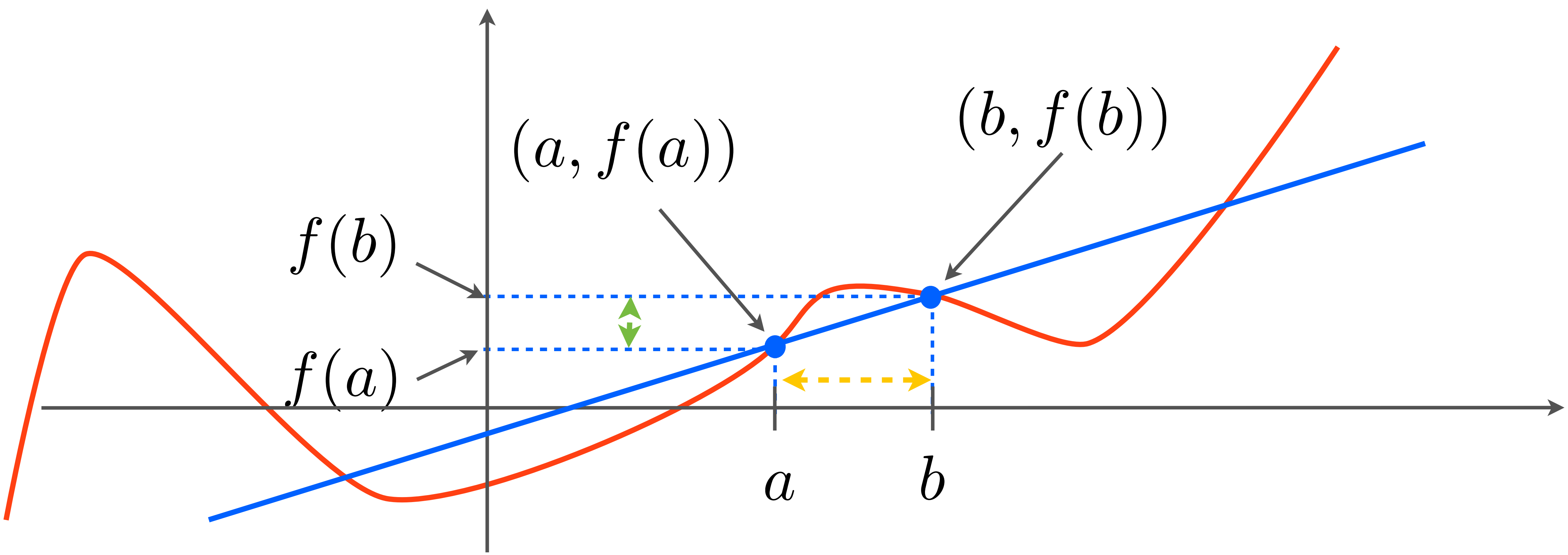
avec $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

