2.4 DÉRIVÉE D'UNE COMPOSITION

cours 12

Au dernier cours, nous avons vu

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Lien entre dérivable et continue
- ✓ Dérivée d'une composition de fonction

Définition

Une fonction est dite dérivable en un point *a* si

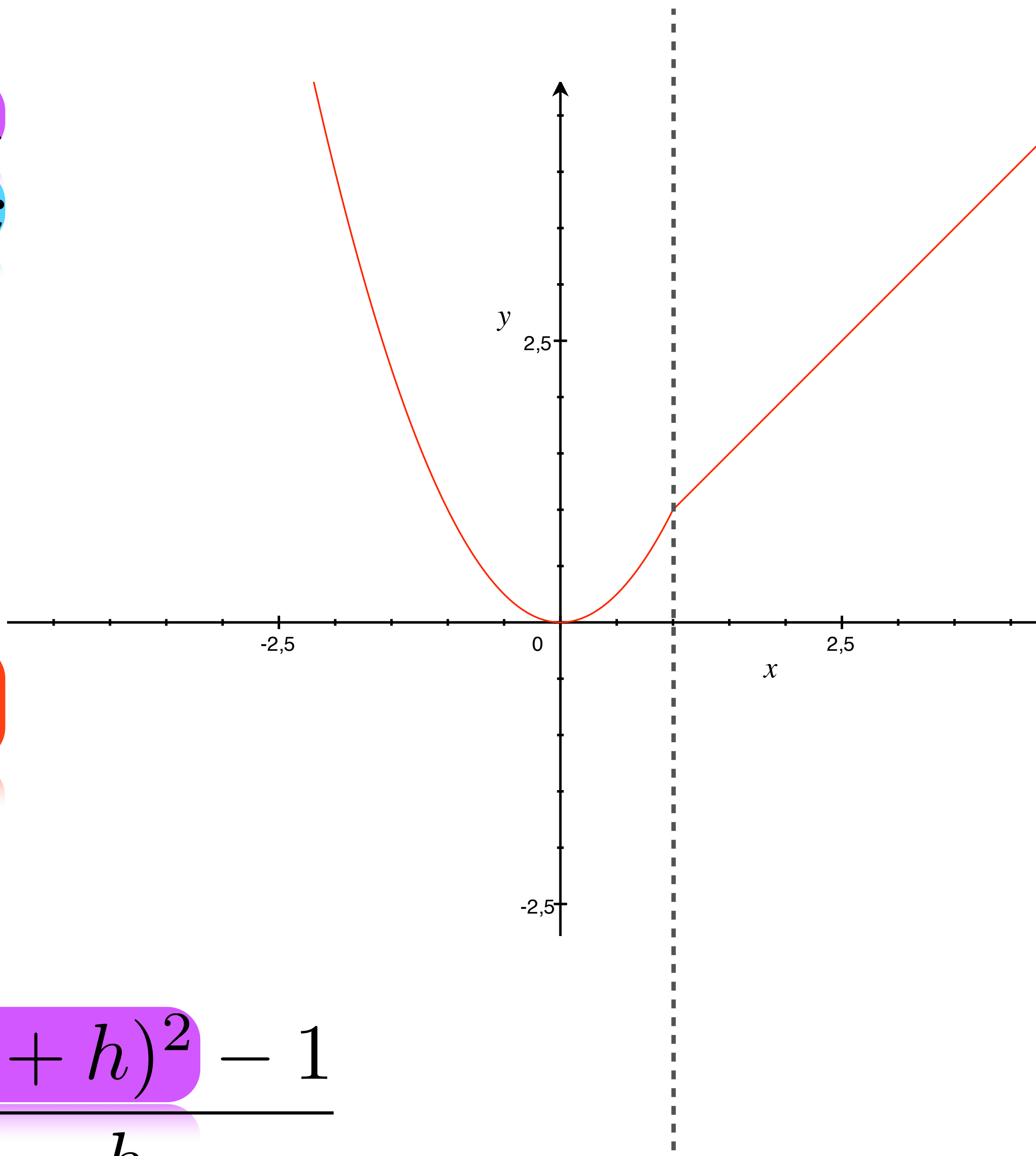
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe.}$$

C'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x & 1 < x \end{cases}$$



$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \boxed{1}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(2+h)}{h} = \boxed{2}$$

Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.