2) $TVM_{[-1,3]}f(x)$

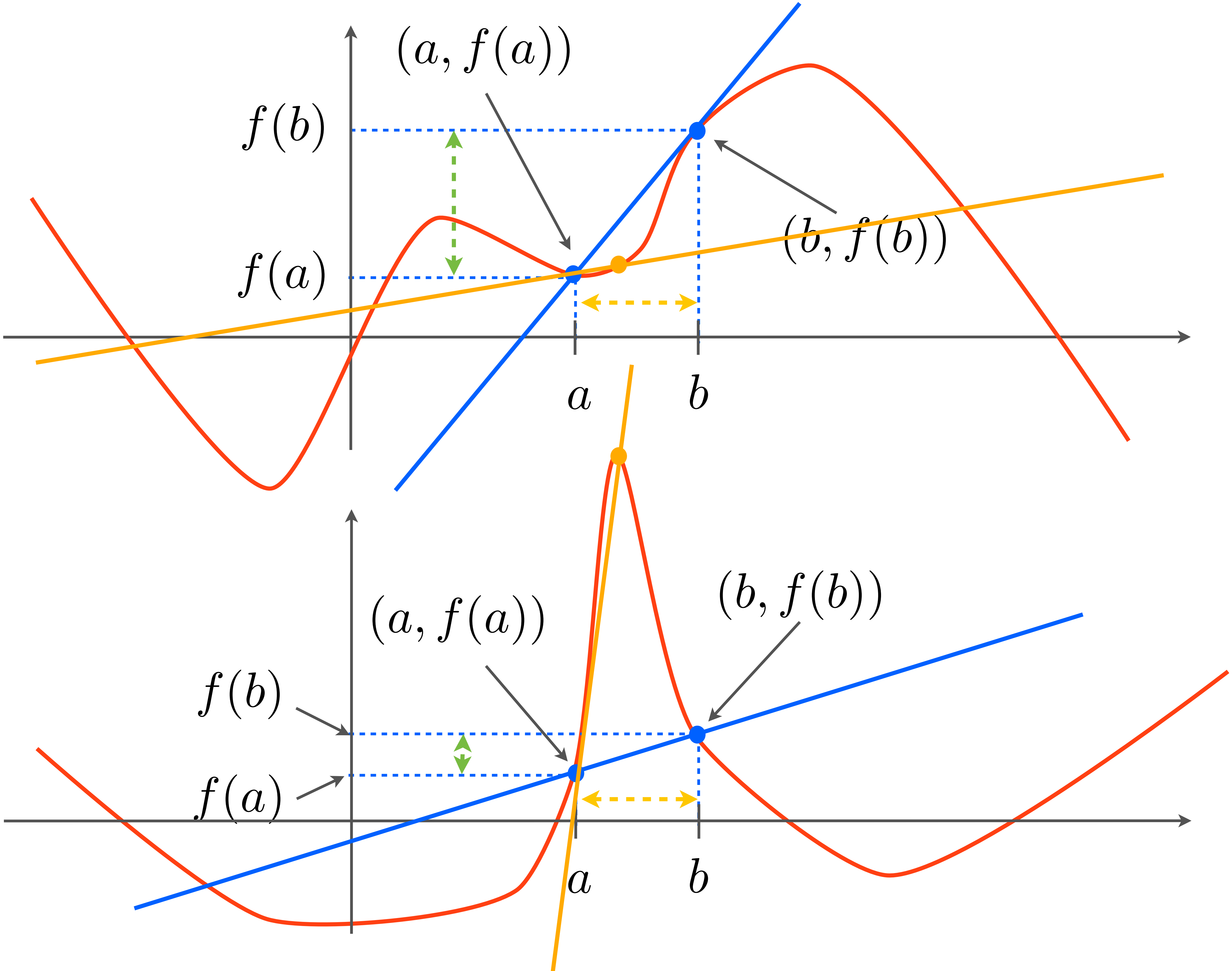
avec $f(x) = \dfrac{4x-3}{x-1}$

Il y a un petit problème avec cette approche.





Il y a un petit problème avec cette approche.



Puisque la pertinence de notre réponse dépend du Δx choisi,

il serait bien de savoir lequel on doit prendre.

Une chose est sure, plus il est petit, mieux c'est.

Or le problème, si on le prend = 0, est que

$$TVM_{[a,a]}f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(a)}{a - a} = \nexists$$

Hum... un $\dfrac{0}{0}$ il me semble que j'ai déjà vu ça!

Mais pour gérer les indéterminations zéro sur zéro, il faut être dans une limite et donc avoir une fonction.

Mais

$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

est un nombre!

Il va falloir construire une fonction avec.

La première étape serait de réécrire le b.

Si on pose $\quad b = a + \Delta x$

$$TVM_{[a,b]} f(x) = TVM_{[a,a+\Delta x]} f(x)$$

$$= \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{a + \Delta x - a}$$

$$= \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

On peut donc créer une fonction qui donne le taux de variation moyen en fonction de la variation en x

$$TVM_{a,f(x)}(\Delta x) = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

La fonction

La variable

Cette notation est temporaire...

Exemple

$$f(x) = 3x^2 - x + 5 \qquad a = 1$$

$$TVM_{[1,1+\Delta x]}f(x) = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{3(1+\Delta x)^2 - (1+\Delta x) + 5 - (3(1) - (1) + 5)}{\Delta x}$$

$$= \frac{3(1+2\Delta x+\Delta x^2) - \cancel{1} - \Delta x + \cancel{5} - 3 + \cancel{1} - \cancel{5}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cancel{3} + 6\Delta x + 3\Delta x^2 - \Delta x - \cancel{3}}{\Delta x}$$

$$= \frac{5\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = TVM_{1,f(x)}(\Delta x)$$

$$= \frac{5\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} \quad = TVM_{1,f(x)}(\Delta x)$$

Donc si on veut $\quad TVM_{[1,2]} f(x)$

$$\Delta x = 2 - 1 \quad = 1$$

$$TVM_{1,f(x)}(1) = \frac{5(1) + 3(1)^2}{1} \quad = 8$$

et si on veut $\quad TVM_{[1,4]} f(x)$

$$\Delta x = 4 - 1 \quad = 3$$

$$TVM_{1,f(x)}(3) = \frac{5(3) + 3(3)^2}{3} \quad = 14$$

Faites les exercices suivants

Section 2.1 # 1 à 3

GeoGebra

Maintenant, on est près pour prendre la limite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} TVM_{a,f(x)}(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Ceci donne quelque chose d'intéressant qui mérite un nom.

Définition La dérivée de la fonction *f(x)* au point $x = a$ est

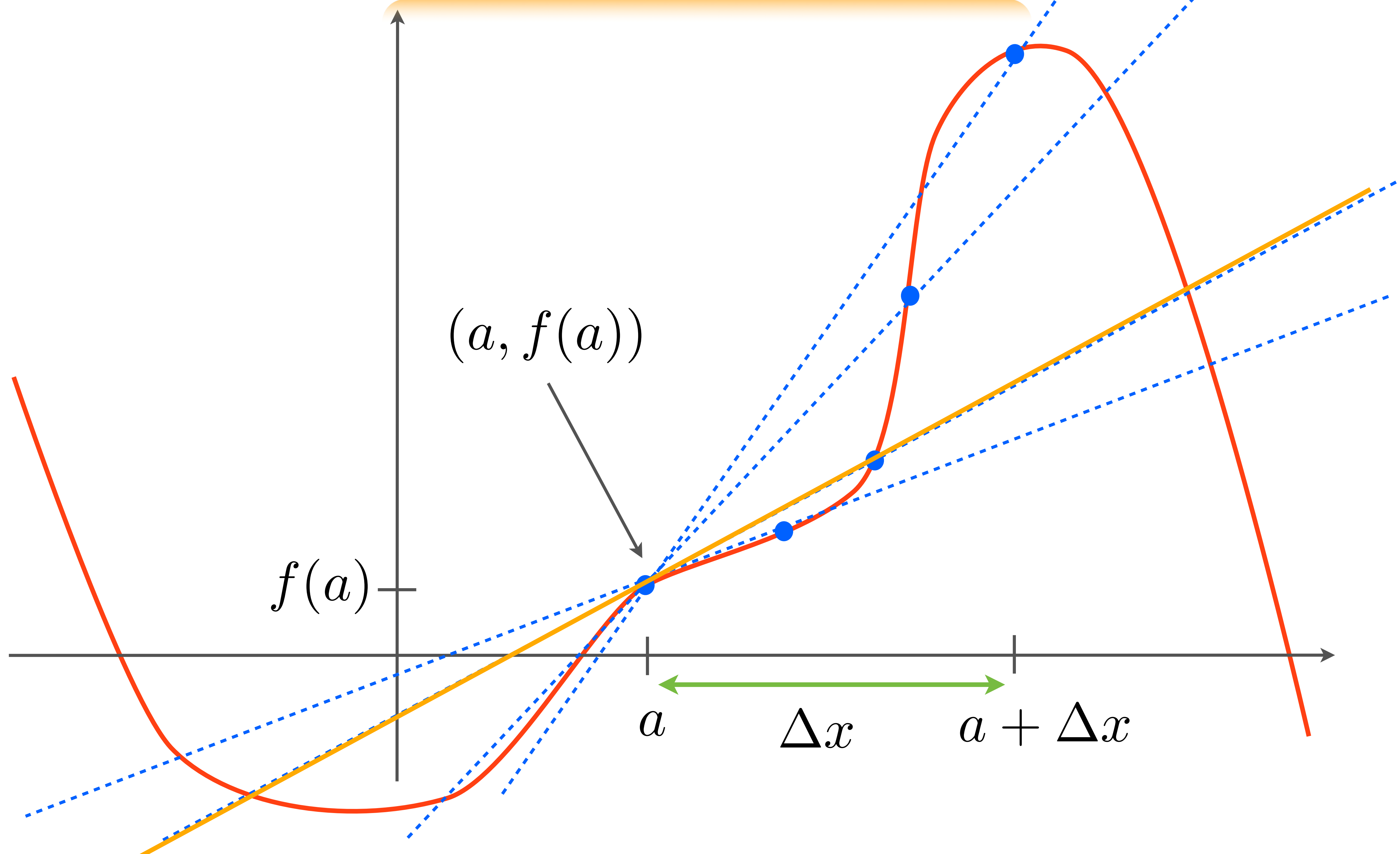
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

On dit aussi le taux de variation instantané.

$$f'(a) = TVI_a f(x)$$

GeoGebra

Géométriquement, la dérivée représente la pente de la droite tangente à la fonction au point *(a,f(a))*.