Théorème f est dérivable en a $\Longrightarrow$ f est continue en a.

Preuve: Pour montrer que f est continue, il faut montrer que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) - f(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) \left(\frac{x-a}{x-a}\right)$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right)(x-a)$$

Si cette limite existe

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right) \lim_{x \to a} (x-a)$$

Mais

$$= f'(a)(0) = 0$$

Le dernier théorème n'est pas très pratique, car il est plus simple de savoir si une fonction est continue que dérivable.

Par contre, la contraposé de l'affirmation nous aide.

$A \Longrightarrow B$

Si j'ai mangé des betteraves

alors j'ai la langue rouge

$\neg B \Longrightarrow \neg A$

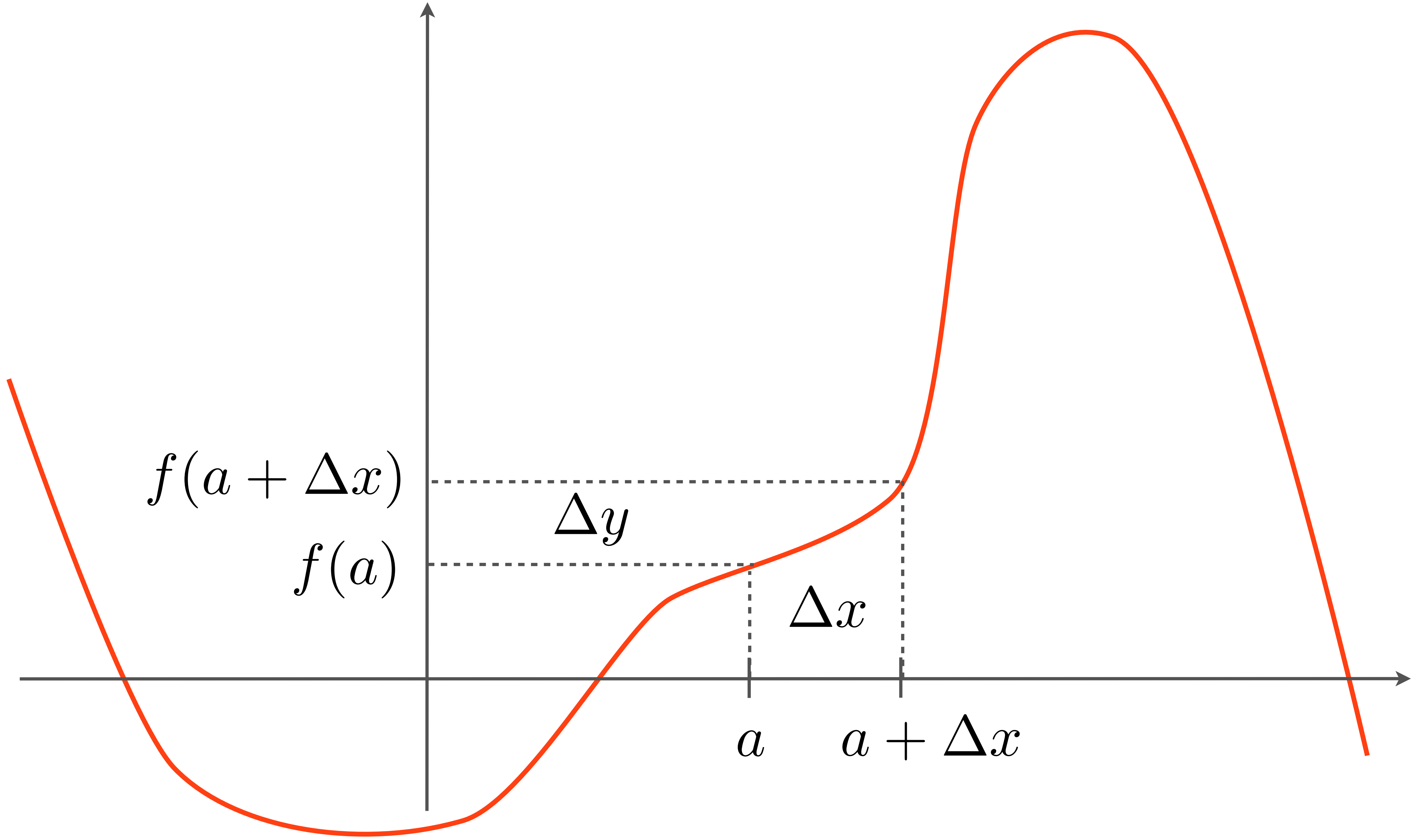
Si je n'ai pas la langue rouge

alors je n'ai pas mangé de betteraves

Corollaire:

f n'est pas continue en a $\Longrightarrow$ f n'est pas dérivable en a.