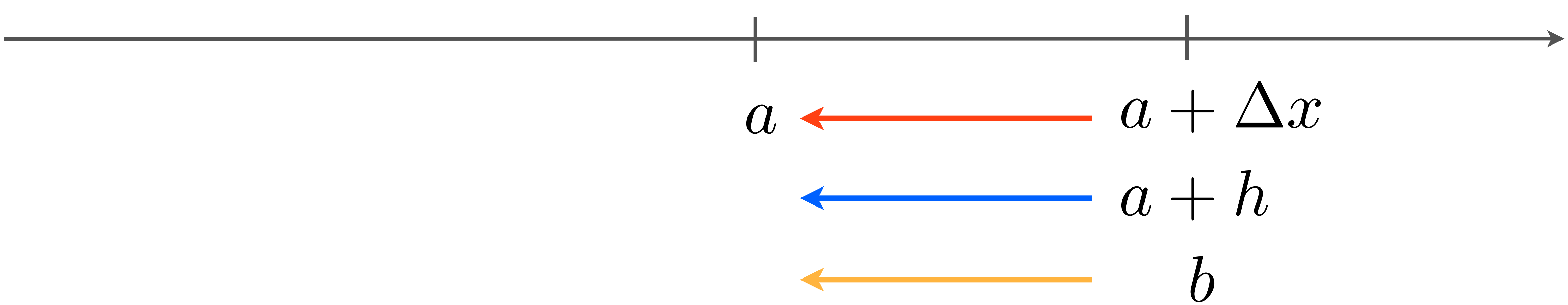
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \text{la pente de cette droite}$$

On utilise parfois d'autres lettres pour la dérivée.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

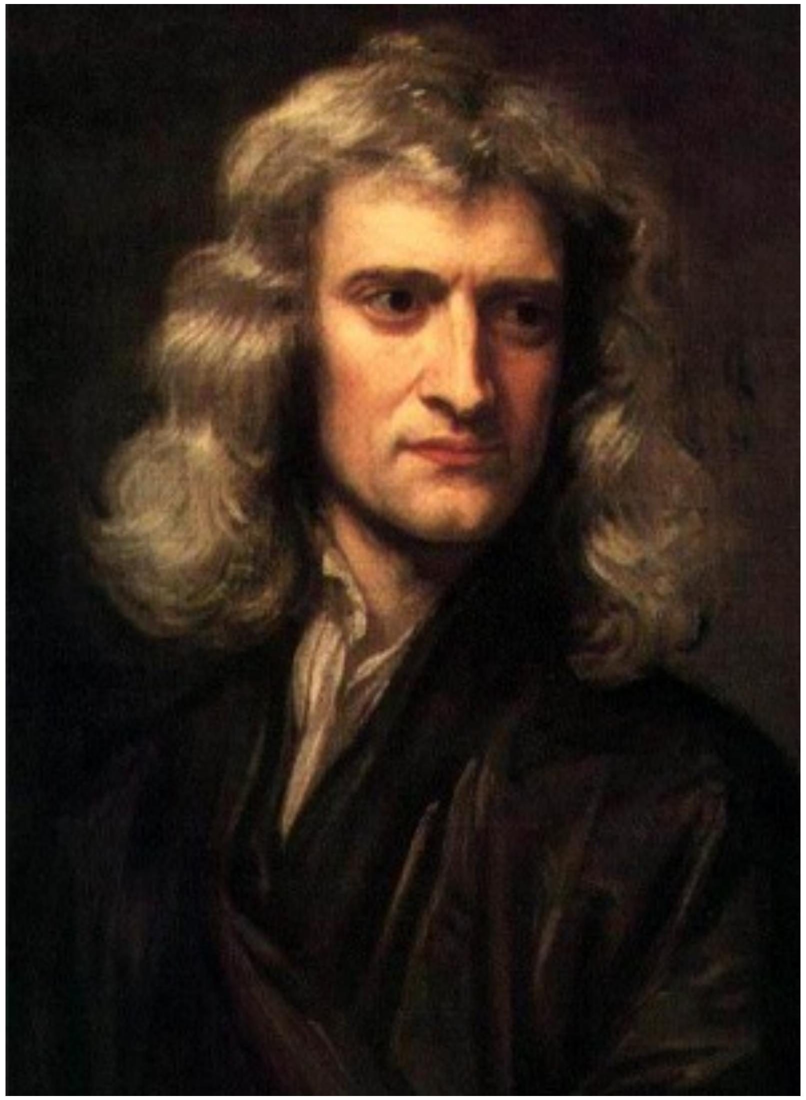
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Le calcul différentiel ne date pas d'hier.

Il a été découvert simultanément et de manière indépendante par



Isaac Newton
(1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

Exemple

Calculer $f'(2)$ pour $f(x) = x^2 - 3x + 1$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 3(2 + \Delta x) + 1 - ((2)^2 - 3(2) + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - \cancel{6} - 3\Delta x + \cancel{1} - 4 + \cancel{6} - \cancel{1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4} + 4\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x - \cancel{4}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(1 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 + \Delta x \quad = 1$$

Faites les exercices suivants

Calculer $f'(2)$ pour

a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

b) $f(x) = \sqrt{x + 7}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

Faites les exercices suivants

Section 2.1 # 4 à 6

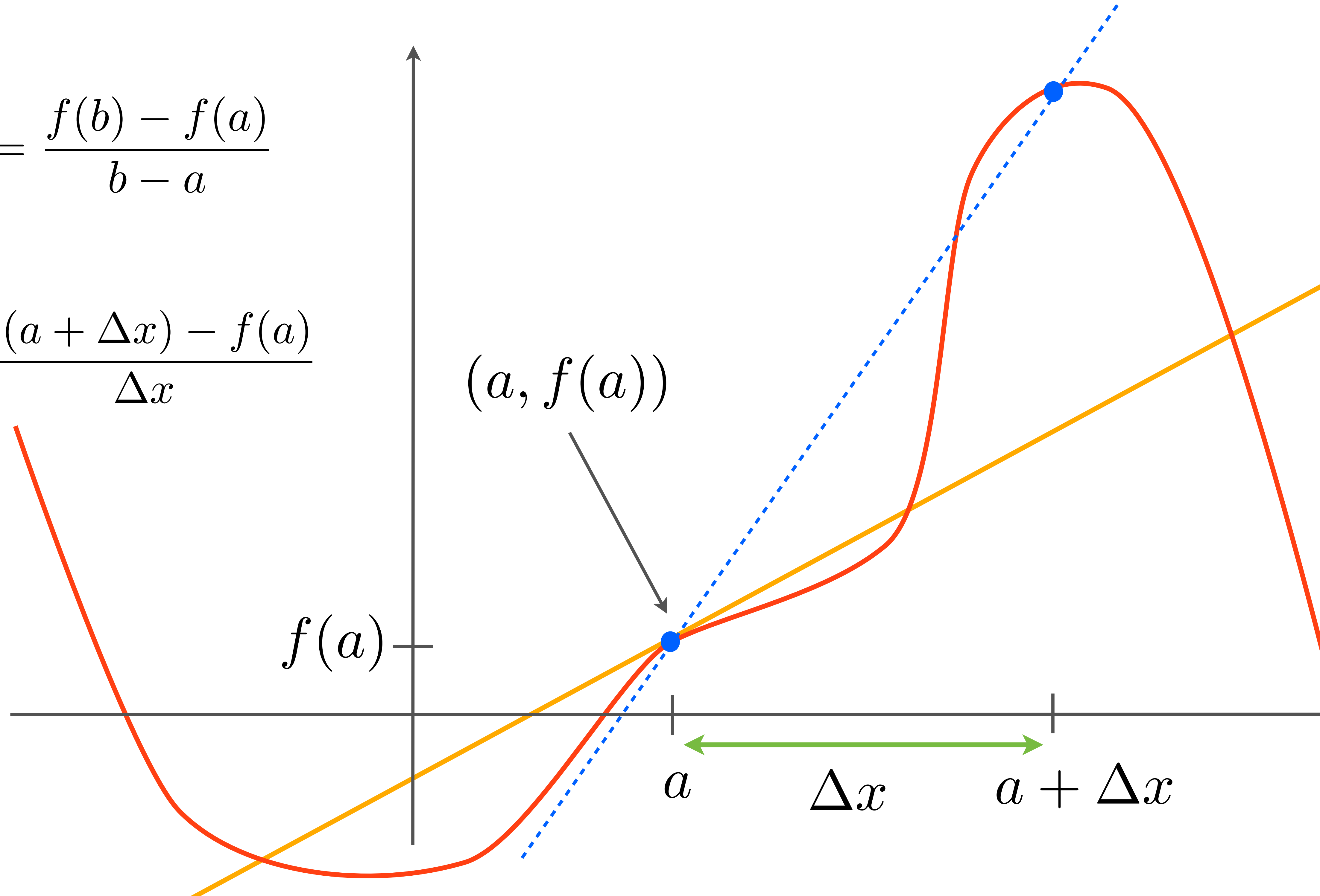
Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Taux de variation moyen

✓ Dérivée en un point

$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



Devoir: Section 2.1