Soit $f(x)$ une fonction continue



Si $\Delta x \to 0$ alors $f(a+\Delta x) - f(a) \to 0$

$\Delta y \to 0$

Théorème $f(g(x))'$

Cherchons:

$$f(g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \right) \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) g(x)'$$

Théorème $$f(g(x))' = f(g(x))'g(x)'$$

Cherchons: $$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) g(x)'$$

$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \right) g(x)' \qquad = f(u)'g(x)'$$

$$= f(g(x))'g(x)'$$

$$u = g(x)$$

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

$$\Delta x \to 0 \implies \Delta u \to 0$$ Continuité

$$f(u+\Delta u) = f\left(\cancel{g(x)} + \left(g(x+\Delta x) - \cancel{g(x)}\right)\right)$$

$$= f\left(g(x+\Delta x)\right)$$

fonction extérieur

$$f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

fonction intérieur

La dérivée d'une composition est

la dérivée de la fonction extérieur

évaluée en la fonction intérieur

multipliée par la dérivée de la fonction intérieur.

Exemple

$$h(x) = \sqrt{3x^2 - 5x}$$

fonction extérieur

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 5x}}$$

fonction intérieur

$$g(x) = 3x^2 - 5x$$

$$g'(x) = 6x - 5$$

$$f(g(x)) = f(3x^2 - 5x) = \sqrt{3x^2 - 5x} = h(x)$$

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 5x}}(6x - 5)$$

$$= \frac{(6x - 5)}{2\sqrt{3x^2 - 5x}} = \frac{6x - 5}{2\sqrt{x(3x - 5)}}$$

Exemple

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{2x-1}\right)^5$$

fonction extérieur

fonction intérieur

$$g(x) = x^5 \qquad h(x) = \frac{x^3}{2x-1}$$

$$g'(x) = 5x^4 \qquad h'(x) = \frac{(x^3)'(2x-1) - x^3(2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{3x^2(2x-1) - x^3(2)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = g(h(x))' = g'(h(x))h'(x) = 5\left(\frac{x^3}{2x-1}\right)^4 \left(\frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}\right)$$

$$= \frac{5x^{12}(4x^3-3x^2)}{(2x-1)^6} = \frac{5x^{14}(4x-3)}{(2x-1)^6}$$

Faites les exercices suivants

Section 2.4 # 29 et 30

$$y = f(x) \qquad u = g(y)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad g'(y) = \frac{du}{dy}$$

$u = g(y)$ dépend de y mais $y = f(x)$ dépend de x

Donc u dépend indirectement de x

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}g(y) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

$$= g'(y)f'(x)$$

$$= \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Règle de dérivation en chaîne.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Si l'on considère cette notation comme de simple fraction, cette règle semble provenir de manipulation élémentaire.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}(1) \quad = \frac{du}{dx}\frac{dy}{dy} \quad = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$$

en fait, c'est essentiellement ce qu'on a fait plus tôt.

Théorème $f(g(x))'$

Cherchons: $$f(g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \right) \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right) g(x)'$$

Exemple

$$y = 4x^3 + 2x \qquad u = \sqrt{y} + \frac{3}{y+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 2 \qquad \frac{du}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{3'(y+1) - 3(y+1)'}{(y+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{-3}{(y+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{-3}{(y+1)^2}\right)(12x^2 + 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 2x}} + \frac{-3}{(4x^3 + 2x + 1)^2}\right)(12x^2 + 2)$$

Faites les exercices suivants

Section 2.4. # 31 et 32.

Aujourd'hui, nous avons vu

f n'est pas continue en a $\Longrightarrow$ f n'est pas dérivable en a.

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Devoir: Section 2.4